

文章编号: 0253-3782(2003)04-0398-08

# 时程信号的 Hilbert-Huang 变换与小波分析<sup>\*</sup>

石春香 罗奇峰

(中国上海 200092 同济大学结构工程与防灾研究所)

**摘要** 在简要介绍时程信号的小波分析和 Hilbert-Huang 变换(HHT)理论的基础上, 通过地震波和其它时程信号实例, 对比分析了小波变换和 HHT 变换结果。比较显示: HHT 变换和小波变换均能用于对非平稳的信号进行分析, 并能捕捉到信号变化的主要特征; 与受所选母波影响较大的小波分析不同, HHT 变换得到的固有模态函数是直接从原始时程数据中分离出来的, 它更能反映原始数据的固有特性; 小波分析得到的谱的能量在频率范围内分布较广, 而 HHT 变换的 Hilbert 谱的大部分能量都集中在一定的时间和频率范围内, 能清晰地刻画信号能量随时间、频率的分布。因此, Hilbert-Huang 变换不仅是对非平稳信号进行分析的有效方法, 而且也是检测时程信号局部特征的有用工具。

**关键词** Hilbert-Huang 变换 小波分析 母波 固有模态函数 谱分析

**中图分类号:** P315.63    **文献标识码:** A

## 引言

小波分析是一种时-频分析方法。传统的信号分析是建立在傅立叶变换基础之上的, 由于傅立叶变换使用的是一种全局变换, 要么完全在时域, 要么完全在频域, 因此无法同时表述信号的时-频分布特性, 而时频特性对非平稳信号来说是非常重要的。为了分析和处理非平稳信号, 人们对傅立叶分析进行了改进, 提出并发展了一系列新的信号分析理论, 其中之一是小波分析方法。

小波分析是一种信号的时间-尺度或时间-频率的分析方法, 即在时域对信号进行离散变换, 在频域进行谱分析的方法。它具有高分辨率的特点, 而且在时、频两域都具有表征信号局部特征的能力。它在低频部分具有较高的频率分辨率和较低的时间分辨率, 在高频部分具有较高的时间分辨率和较低的频率分辨率, 很适合于探测正常信号中夹带的瞬态反常现象, 所以被誉为分析信号的显微镜和望远镜。但是, 小波分析中所用到的小波函数是不唯一的, 即小波函数具有多样性。小波分析在工程应用中的一个重要问题就是小波基(母波)的选择, 这是因为用不同的小波基分析同一个问题会产生不同的结果。目前主要用小波分析的结果与理论结果相比较的误差来判定小波基的好坏, 并由此选定小波基(胡昌华等, 1999; 朱继梅, 1996a,b)。因此, 小波分析的结果受到所选小波基的限制, 通过小波

\* 国家自然科学基金(50178055)资助项目。

2002-05-30 收到初稿, 2002-10-28 收到修改稿, 2002-12-09 决定采用。

分析得到的小波分量和小波谱只相对于所选择的小波基有意义。尽管小波分析存在上述的问题，但它仍是非平稳数据分析的有效方法。

Hilbert-Huang 变化(以下称为 HHT 变化)(Huang *et al.*, 1998)也是一种适合对非平稳信号进行分析的有效工具。HHT 变换能有效地将地震波的各种频率成分以固有模态函数的形式，从时程曲线中分离出来；HHT 变换中的 Hilbert 谱(胡广书, 1997)是包含时间、频率、振幅的三维谱，它能用来分析地震波的能量随时间、瞬时频率的分布。我们曾对比分析过 HHT 变换与傅立叶变换，并就在 Huang 变换中出现的端点飞翼问题及其解决方法进行了研究(罗奇峰, 石春香, 2003)。本文将以小波分析作为参照，讨论 HHT 变换的适用性及其对非平稳信号进行分析的能力。

## 1 小波分析

### 1.1 小波函数

在小波分析中为进行可调的加窗分析，所取基函数需要具有可伸缩的特性。因此，小波变换的基函数，可选用如下形式(朱继梅, 1996)：

$$W_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} W\left(\frac{t-\tau}{s}\right) \quad s > 0 \quad (1)$$

其中， $s, \tau$  是两个可变动的参数。变动  $s$  和  $\tau$  可以衍生出不同的小波函数。变动  $s$  可使函数的波形沿时间轴伸展或压缩。同时，如  $W(t)$  对应的频谱为  $\Psi(\omega)$ ，则  $W(t/s)$  对应的频谱将为  $\Psi(s\omega)$ ，这是因为

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(t/s) e^{-i\omega t} dt = \frac{s}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(t/s) e^{-is\omega(t/s)} d(t/s) = s \cdot \Psi(s\omega) \quad (2)$$

