

文章编号: 0253-3782(2001)06-0637-08

水平场转换函数空间分布 特征的数值模拟^{*}

龚绍京 陈化然

(中国天津 300201 天津市地震局)

摘要 应用三维有限差分法, 对长方形导体的水平场转换函数分布特征进行数值模拟计算, 给出了实部和虚部的分布规律, 并研究了源场周期、导体导电率、导体埋深、导体长度对转换函数取值的影响。转换函数的极值分布在导体中央、4个犄角和边界附近, 且随边界而移动。表明边界附近是转换函数的最佳观测位置。

关键词 数值模拟 三维有限差分法 水平场转换函数 空间分布

中图分类号: P318.1 **文献标识码:** A

引言

对地学领域电磁感应问题的数学研究, 有两大类方法: 解析方法(如积分方程法); 数值模拟方法(如有限差分法和有限元方法)。解析方法只适于很简单形状的导体, 如圆球、圆柱等。随着计算机的普及和计算速度的提高, 数值模拟方法用得越来越多。数值模拟方法的好处是导体和围岩的条件可以较复杂。

在我国地磁界, 用三维有限差分法和二维有限元法已做过一些研究(祁贵仲等, 1981; 陈伯舫, 1985; 徐世浙, 赵生凯, 1985)。例如, 研究长方形导体 ΔZ 的空间分布特征(祁贵仲等, 1981)、研究感应矢量的分布特征(高文, 1989; 范国华等, 1992)、以及研究不同源场极化对感应磁场振幅和振幅比分布特征的影响, 即所谓“源场效应”(陈伯舫, 冯戬云, 1988)。

在地磁学中, 转换函数反映地下电性结构的特性。它是复频率域内的概念, 包括单台垂直场转换函数 A 和 B , 以及由垂直场转换函数算出的感应矢量(或帕金森矢量)和水平场台际转换函数 C, G, E, F 。

由此看出, 前述的工作只着重研究感应磁场的振幅或垂直场转换函数的分布特征。我们在对水平地磁台际转换函数的研究中, 发现唐山和花莲地震前水平场转换函数的变化比垂直场显著。为了探讨水平场转换函数异常变化的物理机理, 本文试图通过数值模拟计算, 研究地震感应磁效应造成的水平场转换函数在地面的分布规律。

有限差分法与有限元法相比较, 有限元法更适于研究复杂域的情况。有限差分法的网

* 地震科学联合基金重点课题“地震短临前兆可靠性及物理判据研究”的子课题资助项目。
2000-12-06 收到初稿, 2001-08-31 收到最后修改稿并决定采用。

格只能是矩形体，而有限元法的每个单元可以是任意形状的六面体或曲面六面体。但由于三维有限元法的计算量大、繁琐。故本文采用有限差分法，先从简单的模型做起。

1 三维有限差分法

为了进行数值解法，首先要把问题离散化，把无穷多自由度的问题简化为有限多个自由度的问题，也就是把微分方程化为一组代数方程，然后进行计算。最简单的离散化方法是差分法，即布上格网，把微分方程和边界条件中的微商代以差商而得到差分方程。

在三维问题中有两种途径求解电磁感应的有关方程组：一种是求解电场的方法；另一种是求解磁场的方法。也有人称前者为 **E** 极化方法，后者为 **B** 极化法。**B** 极化是指源场 **B** 是水平线性极化的，极化方向平行于 x 或 y 轴。本文采用 **B** 极化方法，有关方程及原理见陈伯舫(1985)文章。该文放弃使用导电率突变界面模型，而采用导电率渐变模型。三维网格的结构和所用的符号也同该文。

采用电磁单位(e. m. u.)制，忽略位移电流。麦克斯韦方程组经过一些变换后得到

$$\nabla^2 \mathbf{B} + \frac{1}{\sigma} (\nabla \sigma) \times (\nabla \times \mathbf{B}) = i4\pi\omega\mathbf{B} \quad (1)$$

$\nabla \sigma$ 是导电率梯度，在直角坐标系中，式(1)可写成 3 个标量方程式

$$\begin{aligned} \nabla^2 B_x + \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial y} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial \sigma}{\partial z} \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) \right] &= i4\pi\omega B_x \\ \nabla^2 B_y + \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial z} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial \sigma}{\partial x} \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \right] &= i4\pi\omega B_y \\ \nabla^2 B_z + \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial \sigma}{\partial y} \left(\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) \right] &= i4\pi\omega B_z \end{aligned} \quad (2)$$

