

# 唐山地震破裂过程的三维分析\*

张之立

(国家地震局地球物理研究所)

## 摘要

本文提出一个三维力学模型,对1976年7月28日唐山地震的破裂过程做了进一步的理论分析。结果表明断裂面长轴两端存在一个 $10^\circ$ 左右的 $\alpha$ 角域,在这个角域内断裂面前缘的初始扩展方向是非共面扩展,即在与断裂面本身偏离一个角度( $\phi_0, \theta_0$ )的面内扩展,而在其它区域断裂面的前缘是沿自身平面扩展的。在邻近长轴端部的点,扩展角 $\phi_0 \approx 0^\circ, \theta_0 = 80.5^\circ$ ,这和二维分析得到的扩展分支的方向一致。由于主断裂面在长轴端部 $10^\circ$ 角域左右的非共面扩展,大量余震沿此方向发生,断裂面变成扭曲形状。

作者曾于文献<sup>[1]</sup>中根据震源机制的结果用简化了的二维力学模型分析了唐山地震的破裂过程,提出了主断裂和扩展分支的概念,解释了较大余震多数发生在主断裂两端并与主断裂偏离 $80^\circ$ 左右的扩展分支上的观察事实。但是实际问题是三维的,因而有必要建立一个三维力学模型做进一步的分析讨论。

## 一、三维的力学模型

大量观察事实证明地震是地下岩石发生剪切破裂的结果,由地震波资料知唐山地震

断裂面的长度大于宽度,余震震源深度的分布近似椭圆,因此提出图1所示的三维力学模型,即一个长、短半径为 $a, b$ 的椭圆盘裂纹面受有与裂纹面平行的剪应力 $\tau$ 的作用。 $\tau$ 的方向可以由震源机制解得到, $\tau$ 的大小可以由区域应力场决定。按照力学基本原理,外部区域应力场在断裂面上的作用总是可以归结为垂直裂纹面的压应力 $\sigma_n$ 和平行裂纹面的剪应力 $\tau_n$ 的作用,也就是

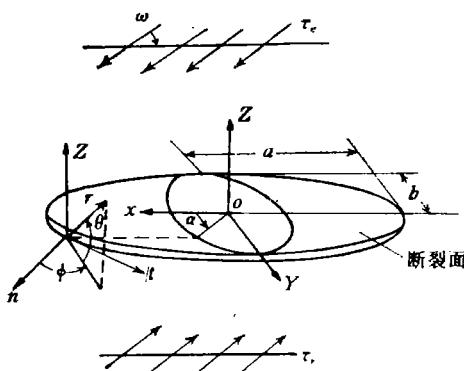


图1 三维力学模型

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^3 \sigma_i n_i^i$$

\* 1982年11月26日收到初稿,1983年8月16日收到修改稿。

$$\tau_n = \sum_{i=1}^3 (\sigma_i n_i)^2 - \left( \sum_{i=1}^3 \sigma_i n_i^2 \right)^2 \quad (1)$$

这里  $\sigma_i$  为主应力,  $n_i$  是断裂面法线  $n$  对于应力主向的方向余弦。

断裂面由于压应力的作用处于闭合状态, 这时断裂面可以传递应力, 断裂面要保持相对滑动必需克服表面摩擦力  $f \cdot \sigma_n$  ( $f$  是摩擦系数), 因此地震时实际起作用的是有效剪应力  $\tau_e = \tau_n - f \cdot \sigma_n$ . 按照叠加原理可以将裂纹面上的力转化为区域外力, 因此图 1 的模型是用  $\tau_e$  作为区域外力施加于边界面上。

