

地壳和上地幔三维速度与 界面结构层析成像 ——理论部分^{*}

郑需要 张先康

(中国郑州 450003 中国地震局地球物理勘探中心)

摘要 提出了一种三维模型参数化方法,使得正问题和反问题可以用解析式表达。地壳和上地幔速度与界面结构分别由一组非常光滑的函数描述。在正问题和反问题中,使用了初值射线追踪方法,走时对模型网格节点参数的偏微商在射线追踪的同时进行了解析计算。由于速度和界面函数具有二阶连续偏微商,由射线路径的发散和聚焦在地表引起的影区可以避免。射线追踪之后,可以获得由矩阵和矢量组成的反问题。解决反问题使用了具有阻尼因子的奇异值分解法。一组由几条纵剖面组成的合成数据被用来进行数值模拟计算,结果表明方法是健全的。与二维方法比较,在地壳模型非常复杂的情况下,三维反演方法可以给出准确的速度结构和界面位置。

关键词 模型参数化 射线追踪 三维反演 地壳上地幔结构

引言

三维地震层析成像已经被用来解决各种各样的地球物理问题。Aki 和 Lee(1976)以及 Hawley 等(1981)利用远震体波走时反演台阵下三维地球结构;其它有关三维地壳结构的研究,包括对三维数据的反演和偏移(Gjoestdal, Ursin, 1981)、速度和介质结构的计算(Kanasewich, Chiu, 1985; Chiu *et al.*, 1986)。在过去的几十年里,地壳和上地幔的地震探测和研究得到了广泛发展。随着地震观测和地震台网的增加,通过地震方法获得三维地壳介质结构和物理参数成为可能。对于具有多条纵剖面纵横交错的地区,或有多条非纵剖面的地区,或纵剖面和台阵观测共存的地区,三维地震反演可以更好地给出地壳结构和速度信息。

本文提出了一种三维模型参数化的方法。其主要特点是用 B-样条函数描述比较复杂的地壳模型。双重立方 B-样条函数被用来描述界面,三重立方 B-样条函数被用来描述速度模型。选择初值射线追踪(Cerveny *et al.*, 1977)计算射线路径。对于一个震源,可以计算出一组射线,它们的终点落在研究的区域里。对这组射线进行存储编号,插值出接收点的走时。在射线追踪的同时,可以分别计算出沿射线路径速度对模型网格节点速度的偏微商和反射点处界面深度对界面网格节点深度的偏微商。提出了关于连续速度和连续界面的线性化走

* 地震科学联合基金资助项目。中国地震局地球物理勘探中心论著 RCEG97017。
1997-11-10 收到初稿, 1998-03-08 收到修改稿并决定采用。

时反演问题。使用奇异值分解方法对线性化问题求解，并用合成数据进行了反演计算。

1 模型参数化

我们使用笛卡尔坐标系，让 x 和 y 分别代表沿地表相互垂直的两个水平方向，让 z 轴沿深度方向， x , y 和 z 形成右手正交坐标系(图 1)。在研究区域里有 n 个界面，它们的深度是 x 和 y 的函数，用 $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$, ..., $z_r(x, y)$, ..., $z_n(x, y)$ 表示。速度是空间位置的函数，用 $v(x, y, z)$ 表示，而且每一层有自己的速度函数，为了描述复杂三维地壳模型和避免由射线发散与聚焦在地表引起几何影区，我们使用了一组高度光滑具有二阶连续偏导的函数。

对于任意一个界面 z_r ，用一个双重立方 B-样条函数表示。它是水平坐标 x 和 y 的函数

$$z_r = z(x, y) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} z_{i,j} \varphi_i\left(\frac{x - x_i}{\Delta x}\right) \psi_j\left(\frac{y - y_j}{\Delta y}\right) \quad (1)$$

$$r = 1, 2, \dots, n$$

这里， (x_i, y_j) 是 x , y 平面内矩形网格节点的坐标(图 1a)。

$$\begin{aligned} x_i &\leqslant x \leqslant x_{i+1} \text{ 和 } y_j \leqslant y \leqslant y_{j+1} \\ \Delta x = x_{i+1} - x_i &= \text{常数} \quad i = 1, \dots, N_x - 1 \\ \Delta y = y_{j+1} - y_j &= \text{常数} \quad j = 1, \dots, N_y - 1 \end{aligned} \quad (2)$$