E, **B** 分别为电场和磁场，时间变化因子为 $e^{i\omega t}$ 。 B_x , B_y , B_z 是地磁场的北向、东向和垂直分量。

在转换成差分方程时，取节点(l, m, n)处的磁场偏微商为前向偏微商与后向偏微商的加权平均。节点(l, m, n)处的二阶微商则取前、后向微商的变化率。

由于采用导电率渐变模型，节点(l, m, n)处的导电率 $\sigma_{l, m, n}$ 为相邻 8 个区的 σ 的加权平均值。如果导体的导电率是均匀且各向同性的，则在导体内各节点上的导电率在加权平均后仍为 σ ；但在导体与围岩的界面上，各节点的导电率则是渐变的。 $\partial\sigma/\partial x$ 为在 y, z 方向上取 σ 的加权平均值后，再在 x 方向上取线性梯度。

设空气的导电率为 0。按前述的加权平均做法，在空气界面处的所有节点的 $\sigma_{l, m, n}$ 均不等于 0，所以没有发散的问题。如电性参数用电阻率 ρ 而不用电导率 σ ，则因为空气的 ρ 为 ∞ ，使空气界面处的 $\rho_{l, m, n}$ 成为 ∞ ，将无法求解。

外部边界条件的求取是根据如下的原则：当 $x \rightarrow \infty$ 、 $y \rightarrow \infty$ 时，由于已远离异常导体，问题转化为求解水平层状介质的磁场，也可以仅有空气和围岩两层。在实际计算时，半空间不可能无穷扩展，只能要求围岩的尺度 \gg 异常导体的尺度，水平层状介质的磁场即成为围岩的外部边界条件。

差分方程的数值解法是迭代法。其中又以松弛法(也叫 Seidel 法)较简单常用，收敛可比简单迭代法加快约一倍。选择适当的松弛因子 ω^* 可使收敛加快，当 $1 < \omega^* < 2$ 时，属于超松弛的范围，此时又称超松弛法(SOR)。本文的程序即采用这种方法。为了更好地了解

导体边界处的情况, 采用非等间距, 在导体边界附近的步长仅 5 km. 由于计算机速度的提高, 选择迭代 600 次, 一般情形下, 磁场各分量实部、虚部的残差小于 4.0×10^{-6} .

2 转换函数的空间分布特征

2.1 网格设计

设在半无穷大的空间镶嵌一导体, 另一半空间充满空气. 导体表面为 $L \times 50 \text{ km}^2$ 的正方形或长方形. 没有特别指明时, 导体的厚度为 40 km. 在 z 方向上空气厚 150 km, 围岩厚 400 km. 当导体表面为正方形时, 在 $x-y$ 平面上, 边界内有 3 个 5 km 间隔, 边界外有两个 5 km 间隔. 在 $y-z$ 平面上, z 轴上标明“0”的地方为地表. 从地表到 70 km 深处, 网格的间距均为 5 km. 围岩的导电率为 $2 \times 10^{-3} \text{ S/m}$. 导体的导电率一般为围岩的 5~30 倍. 每变更一次长度 L 都要重设计一次网格模型, 设计时注意在边界内外应各有两个 5 km 间距的网格, 以便考察边界处的变化. 为了便于比较, 对不同长度 L 的导体, 围岩的线度是一样的, 都为 $2000 \text{ km} \times 1000 \text{ km} \times 400 \text{ km}$. 导体的长轴平行于 x 轴(北向).

2.2 水平场转换函数分布特征的数值模拟计算

按照转换函数的概念, 转换函数反映线性系统固有的特性, 其特征与输入、输出无关. 在实际问题中由于作了近似处理, 才产生了源场效应问题. 本文引用严格的转换函数的概念, 因而可尽量简化施感场 $\mathbf{B}(B_z, B_x, B_y)$ 以便计算. 对水平线性极化的源场 \mathbf{B} , 将没有垂直分量 B_z . 转换函数的计算公式表达如下:

$$\begin{cases} B_z = A \cdot B_x + B \cdot B_y \\ B_{x_a} = C \cdot B_x + G \cdot B_y \\ B_{y_a} = E \cdot B_x + F \cdot B_y \end{cases} \quad (3)$$

下标 a 代表异常场, 即感应场. 由于源场 \mathbf{B} 不是椭圆极化, B_x 与 B_y 之间不存在相位关系, 可假设 B_x 和 B_y 只有实部而无虚部. 又可假设 \mathbf{B} 平行于 x 轴(北向)或 y 轴(东向), 由感应场和源场计算 A, B, C, G, E, F . 其中, $C = C_u + iC_v$.