## 二、理论计算

对于各种荷载下的椭圆盘裂纹面, Kassir<sup>[2]</sup> (卡西尔) 经过繁杂的数学运算得到它们的应力强度因子, 对于图 1 所示的三维力学模型, 应力强度因子可以写为:

$$K_1 = 0,$$

$$K_2 = -m^2 m'^{\frac{1}{2}} \tau_e (a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\cdot \left[ \frac{a \sin \alpha \sin \omega}{\nu m'^2 K(m) - (m^2 + \nu m'^2) E(m)} - \frac{b \cos \alpha \cos \omega}{(m^2 - \nu) E(m) + \nu m'^2 K(m)} \right], \quad (2)$$

$$K_3 = (1 - \nu) m^2 m'^{\frac{1}{2}} \tau_e (a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\cdot \left[ \frac{a \sin \alpha \cos \omega}{(m^2 - \nu) E(m) + \nu m'^2 K(m)} - \frac{b \cos \alpha \sin \omega}{(m^2 + \nu m'^2) E(m) - \nu m'^2 K(m)} \right]$$

其中

$$m^2 = 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2, \quad m' = \frac{b}{a} \quad (3)$$

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \alpha}}, \quad E(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \alpha} d\alpha$$

$a$  和  $b$  是椭圆盘的长、短半径,  $K(m)$ ,  $E(m)$  是第一、二类椭圆积分,  $\omega$  是剪应力  $\tau_e$  和椭圆盘长轴方向之间的夹角,  $\nu$  是泊松比,  $\alpha$  是幅角。

对于图 1 所示模型, 若忽略高阶小量, 应力分量可以写成:

$$\sigma_n = -\frac{K_2}{(2r)^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{\xi - 1}{2\lambda \cos \theta} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2 + \xi + 3\xi^2}{2\xi^3} \right)$$

$$\sigma_t = -\frac{K_2}{(2r)^{\frac{1}{2}}} \frac{2\nu}{\xi} \left( \frac{\xi - 1}{2\lambda \cos \theta} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma_z = \frac{K_2}{(2r)^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{\xi - 1}{2\lambda \cos \theta} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2 + \xi - \xi^2}{2\xi^3} \right)$$

$$\tau_{nt} = -\frac{K_3}{(2r)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\xi} \left( \frac{\xi - 1}{2\lambda \cos \theta} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

$$\tau_{nz} = \frac{K_2}{(2r)^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{\xi + 1}{2\lambda \cos \theta} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2 - \xi + \xi^2}{2\xi^3} \right)$$

$$\tau_{tz} = \frac{K_3}{(2r)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\xi} \left( \frac{\xi + 1}{2\lambda \cos \theta} \right)^{\frac{1}{2}}$$

其中

$$\begin{aligned} \lambda &= \cos \phi + \frac{b^2 - a^2}{2ab} \sin \phi \sin 2\alpha \\ \xi &= \text{sign}(\cos \theta) \left[ 1 + \left( \frac{\tan \theta}{\lambda} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5)$$

因此,单位体积的应变能  $\frac{dW}{dV}$  可以用应力分量表示:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dV} &= \frac{1}{2E} (\sigma_n^2 + \sigma_t^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_n \sigma_t + \sigma_t \sigma_z + \sigma_z \sigma_n) \\ &\quad + \frac{1+\nu}{E} (\tau_{nt}^2 + \tau_{tz}^2 + \tau_{nz}^2) \end{aligned} \quad (6)$$

对于荷载不垂直裂纹面的复合型裂纹问题运用国际上公认的应变能密度因子准则<sup>[3]</sup>是适用和方便的。该准则定义应变能密度因子  $S$  与单位体积应变能有如下关系

$$S = \gamma \cdot \frac{dW}{dV} \quad (7)$$

由 4—6 式知,应变能密度因子  $S$  可以写成用应力强度因子表示的统一形式:

$$S = a_{11}K_1^2 + 2a_{12}K_1K_2 + a_{22}K_2^2 + a_{33}K_3^2 \quad (8)$$

三维的应变能密度因子准则概述为:

- (1) 裂纹边缘上任意一点的扩展方向是指向应变能密度因子  $S(\phi, \theta)$  具有极小值区域的方向。(与围绕该点的同一个球形表面的其它区相比较)。
- (2) 当由(1)确定的区域的应变能密度因子  $S_{\min}$  达到临界值  $S_{cr}$  时裂纹开始扩展。
- (3) 初始的裂纹扩展的长度假定是与  $S_{\min}$  成比例的,因而沿着新裂纹面前缘的  $S_{\min}/\gamma_0$  保持不变。

对于图 1 所示模型,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{16 \mu \lambda \xi^2 \cos \theta} \left[ 4(1-\nu)(\xi-1) + \frac{1}{\xi} (\xi+1)(3-\xi) \right] \\ &\quad \cdot K_2^2 + \frac{1}{4 \mu \lambda \xi \cos \theta} K_3^2 \end{aligned} \quad (9)$$

其中

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (10)$$

求  $S(\phi, \theta)$  的极小值,数学上应满足下述条件

$$\frac{\partial S}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \theta} = 0,$$

$$\left[ \left( \frac{\partial^2 S}{\partial \theta \partial \phi} \right)^2 - \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} \frac{\partial^2 S}{\partial \phi^2} \right] < 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial \phi^2} > 0.$$

对(9)式进行一次和二次微商,得到满足(11)式的  $\phi_0, \theta_0$  为:

$$\operatorname{tg} \phi_0 = \frac{b^2 - a^2}{2ab} \sin 2\alpha \quad (12)$$

$$\left[ -3 + 4\nu - \frac{9}{\xi_0^2} + \frac{4}{\xi_0} - \frac{8\nu}{\xi_0} + \sin^2 \theta_0 \left( \frac{4\xi_0(1-\nu)}{\xi_0 + 1} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3 - \xi_0}{\xi_0 - 1} \right) \right] \cdot K_2^2 + 4 \left( \frac{\xi_0^2 \sin^2 \theta_0}{\xi_0^2 - 1} - 1 \right) K_3^2 = 0 \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} \xi_0^2 &= 1 + \left( \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{\lambda_0} \right)^2 \\ \lambda_0 &= \cos \phi_0 + \frac{b^2 - a^2}{2ab} \sin \phi_0 \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (14)$$

上式表明初始扩展角  $\phi_0, \theta_0$  与椭圆盘几何尺度 ( $m' = b/a$ ) 有关,  $\theta_0$  还与应力强度因子  $K_2, K_3$  有关。由地震波资料知唐山地震的主断裂面尺度  $2a = 115$  公里,  $2b = 30$  公里, 所以  $m' = b/a = 0.2$ , 若取  $\omega = 0^\circ$ ,  $\nu = 0.25$ ,  $b/a = 0.2$ , 得到初始扩展角  $\phi_0, \theta_0$  的数值见表 1。

表 1 椭圆盘断裂面边缘上各点的初始扩展角

$\alpha$	$0^\circ$	$5^\circ$	$10^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$\phi_0$	$0^\circ$	$-22.6^\circ$	$-39.4^\circ$	$-50.2^\circ$	$-64.3^\circ$	$-67.4^\circ$	$-64.3^\circ$	$-50.2^\circ$	$0^\circ$
$\theta_0$	$80.5^\circ$	$80.5^\circ$	$80.5^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$

上述结果表明,在长、短轴端部即  $\alpha = 0^\circ$  和  $\alpha = 90^\circ$  处  $\phi_0 = 0^\circ$ , 在  $\alpha = 0^\circ - 10^\circ$  范围内  $\theta_0 = 80.5^\circ$ ; 在  $\alpha > 10^\circ$  区域  $\theta_0 = 0^\circ$ ,  $\phi_0 = 0^\circ$  表示断裂面只在图 1 所示坐标  $n-z$  面内扩展,  $\theta_0 = 0^\circ$  表示裂纹面是沿自身平面扩展,  $\theta_0 = 80.5^\circ$  表示断裂面在与自身平面成  $80.5^\circ$  的另一面内扩展, 以下简称非共面扩展。其扩展图形见图 2。