$z_{i,j}$ 代表第 r 个界面上网格节点的深度值， N_x 和 N_y 分别是 x 方向和 y 方向矩形网格节点数， φ_i 和 ψ_j 是基样条函数

$$\Omega_l(x) = \sum_{m=0}^{l+1} (-1)^m \binom{l+1}{m} \left(x + \frac{l+1}{2} - m \right)_+^l / l! \quad l = 3 \quad (3)$$

速度用三重立方 B-样条函数表示，它是空间坐标 x , y 和 z 的函数

$$v(x, y, z) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} v_{i,j,k} \varphi_i\left(\frac{x - x_i}{\Delta x}\right) \psi_j\left(\frac{y - y_j}{\Delta y}\right) \zeta_k\left(\frac{z - z_k}{\Delta z}\right) \quad (4)$$

这里， (x_i, y_j, z_k) 是立方网格节点的坐标(图 1b)。

$$\begin{aligned} x_i &\leqslant x \leqslant x_{i+1} & y_j &\leqslant y \leqslant y_{j+1} & z_k &\leqslant z \leqslant z_{k+1} \\ \Delta x = x_{i+1} - x_i &= \text{常数} & i &= 1, \dots, N_x - 1 \\ \Delta y = y_{j+1} - y_j &= \text{常数} & j &= 1, \dots, N_y - 1 \\ \Delta z = z_{k+1} - z_k &= \text{常数} & k &= 1, \dots, N_z - 1 \end{aligned} \quad (5)$$

式中， $v_{i,j,k}$ 是立方网格节点处的速度值， N_x , N_y 和 N_z 分别是 x 方向、 y 方向和 z 方向立方网格节点数。

φ_i , ψ_j 和 ζ_k 由式(3)表示。不同界面的矩形网格尺度可以是相同的。也可以是不同的。如果界面是简单的或平坦的，矩形网格尺度可以比较大；否则，可以比较小。如果每层的速度结构比较简单，立方网格的尺度可以大一些，否则小一些。在两个相邻界面之间的层和两个界面本身应该完全被速度网格的上下两个边界所包围。如果不考虑界面上下两边的速度变化，或者界面两边的速度跃变很小，那么就可以用一个速度函数对模型进行参数化，这样会使射线追踪和反演变得更加容易。

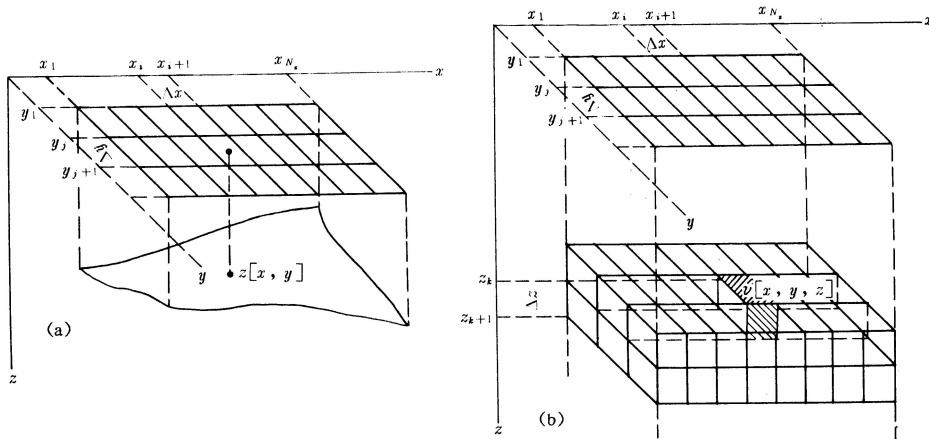


图 1 (a)用双重立方 B-样条函数对界面进行参数化, 界面深度 z 是 x 和 y 的函数, 它由式(1)给出; (b)速度模型用三重立方 B-样条函数参数化, 空间任一点的速度 v 是 x , y 和 z 的函数, 它由式(4)给出

2 射线追踪

在进行模型参数化的基础之上, 利用零阶渐近射线理论进行射线追踪, 三维射线追踪方程表示如下:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = v^2 p_x & \frac{dp_x}{d\tau} = -\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{dy}{d\tau} = v^2 p_y & \frac{dp_y}{d\tau} = -\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{dz}{d\tau} = v^2 p_z & \frac{dp_z}{d\tau} = -\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial z} \end{cases} \quad (6)$$