2.3 分布立体图

为了进行对比, 本文也画出了 A, B 的分布图. $C_u, C_v, E_u, E_v, A_u, A_v, G_u, G_v, F_u, F_v, B_u, B_v$ 的立体图示如图 1. 图中导体长 $L = 220 \text{ km}$. 带标尺的一端指向北, 另一坐标朝东. C_u 有两个极大和两个极小沿 x 方向中轴线分布于导体的边界附近, 极大在边界内 10 km 处, 极小在边界外 20 km 处. C_v 在 x 方向上有 3 个极小, 分别位于边界外 10 km 和导体中央, 而且导体中央的负极值的绝对值较大. E_u 和 E_v 有两个极大和两个极小, 分别位于导体的 4 个犄角. A_u, A_v 沿 x 方向有一个极大、一个极小, 分别在中轴线与边界的交汇处. F_u 沿东西方向的中轴线有一个极大、两个极小. 极大在导体中央, 极小在边界外 50 km. 由于导体拉长, 极值的峰较宽. F_v 只有一个极小, 位于导体中央, 其凹陷的形状也随导体呈长形. G_u, G_v 在 4 个犄角附近有两个极大和两个极小, 其位置沿南北方向的边界往内 5 km. B_u 沿东西方向有一个极小、一个极大, 分别位于东西向中轴线与两侧边界的交汇处. B_v 的情况较复杂, 沿东西方向有 3 个极大、3 个极小. 在东西向中轴线上边界外 50 km 处有一个极大、一个极小. 在东西两侧边界上, 往内距南北边界 30 km 处有两个极小、两个极大. 左侧为一个极大、两个极小; 右侧是两个极大、一个极小. 由图 1 也可大体看出

各转换函数的相对大小.