所以，改变  $s$  也同时改变了分析的频段，变动  $\tau$  则使函数的波形沿时间轴移位。

在众多小波函数的家族中，有些小波函数被实践证明是非常有用的。我们可以通过 MATLAB 中的小波分析工具箱中的 waveinfo 了解这些小波函数的主要性质，其中常用到的小波函数有 Haar 小波、Daubechies(简称 dbN)小波系、Biorthogonal(简称 biorNr.Nd)小波系、Coiflet(简称 coifN)小波系、SymletsA(简称 symN)小波系、Morlet(简称 morl)小波、Mexican Hat(简称 mexh)小波、Meyer 函数和 Battle-Lemarie 小波等。

### 1.2 小波变换

变动参数  $\tau$  和  $s$  可以衍生出一族小波函数， $s$  的变动使函数沿时间轴伸缩，形成不同“级”的小波； $\tau$  的变动使函数沿时间轴移位，形成不同“位”的小波。使用小波函数对信号  $f(t)$  作小波变换的表达式为

$$a(s, \tau) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) W_{s,\tau}^*(t) dt \quad (3)$$

其中， $W_{s,\tau}^*$  为小波函数  $W_{s,\tau}(t)$  的共轭函数，式(3)的逆变换为

$$f(t) = \frac{1}{C_\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(s, \tau) W_{s,\tau}(t) \frac{ds d\tau}{s^2} \quad (4)$$

其中， $C_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega$ ， $f(t)$  为  $a(s, \tau)$  逆变换或信息重构。

图 1 为一条原始的地震记录。信号可以被分解成一系列小波分量，如图 2a~d 所示。它们分别对应 Daubechies 家族中的 db1 母波、db3 母波和 db10 母波以及 Symmlet 家族中

的 sym4 母波(胡昌华等, 1999). 从图 2 中可见, 小波分量( $d_8$ )对应不同的母波就有不同的波形, 分解结果强烈地依赖所选择的母波, 这种在波形上对母波的依赖使得小波分量的使用受到限制. 各图中的  $a_8 \sim d_8$  表示小波分量,  $a_8$  表示低频分量,  $d_1 \sim d_8$  表示高频分量,  $s$  表示所有小波分量( $a_8 \sim d_8$ )的重构.

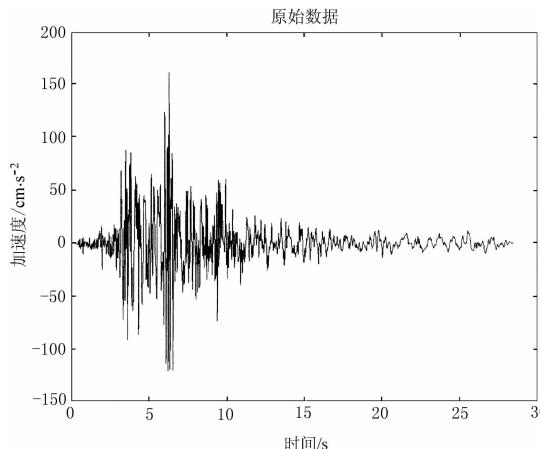


图 1 一条原始的地震记录

值点; 其次, 用 3 次样条函数曲线顺序连接所有的最大值, 得到曲线  $X(t)$  的上包络线; 采用同样的方法顺序连接所有的最小值, 得到曲线  $X(t)$  的下包络线; 顺序连接上、下包络线的均值可得一条均值线  $m_1(t)$ . 于是, 可从下式计算得到  $h_1(t)$

$$h_1(t) = X(t) - m_1(t) \quad (5)$$

如果  $h_1(t)$  满足固有模态函数所需的条件, 则  $h_1(t)$  即为第一阶固有模态函数. 一般地说, 它并不满足条件, 此时, 将  $h_1(t)$  看成新的时间曲线, 重复上述方法, 可得

$$h_{11}(t) = h_1(t) - m_{11}(t) \quad (6)$$

式中,  $m_{11}(t)$  是  $h_1(t)$  的上、下包络线; 按上述方法重复  $k$  次, 直到  $h_{1k}(t)$  满足固有模态函数的条件为止.  $h_{1k}(t)$  由下式计算:

$$h_{1k}(t) = h_{1(k-1)}(t) - m_{1(k-1)}(t) \quad (7)$$

式中,  $h_{1k}(t)$  即为第一阶固有模态函数, 记作  $c_1(t)$ .

$$c_1(t) = h_{1k}(t) \quad (8)$$

第一阶固有模态函数  $c_1(t)$  包含着时程  $X(t)$  的频率最高的成分. 从  $X(t)$  中减去高频成分  $c_1(t)$ , 得到频率较低的残差  $r_1(t)$ .