初始条件为

$$\begin{aligned} x &= x_0 & y &= y_0 & z &= z_0 \\ p_x &= p_{x_0} & p_y &= p_{y_0} & p_z &= p_{z_0} \end{aligned} \quad (7)$$

这里, $p_{x_0}^2 + p_{y_0}^2 + p_{z_0}^2 = v_0^{-2}$, $v_0 = v(x_0, y_0, z_0)$, p_x , p_y , p_z 是慢度矢量 \mathbf{p} 的分量, 它平行于射线方向, 大小为

$$|\mathbf{p}| = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{1/2} = 1/v \quad (8)$$

使用 Runge-Kutta 法对方程(6)进行数值求解, 当一条射线与一个界面相交时将产生反射波和折射波, 反射点的位置以及反射波和折射波的慢度矢量必须计算出来, 利用黄金分割法可以计算出射线与界面交叉点坐标, 反射波慢度矢量(图 2a)和入射波慢度矢量在同一个平面内, 且满足 Snell 定律

$$\mathbf{p}_1 \times \mathbf{n} = -\mathbf{n} \times \mathbf{p}_2 \quad (9)$$

这里, \mathbf{p}_1 是入射波的慢度矢量, \mathbf{p}_2 是反射波的慢度矢量, \mathbf{n} 是入射点界面的法矢量, $\mathbf{n} = (\partial z / \partial x, \partial z / \partial y, -1)$. 从式(9)可以得到反射波的慢度矢量 \mathbf{p}_2 .

折射波慢度矢量(图 2b)和入射波慢度矢量在同一个平面内, 且满足 Snell 定律

$$\mathbf{p}_1 \times \mathbf{n} = \mathbf{p}_2 \times \mathbf{n} \quad (10)$$

式中, \mathbf{p}_2 是折射波的慢度矢量, \mathbf{p}_1 和 \mathbf{n} 与式(9)相同. 在图 2b 中, v_1 和 v_2 分别是入射点界面两侧的速度. 从式(10)可以得到折射波的慢度矢量 \mathbf{p}_2 .

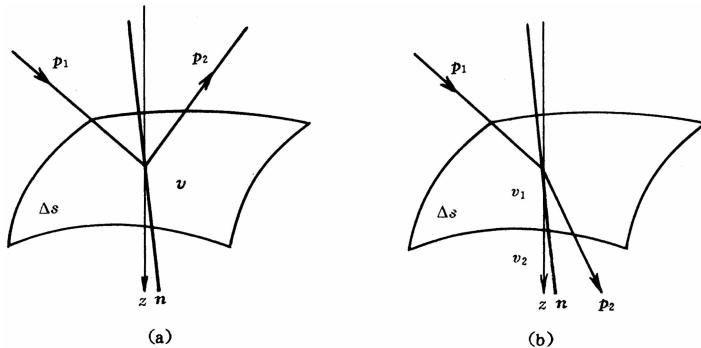


图 2 (a) 一根射线与一个界面相交, 入射波和反射波满足 Snell 定律, 反射波矢量由式(9)计算;
 (b) 一根射线与一个界面相交, 入射波和折射波满足 Snell 定律, 折射波矢量由式(10)计算

3 反演问题

地震波走时是界面和速度参数的非线性函数. 对于给定的速度模型 $v(x, y, z)$, 地震波走时是慢度沿射线路径的积分

$$t = \int_L \frac{1}{v(x, y, z)} dl \quad (11)$$

式中, L 代表射线路径.

在三维参数化模型里, 求式(11)对 $v_{i, j, k}$ 的微商, 我们可以得到

$$\frac{\partial t}{\partial v_{i, j, k}} = - \int \frac{1}{v^2} \frac{\partial v}{\partial v_{i, j, k}} dl \quad (12)$$

利用式(4), $\frac{\partial v}{\partial v_{i, j, k}}$ 可以表示为

$$\frac{\partial v}{\partial v_{i, j, k}} = \varphi_i \left(\frac{x - x_i}{\Delta x} \right) \psi_j \left(\frac{y - y_j}{\Delta y} \right) \zeta_k \left(\frac{z - z_k}{\Delta z} \right) \quad (13)$$