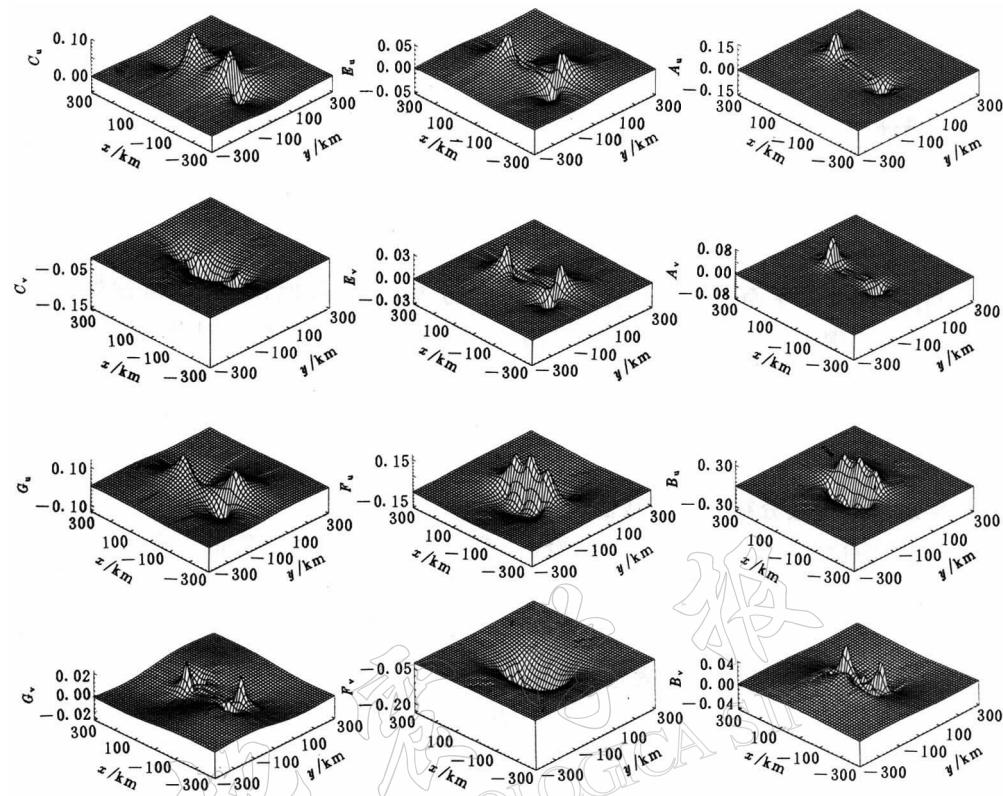


图 1 转换函数的空间分布立体图($f=0.0083\text{ Hz}$, $d=0$, $S_a=25.0$)

2.4 剖面图

图 2 是 C, E, A, G, F, B 的剖面图. 图中绘出了导体长度 $L=50\text{ km}$ (实线)和 $L=220\text{ km}$ (虚线)时的结果, 以考察空间分布特征随导体长度的变化. 上边 6 个图的剖面是南北方向, 下边 6 个图的剖面为东西方向. 剖面通过极值点, 一般是中轴线或边界线. 例如 $C_u, C_v, A_u, A_v, F_u, F_v, B_u, B_v$ 的剖面通过导体中央; E_u, E_v, G_u, G_v 的剖面通过犄角. 可看出, 极值点的位置随导体边界而移动. 由于导体的拉长, 极值的大小发生了变化, 以 C_v, F_u, F_v 最明显. 当导体拉长时, C_u 的极大由一个峰分裂成两个峰. 同时 G_u, G_v, B_u, B_v 极值的变化也明显. 由剖面图可以更清晰地看出转换函数空间分布特征随导体长度的变化.

3 导体埋深、导电率比例和频率对转换函数分布特征的影响

设源场 \mathbf{B} 平行于 x 轴, 导体尺寸为 $50\text{ km} \times 50\text{ km} \times 40\text{ km}$. 围岩线度为 $600\text{ km} \times 600\text{ km} \times 400\text{ km}$. 为了计算埋深对转换函数取值的影响, 在地面与空气以及围岩与导体顶部的分界处各设两个 0.5 km 的间隔. 由于对称性, 可根据地表实际记录的磁场, 算出所有的转换函数 C, E, A, F, B . 本节拟研究周期 T 、导体与围岩的导电率比例 S_a 、导体埋深 d 对转换函数极值的影响. 3 个因素分别对 C 和 F 、 E 和 G 、 A 和 B 的影响是相同的. 图 3 给出了转换函数各参量的极值随 d, S_a, T 的变化. 图中, 实线代表实部, 虚线代表虚部.

3.1 导体埋深对结果的影响

埋深 d 是指从地面到导体顶部的深度。研究转换函数极值与埋深 d 的关系时, 导体的尺寸不变, 埋深每改变一次, 导体的位置下移 $0.5\sim 5\text{ km}$ 。图 3 a 中给出当 $T=2\text{ min}$ 、 $S_a=25.0$ 时转换函数极值随 d 的变化。由图看出, 转换函数极值的绝对值都随埋深增加而减小。衰减的规律有的接近于指数衰减, 例如 G , E , A , B 的实部和虚部。 C , F 只是在导体接近地面时有一个转折, 当 $d=10\sim 30\text{ km}$ 时变化接近于线性。