### 三、结果讨论

更详细的讨论见文献<sup>[4]</sup>, 这里仅就唐山地震进行讨论。

(1) 唐山地震的主断裂面是比较狭长的, 它在长轴端部  $\alpha = 10^\circ$  范围内是非共面扩展, 其余范围是自身平面扩展。若  $b/a$  比值加大, 非共面扩展的  $\alpha$  角域扩大, 若  $b/a$  比值减小, 非共面扩展区的  $\alpha$  角域亦减小。当  $b/a \rightarrow 0$ ,  $\alpha \rightarrow 0^\circ$ , 则  $\phi_0 = 0^\circ$ ,  $\theta_0 = 80.5^\circ$ , 即只在端部  $\alpha = 0^\circ$  的一点处是非共面扩展, 其余是自身平面扩展。这与二维分析的结果<sup>[1]</sup>相同。实际上这可由(12)–(14)式直接得到, 因为当  $\phi_0 = 0$  时,  $\lambda_0 = 1$ ,  $\xi_0 = 1/\cos \theta_0$ , 且  $K_3 \rightarrow 0$  则(13)式简化为:

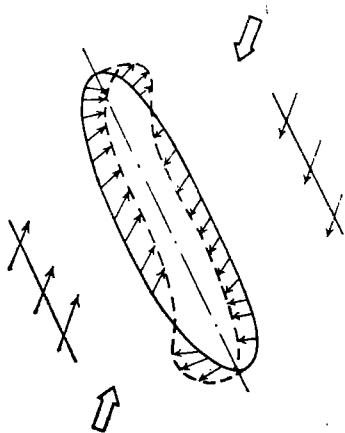


图 2 断裂面的三维扩展图形

$$1 - 2\nu - 3 \cos \theta_0 = 0 \quad (15)$$

若  $\nu = 0.25$ , 则

$$\theta_0 = 80.5^\circ$$

这说明二维是三维情形的特例。唐山地震主破裂面的  $b/a$  比较小, 非共面扩展的  $\alpha$  区较小,

因而较大余震的震中分布图能观察到明显的扩展分支, 二维和三维的计算结果比较一致, 其扩展图象能用二维岩石力学试验结果说明。但是需要指出的是地震形成的破裂面的短、长半径之比  $b/a$  不可能太小, 因而长轴端部处的非共面扩展的  $\alpha$  角域不可能缩减为一个点, 总是包括一定的区域。因此通常余震的震源在地面上的垂直投影即余震震中分布图看上去类似椭圆, 如图 3 中的虚线。

(2) 唐山地震后一些作者根据不同资料得到了唐山地震的断层面参数, 为了比较, 将主要结果列于表 2。

表 2 唐山地震的断层面参数

本文编号	断层面走向	倾向	倾角	断层长度	资料来源	作者
1	NE41°	南东	85°		国内台网体波	邱群 <sup>[3]</sup>
2	NE35.6°	南东	73°	110 公里	国内, 体波	张之立等 <sup>[1]</sup>
3	NE30°	南东	89.9°	115 公里	国内, 外, 体波	张之立等 <sup>[1]</sup>
4	NE20°	北西	86°		国外, 体波	R. Butler 等 <sup>[6]</sup>
5	NE40°	北西	80°	140 公里	国外, 面波	R. Butler 等 <sup>[6]</sup>
6	NE49°	南东	76°	84 公里	地形变资料反演	陈运泰等 <sup>[2]</sup>
7	NE56°	直立	90°	112 公里	地形变资料反演	张祖胜等 <sup>[8]</sup>
8	NE50°~55°	直立	90°	100 公里	地形变资料图解	张祖胜等 <sup>[8]</sup>