将式(13)代入式(12)

$$\frac{\partial t}{\partial v_{i, j, k}} = - \int \frac{1}{v^2} \varphi_i \left(\frac{x - x_i}{\Delta x} \right) \psi_j \left(\frac{y - y_j}{\Delta y} \right) \zeta_k \left(\frac{z - z_k}{\Delta z} \right) dl \quad (14)$$

如果界面 $z_r(x, y)$ 在反射点 $z_r(x_r, y_r)$ 有一个扰动 δz (图 3), 那么由扰动引起的走时变化可以计算出来(Bishop et al., 1985), 让 θ 代表入射线和入射点界面法线负方向的夹角, γ 代表入射点界面法线方向和 z 轴之间的夹角

$$\Delta t = \frac{2\Delta l}{v} = \frac{2\Delta d \cdot \cos\theta}{v} = \frac{2\cos\theta\cos\gamma \cdot \delta z}{v} \quad (15)$$

当 δz 趋向零时, 有

$$\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{2\cos\theta\cos\gamma}{v} \quad (16)$$

在反射点 $z_r(x_r, y_r)$ 界面的法线方程为

$$\frac{x - x_r}{z_x} = \frac{y - y_r}{z_y} = \frac{z - z_r}{-1} \quad (17)$$

式中, z_x 和 z_y 是界面深度对水平坐标的偏微商.

设 $\mathbf{n} = (z_x, z_y, -1)$ $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$

式中, \mathbf{p} 是入射波的慢度矢量, 有

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{p}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{p_x z_x + p_y z_y - p_z}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} \cdot \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}} \quad (18)$$

$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3}{|\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}} \quad (19)$$

将式(18)和式(19)代入式(16), 有

$$\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{2}{v} \frac{p_x z_x + p_y z_y - p_z}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} \cdot (z_x^2 + z_y^2 + 1)} \quad (20)$$

走时对于界面节点深度的偏导数为

$$\frac{\partial t}{\partial z_{i,j}} = \frac{\partial t}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial z_{i,j}} \quad (21)$$

利用式(20)和式(21), 有

$$\frac{\partial t}{\partial z_{i,j}} = \frac{2}{v} \frac{p_x z_x + p_y z_y - p_z}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} \cdot (z_x^2 + z_y^2 + 1)} \cdot \varphi_i\left(\frac{x - x_i}{\Delta x}\right) \psi_j\left(\frac{y - y_j}{\Delta y}\right) \quad (22)$$

射线追踪的结果是一个线性化系统, 可表示

为

$$\mathbf{A} \Delta \mathbf{m} = \Delta \mathbf{t} \quad (23)$$

式中, \mathbf{A} 是一个偏导矩阵, 它的元素是由式(14)和式(22)组成; $\Delta \mathbf{m}$ 是模型参数调整矢量; $\Delta \mathbf{t}$ 是走时残差矢量, 走时残差矢量和偏导数矩阵都是在进行射线追踪时得到的. \mathbf{A} 是一个 $M \times N$ 矩阵, M 是数据个数, N 是模型参数个数. 通常, \mathbf{A} 是一个稀疏矩阵, 它的大部分元素为零.

求解方程(23), 使用了 \mathbf{A} 的广义逆, 矩阵 \mathbf{A} 可以分解为

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{V}^\top \quad (24)$$

它的广义逆为

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{U}^\top \quad (25)$$

式中, $\mathbf{U} = M \times M$ 为数据空间矩阵, $\mathbf{V} = N \times N$ 为模型空间矩阵, $\boldsymbol{\Sigma} = M \times N$ 为广义对角矩阵. 当 \mathbf{A} 的秩为 r 时, 它有 r 个特征值

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$$

$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = N \times M$ 为具有 r 个对角元素 $1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \dots, 1/\lambda_r$ 的广义对角矩阵. 式(23)的解为

$$\Delta \mathbf{m} = \mathbf{A}^+ \Delta \mathbf{t} \quad (26)$$

当数据含有噪音时, 为了使解具有稳定性, 使用阻尼最小二乘法修正系统较小的特征

值, 这时特征值可以写为

$$\frac{\Sigma}{\Sigma^2 + Kl} \quad (27)$$

式中, K 是阻尼因子。当 K 是一个正的比较大的数时, 它能增加解的稳定性, 但同时会降低解的分辨率。因此, 应在保证解的稳定性的同时, 尽可能选择小的 K , 以达到最大的分辨率。