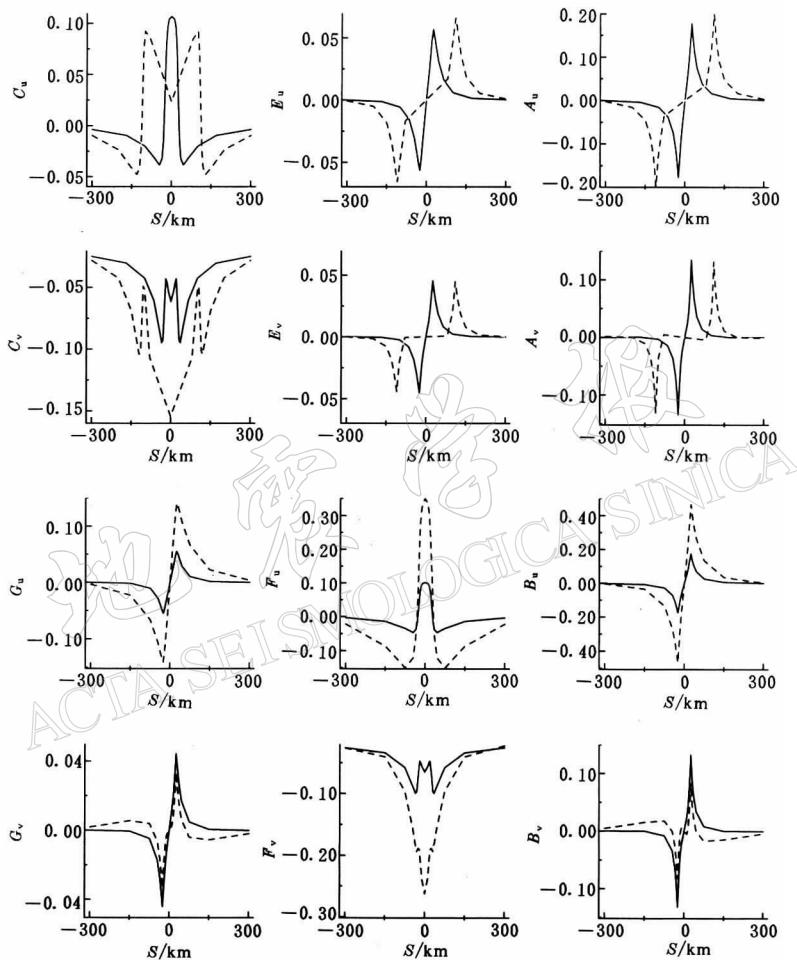


图 2 转换函数分布剖面图($f=0.0083\text{ Hz}$, $d=0$, $S_a=25.0$)

3.2 导体与围岩导电率比例对结果的影响

由图 3 看出, 转换函数各参量的绝对值皆随 S_a 加大而加大, 只是 S_a 小时上升较快。对于 C_v 和 F_v , 随着 S_a 的变化, 极小值的位置会有小的变动, 此处绘的是极值的变化。

3.3 转换函数随周期的变化

各种转换函数随周期变化的规律相近, 如图 3c。可以看出, 当周期小于 5 min 时, 转换函数随周期的衰减较快; 周期大于 15 min 时, 曲线变化很慢。在我们所取的坐标里, 变化微小到看不出来。衰减遵从与周期的平方根成反比的规律。

4 讨论与结论

进行数值模拟计算的目的是要弄清楚实践中转换函数表现的时、空、强特征的机理。转换函数只反映系统(电性结构)固有的特性,与输入(源场)和输出无关。因而转换函数的分布特征只与电性结构模型有关。本文的目标是用简单的电性结构模型寻求一般性的规律,