本文编号 1—5 是由地震波资料得到的, 6—8 是由地形变资料得到的。1 和 2 是仅用国内台网体波资料的结果, 5 是由国外台的面波资料合成地震图得到的。从数值上看, 1, 2 和 5 的断层面的走向(41°, 35.6° 和 40°)极为相近, 从中看不出由于体波和面波周期不同引起的差别。3 是由国内、外台网记录清楚的体波资料得到的, 由于资料丰富并且经过作者的认真校核, 近台, 远台资料点的分布又比较均匀, 因而可以认为该结果是比较精确可靠的。若取 3 的结果做为中值, 则 1—5 的结果均可用  $30^\circ \pm 10^\circ$  来概括, 这说明由地震波资料求得的断层面解基本是接近的, 它们之间的差别没有超出断层面解应有的误差范围。6—8 是由地形变资料反演的结果, 断层面的走向范围是  $49^\circ$ — $56^\circ$ , 显然与上述地震波的结果有着明显差异。若取它们的算术平均值做为中值, 则 6—8 的结果可用  $52^\circ \pm 5^\circ$  来概括, 这和唐山地震余震区的长轴方向  $50^\circ$ — $55^\circ$  相吻合。说明由地形变资料反演得到的断层面走向要比地震波得到的向右旋转一个  $22^\circ$  左右的角度。而观测的余震区的长轴方向也是比地震波的结果向右偏转了  $20^\circ$ — $25^\circ$  的角度, 偏离的方向都是指向主应力轴

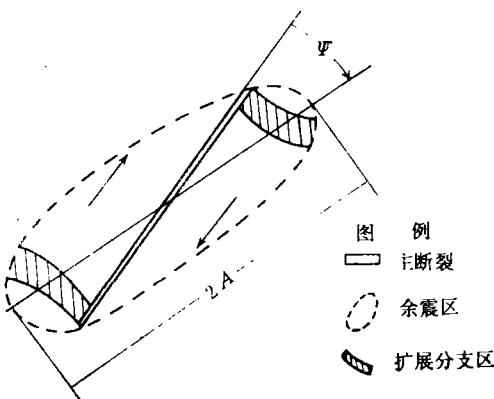


图 3 扩展图形在地面上的垂直投影图

的。这种震源机制解与余震分布总体方向不一致的地震还有一些，如1976年4月6日的 $M_r = 6.3$ 的和林格尔地震和1969年9月29日南非的西利斯(Ceres)地震，偏离的方向都是指向主应力轴的。我们认为这种不一致能用本文的三维断裂分析得到较好的解释。

按照前述理论，当断裂面前缘的应变能密度因子 $S_{\min}$ 达到临界值 $S_{cr}$ 时，断裂面将沿着应变能密度因子具有最小值的方向初始扩展。由于唐山地震的断裂面横纵比 $b/a=0.2$ ；按照前面的计算，在长轴两端 $10^\circ$ 左右的角域范围内断裂面是非共面扩展，其余区域是沿自身平面扩展，因此，余震在两端 $10^\circ$ 的 $\alpha$ 角区是沿扩展分支方向发生，而其余地区是沿主断裂面发生，扩展的结果使主断裂面发生扭曲，扩展的空间图形如图2所示，它在地面上的垂直投影见图3。按照二维断裂力学试验结果，扩展分支长度 $l$ 与原始裂纹长度 $L$ 之比 $l/L = 0.2—0.3$ 。对于唐山地震， $L = 115$ 公里，则 $l = 23—34$ 公里，若取 $l = 23$ 公里，由图3中的三角关系近似得到

$$2A = 131 \text{ 公里} \quad \phi = 20.2^\circ.$$

$2A$ 相当余震区长轴的长度， $\phi$ 角相当余震区长轴方向相对震源机制解偏离的角度。由于非共面扩展区是指向主应力轴的，因此，对于右旋的主断裂面，它的余震区的长轴方向应比震源机制解向右旋转一个 $\phi$ 角；如唐山地震向右旋转了 $20.2^\circ$ ，余震区长轴的长度为131公里，也比地震波得到的略长；而对于左旋的主断裂面，它的余震区的长轴方向相对震源机制解要左旋一个 $\phi$ 角，如南非的西利斯地震<sup>[9]</sup>，它的断层面解是左旋的北西 $39^\circ—43^\circ$ ，而余震区的长轴方向却是北西 $61^\circ$ ，相对震源机制解向左旋转了 $20^\circ$ 。