为了加快解的收敛速度, 并避免矩阵 \mathbf{A} 变为病态, 对矩阵 \mathbf{A} 的每一列进行归一化处理

$$d_j = \left[\sum_{i=1}^N A_{ij}^2 \right]^{1/2} \quad A_{ij} \rightarrow \frac{A_{ij}}{d_j} \quad (28)$$

相应的模型参数可以通过下面的公式转化为原来的参数

$$\Delta m = \frac{\Delta m_j}{d_j} \quad j = 1, \dots, N \quad (29)$$

解的分辨率和协方差矩阵由下列公式给出:

$$\mathbf{R} = \Sigma \left[\mathbf{V}_r \left(\frac{\Sigma_r^2}{\Sigma_r^2 + Kl} \right) \mathbf{V}_r^T \right] \quad (30)$$

$$\mathbf{C} = \sigma^2 \left[\mathbf{V}_r \left(\frac{\Sigma_r^2}{(\Sigma_r^2 + Kl)^2} \right) \mathbf{V}_r^T \right] \quad (31)$$

式中, σ^2 是数据方差, \mathbf{V}_r 是具有 r 个特征值的模型空间矩阵。

4 合成数据试验

为了验证方法的可行性, 我们完成了合成数据模拟试验, 对给定的模型用射线追踪方法获得了正演合成走时数据, 然后使用这些数据反演给定的模型。速度模型和走时尽可能与典型的宽角度反射折射实验一致。真模型是一个横向不均匀模型。它由 3 层组成, 我们假定界面速度跃变很小, 或者界面上下速度是连续的, 这样, 用一个速度函数可以描述整个模型, 而且这时的界面变成了几何界面。首先, 构造一个二维速度模型(图 4)。图 4 中给出了速度等值线和界面, 模型是一个轴对称模型。当它围绕 z 轴旋转时, 可以得到一个三维模型。在地表(即 $x-y$ 平面)(图 5), 有 10 条纵剖面, 编号从 1 到 10。对 10 条剖面, 计算了给定模型的反射波和折射波的合成数据。对于每一条剖面, 设有 6 个炮点, 相邻两个炮点间距为 60 km, 接收点间距为 10 km。

速度模型被参数化为立方网格, 相邻网格节点间距在 x , y 和 z 方向上分别是 50, 50 和 10 km。界面被参数化为矩形网格, 相邻网格节点间距在 x 和 y 方向上都是 50 km。通过对两个起始角的控制, 完成了各个震源的射线追踪。对每一震源和每一个震相建立一个数据文件, 它存储了终点落在规定剖面邻域的射线(图 6)。从

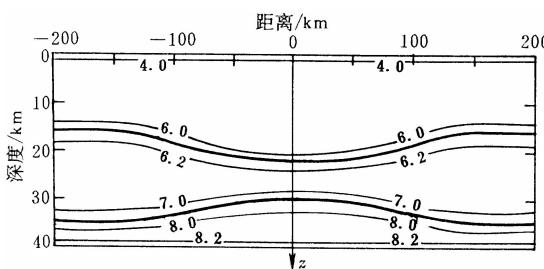


图 4 二维速度模型。粗线代表界面, 细线代表速度等值线

这个文件里可以找到 3 条射线, 由它们组成的射线管包含有一个接收点, 通过插值, 可以获得该剖面的走时.

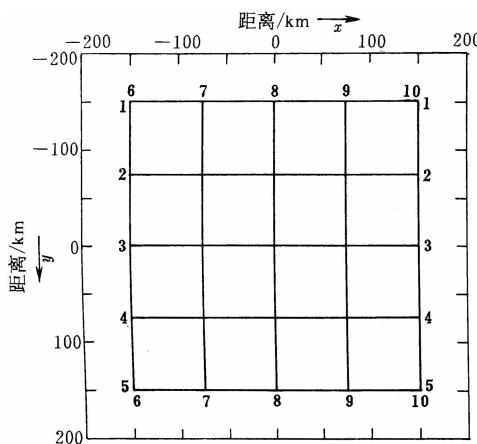


图 5 由多条纵剖面组成的观测系统

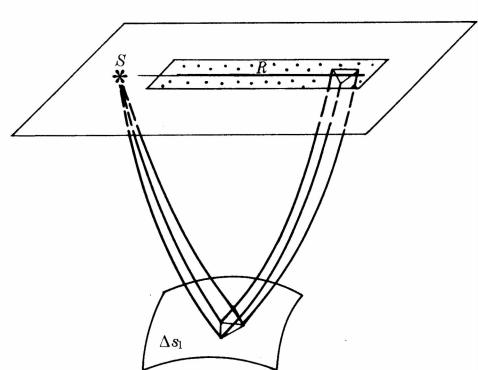


图 6 利用射线管插值方法计算走时示意图
(区域 R 里的黑点代表计算出的射线终点)