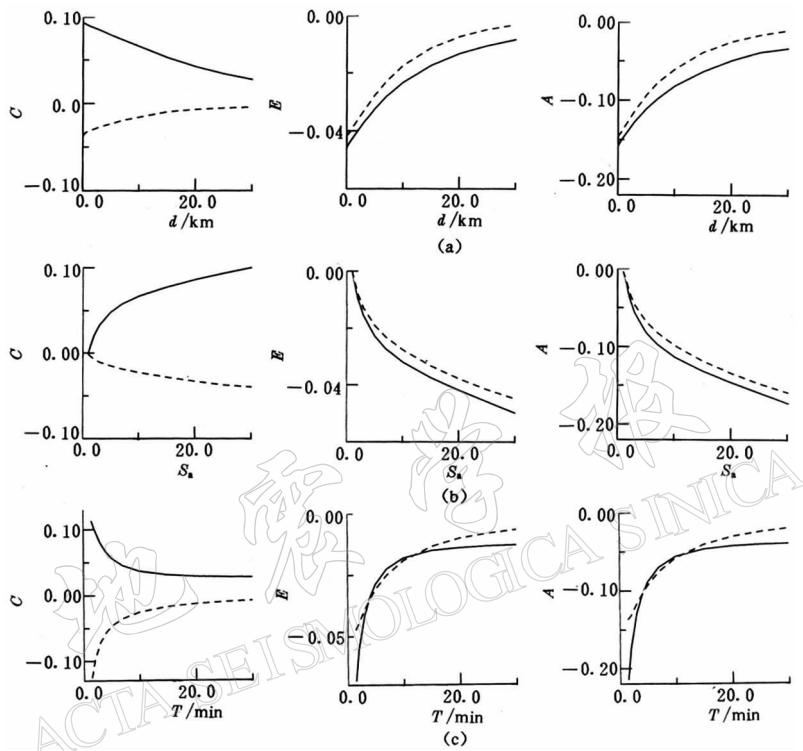


图 3 转换函数极值随埋深 d 、导电率比值 S_a 和周期 T 的变化

(a) 随埋深 d 的变化 ($S_a=25.0$, $f=0.0167\text{ Hz}$); (b) 随导电率比值 S_a 的变化 ($f=0.0083\text{ Hz}$, $d=0$); (c) 随周期 T 的变化 ($S_a=25.0$, $d=0$)

而非针对某次地震进行研究。任一次地震的实际情形显然都较为复杂。地震的孕育使震源区的岩石产生新的裂隙,新裂隙的扩展、贯通,使地下水渗入源区,从而使导电率增加。孕震区的导电率增加,显然需用三维复杂模型。例如,导体的形状可能不规则,并且有一定的倾角、偏角,导体和围岩可能是各向异性的。不过简单模型的计算已经初步发现了一些规律:

- 1) 转换函数极值点分布在 3 个位置: 导体中央; 4 个犄角或附近; 沿中轴线分布在边界或边界附近。而且极值点的位置随着边界变动而移动。
- 2) 对南北向拉长的长方形导体,转换函数 C , E , A 的分布中轴线为南北方向; G , F , B 的中轴线是东西方向。各参量极值的位置大体示意于图 4。
- 3) 当导体加长时, C_u 会出现极值分裂成两个峰的现象。随着导体加长, 极值绝对值明显变大的参量有 C_v , G_u , F_u , F_v , B_u 。略变大的有 E_u , A_u ; E_v , A_v 变化不明显。略变小的

参量是 C_u , G_v ; B_v 明显变小。

4) 周期加大, 所有转换函数的绝对值变小; 导电率增加转换函数的绝对值变大; 埋深减小转换函数的绝对值加大, 当埋深趋近于 0 时, 除 C_u , F_u 外, 变化都加速。

我们是带着两个问题来考虑数值模拟计算的: 为何唐山地震的水平场转换函数短期异常出现在 1976 年 2 月下旬至 3 月上旬, 而且持续时间很短(龚绍京等, 2001)? 哪些因素会使转换函数的取值变大? 为了寻求解答, 首先应探求一般性的规律。所以只进行了较简单模型的计算, 工作只是初步的。唐山地震余震区是北东向的长条形状, 其深度分布呈长椭圆状, 具有东北浅、西南深的特点(吴开统, 1990)。因此, 转换函数的空间分布特征和强度会与图 1 的结果有一些差别。今后还应开展更接近实际情况的研究。本文初步得出以下规律: ① 由于观测站很难正好在导体中央, 所以边界附近(包括 4 个犄角)是转换函数的最佳观测位置; ② 在不同的位置, 会有不同的转换函数参量表现出明显的异常; ③ 在边界的极值点附近, 转换函数值一般衰减很快, 随着孕震——膨胀区的扩展或收缩, 突出的异常可能持续时间不长; ④ 导体拉长会使某些转换函数取值变大很多; ⑤ C_v , F_v 只有负极值, 这与实际情况吻合。

水平场转换函数异常的机理涉及许多方面的问题。例如, 地下水的作用和扩渗过程; 地震孕育过程中地热的作用; 应力和导电率可以变化多大量级; 以及应力和导电率变化的地区范围等等。这些均需进行专门的、深入地研究。然而, 就地震感应磁效应的数值研究而言, 本文对水平场转换函数各参量的分布特征做的系统计算是有意义的。边界附近是最佳观测位置, 而昌黎台正好处在唐山地震余震区的边缘附近(龚绍京等, 1986), 正是最佳观测位置, 这是昌黎台能很好反映出水平场转换函数异常的根本原因。我们认为, 本文的分布规律可以帮助考虑重点监视区台站的布局。可以设定台站间距为强震的孕震——膨胀区尺度的 1.0~1.5 倍。这一特点也有助于帮助我们判断未来地震的大体位置。当我们把这些规律应用于扩容——膨胀或地震孕育的动态过程时, 也似乎找到了唐山地震前水平场转换函数的突出异常出现在 1976 年 2~3 月, 而且持续期很短的可能解释。正如图 2 所示, 只有当台站处于导体边缘时, 异常值才最大, 当膨胀区超越台站或收缩时, 异常都会很快减小。同时, 不同参量的极值位置不同也告诉我们, 为了捕捉到感应磁效应的异常, 应尽量利用转换函数的各种参量。至于由地面的观测资料去反演地下电性结构, 进而研究震源