因为地震波仅包含震时瞬间的信息，而地形变资料不仅包括主震前，主震时的，还包括震后一段时期内的信息，因此用地震波资料测定的震源机制解反映的是主破裂的方向，而地形变反演的是主震和大量余震的总体破裂方向。这就是为什么由地形变资料反演的结果和地震波得到的震源机制解不一致而却和余震区长轴方向比较一致的原因。编号6用的地形变资料包括了震后4个月的资料，编号7包括了震后将近一年的资料，因此7的结果要比6的结果更接近余震区的长轴方向。这也说明主断裂面在主震后随着余震的发生和扩展分支的增长，本身形状也在发生扭曲。从这种意义上说，文献[10]认为，唐山地震的主断裂面为S形是有一定道理的。

## 参 考 文 献

- [1] 张之立等，唐山地震的破裂过程及其力学分析，地震学报，2，2，111—129，1980。
- [2] H. Tada, P. C. Paris and G. R. Irwin, The stress analysis of cracks handbook, Del. Res. Corp. Pennsylvania, 1973.
- [3] G. C. Sih, Strain energy density factor applied to mixed mode crack problems, Int. J. of Fracture, 10, 305—321, 1974.
- [4] 张之立等，三维断裂扩展方向的理论分析和余震分布图象的预报，地球物理学报，25, Supp, 569—581, 1982.
- [5] 邱群，1976年7月28日河北省唐山7.8级地震的发震背景及其活动性，地球物理学报，19, 4, 259—269 1976.
- [6] R. Butler, G. S. Stewart and H. Kanamori, The July 27, 1976, Tangshan, China Earthquake, A complex sequence of intraplate events, Bull. Seism. Soc. Am., 69, 1, 207—220, 1979.
- [7] 陈运泰等，用大地测量资料反演的1976年唐山地震的位错模式，地球物理学报，22, 3, 201—216, 1979.
- [8] 张祖胜等，地形变背景和异常分析〈一九七六年唐山地震〉，地震出版社，131—170, 1982

- [9] R. W. E. Green, and A. McGarr, A comparison of the focal mechanism and aftershock distribution of the Ceres, South Africa earthquake of September 29, 1969, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **62**, 3, 869—871, 1972.
- [10] 龚鸿庆, 唐山地震断裂面的形状, 地震科学研究所, 2, 37—41, 1980.

## THREE DIMENSIONAL ANALYSIS OF FRACTURE PROCESS OF THE 1976 TANGSHAN EARTHQUAKE

ZHANG ZHILI

(Institute of Geophysics, State Seismological Bureau)

### Abstract

Following a previous paper by the same author<sup>[1]</sup>, the fracture process of the Tangshan Earthquake of July 28, 1976 is hereby further studied. A three dimensional mechanical model is now presented and more complete results in comparison with that by two dimensional model are obtained. It is found that there exists an alpha ( $\alpha$ ) angular region of about  $10^\circ$  near each end of the major axis of the main fault. Within the angular region, the initial extension direction of points on the fault front is no longer coplanar with the plane of the main fault but in a plane making an angle ( $\phi_0, \theta_0$ ) with it. However for other parts of the fault, the front extends in the fault plane. Near the end points of the major axis the angle  $\phi_0 \approx 0^\circ, \theta_0 \approx 80.5^\circ$ . They agree with the directions obtained from two dimensional analysis. It is because that the extension within the angular region of about  $10^\circ$  at the end points of the major axis of the fault plane is not coplanar, a large number of aftershocks occurred along this direction. So the fault plane becomes contorted in shape.