对于每一个震源计算了 4 个震相的走时, 它们是: 上部地壳的折射波 P_g , 经第 1 个反射面反射的反射波 P_c , 经莫霍面反射的反射波 P_M 和经上地幔顶部折射的折射波 P_N . 它们可追踪的范围为: P_g 波 $0 \sim 60$ km, P_c 波 $40 \sim 100$ km, P_M 波 $60 \sim 160$ km, P_N 波 $120 \sim 180$ km. 总共有 2 580 个走时数据参与了正演和反演计算.

在进行三维反演之前, 首先对每一剖面进行一维反演(郑需要, 1992)和二维反演计算. 对于编号为 1, 5, 6, 10 的 4 条剖面, 二维反演结果表明速度和界面没有横向变化; 对于编号为 2, 4, 7, 9 的 4 条剖面, 二维反演结果表明界面深度与真模型存在着明显偏离. 三维初始模型是通过对二维反演得到的数据进行插值得到的, 使用与正演相同的射线追踪方法计算理论走时. 但是, 这里使用了包围某一接收点的小射线管的几条射线计算走时残差以及速度和界面的偏微商.

通过射线追踪, 得到了方程(23), 利用上节的反演方法对式(23)进行求解, 三次迭代后理论结果和正演合成数据匹配得很好. 反演得到的两个反射界面的深度在 $-200 \sim -120$ km 和 $120 \sim 200$ km 的周边范围内与真模型非常一致, 在 $-120 \sim 120$ km 范围内与真模型的最大深度偏离小于 0.2 km, 三次迭代后的最大走时残差小于 0.05 s. 反演得到的结果与真实模型的一致性说明, 带阻尼因子的奇异值分解法是健全的, 而且能够得到接近真实模型的参数估计.

反演结果的显示是由一个显示软件完成的. 有两种显示方法: 一种是显示三维立体图中的任一横剖面, 只要给定该横剖面的参数; 另一种是进行立体显示. 速度结构、分辨率和协方差显示通常使用第 1 种方法, 界面显示可以用任一种方法.

5 结论

本文提出的模型参数化方法适用于解决复杂地壳结构的正问题和反问题. 三维反演方

法可以使用一个统一模型对同一地区不同时期得到的多条地震剖面数据进行解释。与二维解释方法相比，三维反演方法能使界面恢复到它真正位置。正像石油勘探中使用的偏移方法那样，三维方法可以使用各种各样的数据集，如非纵剖面数据集、纵剖面和台网联合数据集，或三维观测数据集。在下一篇文章里，我们将把这一方法原理应用到某一数据集的解释工作中。

参 考 文 献

- 郑需要, 1992. 垂向非均匀介质的走时反演. 西北地震学报, **14**(1): 3~9
- Aki K, Lee W H, 1976. Determination of three-dimensional velocity anomalies under a seismic array using P arrival times from local earthquakes. *J Geophys Res*, **81**(23): 4 381~4 399
- Bishop T N, Bube K P, Cutler R T, et al, 1985. Tomographic determination of velocity and depth in laterally varying media. *Geophysics*, **50**(6): 903~923
- Cerveny V, Molotkov I, Psencik I, 1977. *Ray Method in Seismology*. Prague, Czechoslovakia: University of Karlova. 57~120
- Chiu S K, Kanasewich E R, Phadke S, 1986. Three-dimensional determination of structure and velocity by seismic tomography. *Geophysics*, **51**(8): 1 559~1 571
- Gjoystdal H, Ursin B, 1981. Inversion of reflection times in three dimensions. *Geophysics*, **46**(7): 972~983
- Hawley B W, Zandt G, Smith R B, 1981. Simultaneous inversion for hypocenters and lateral velocity variations. *J Geophys Res*, **86**(B8): 7 073~7 086
- Kanasewich E R, Chiu S K, 1985. Least-squares inversion of spatial seismic refraction data. *Bull Seism Soc Amer*, **75**(3): 865~880