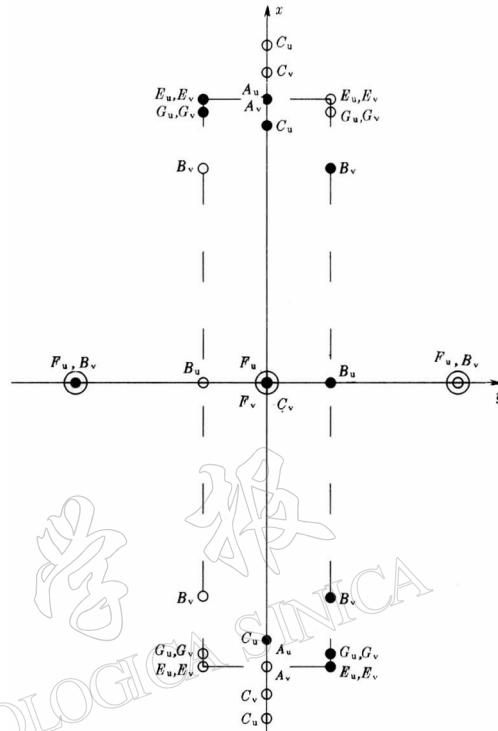


图 4 转换函数极值点位置示意图

(● 极大; ○ 极小)

原点处的实心圆代表 F_u ; 外空心圆代表 F_v , C_v . y 轴上的外空心圆代表 F_u , 内实心和空心圆代表 B_v

过程并预报地震，则需要很多资料并对复杂模型进行深入研究。

感谢陈伯舫、钱家栋和范国华教授提供的支持和帮助。

参 考 文 献

- 陈伯舫. 1985. 三维模型电磁感应的数值解法[J]. 地球物理学报, **28**(3): 268~281
 陈伯舫, 冯戬云. 1988. 转换函数和磁场振幅比的水平源场效应的数值计算研究[J]. 地震学报, **10**(2): 192~205
 范国华, 顾左文, 姚同起, 等. 1992. 云南地磁短周期变化异常及地下导电率结构[J]. 地震学报, **14**(2): 202~210
 高文. 1989. 三维大地电磁感应参量研究[J]. 地震学报, **11**(4): 373~380
 龚绍京, 田真丽, 戚成柱, 等. 2001. 地磁水平场转换函数的短期前兆[J]. 地震学报, **23**(3): 280~288
 龚绍京, 吴占峰. 1986. 唐山地震可能伴随的地电导率变化[J]. 地震学报, **8**(1): 28~35
 祁贵仲, 詹志佳, 侯作中, 等. 1981. 渤海地区地磁短周期变化异常、上地幔高导层的分布及其与唐山地震的关系[J].
 中国科学, (7): 869~879
 吴开统编著. 1990. 地震序列概论[M]. 北京: 北京大学出版社, 149
 徐世浙, 赵生凯. 1985. 二维各向异性地电断面大地电磁场的有限元法解法[J]. 地震学报, **7**(1): 80~89

NUMERICAL MODELING FOR THE SPATIAL DISTRIBUTION CHARACTERISTICS OF HORIZONTAL FIELD TRANSFER FUNCTION

Chen Huaran Gong Shaojing

(Seismological Bureau of Tianjin, Tianjin 300201, China)

Abstract: Applying 3-dimension finite difference method, the distribution characteristics of horizontal field transfer functions for rectangular conductor have been computed, and the law of distribution for Re-part and Im-part has been given. The influences of source field period, the conductivity, the buried depth and the length of the conductor on the transfer functions were studied. The extrema of transfer functions appear at the center, the four corners and around the edges of the conductor, and move with the edges. This feature demonstrates that around the edges are the best places for transfer functions to be observed.

Key words: numerical modeling ; 3-D finite difference method; horizontal field transfer function; spatial distribution