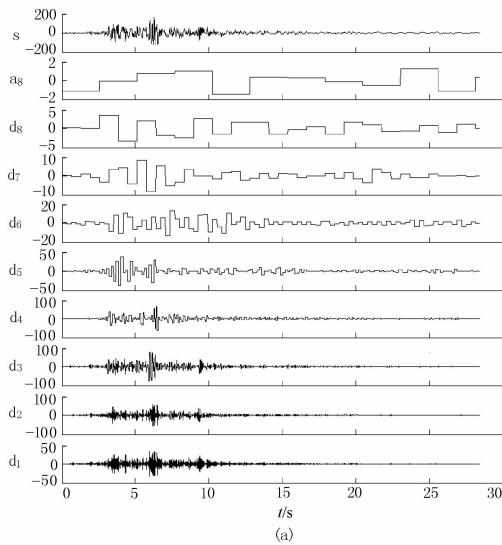
$$r_1(t) = X(t) - c_1(t) \quad (9)$$

将  $r_1(t)$  看成一组新的数据, 重复上述经验振型分离过程. 经过多次运算可以按下式得到所有的  $r_j(t)$ :

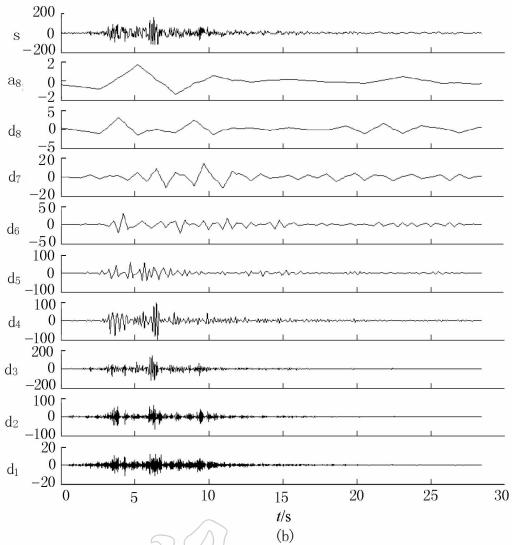
$$r_{j-1}(t) - c_j(t) = r_j(t) \quad j = 2, 3, \dots, n \quad (10)$$

当满足以下两个条件之一时, 整个振型分离过程可以终止. 这两个条件是: ①  $c_n(t)$  或  $r_n(t)$  小于预定的误差; ② 残差  $r_n(t)$  成为一单调函数, 此时不可能再从中提取固有模态函数. 最后, 时程曲线  $X(t)$  可以按下式表示成  $n$  阶固有模态函数和第  $n$  阶残差  $r_n(t)$  之和:

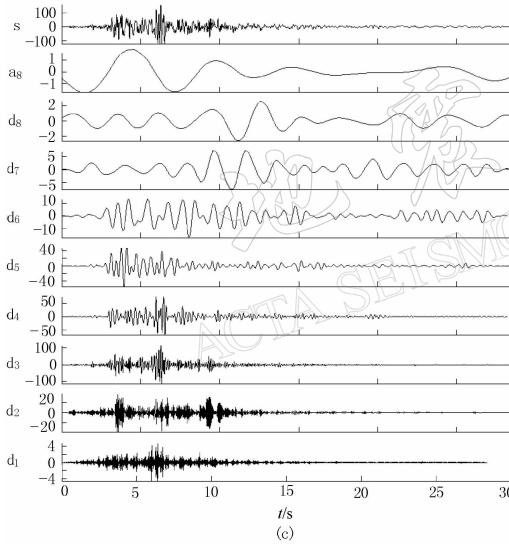
$$X(t) = \sum_{j=1}^n c_j(t) + r_n(t) \quad (11)$$



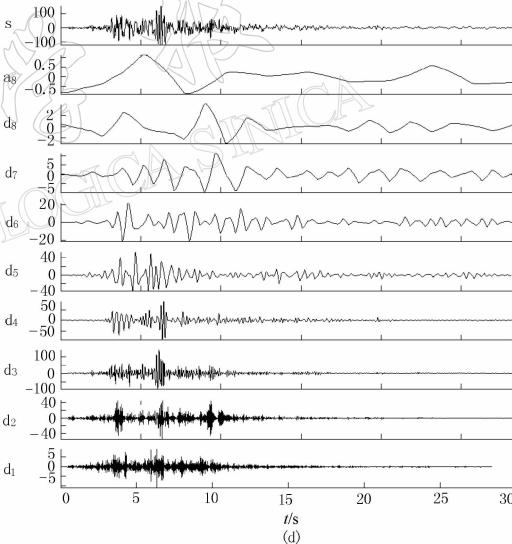
(a)



(b)



(c)



(d)

图 2 基于 db1(a)、db3(b)、db10(c) 和 sym4(d) 小波的小波分解

图 3 为对图 1 所示的地震记录做 Huang 变换后得到的各阶固有模态函数。如图所示，每一阶分量都是具有不同振幅和频率的振动模态。第一阶模态函数的频率最高，随着模态阶数的增加其所含的周期变长，直到第九阶逼近一条线性的时间函数。与小波分量比较，由 Huang 变换得到的固有模态函数含有低频分量，这有利于对低频振动信号的分析，而且能够很好地应用 Hilbert 谱分析，以得到瞬时频率(胡广书, 1997)。由 Huang 变换得到各阶固有模态函数后的信息重构和信息重构后带来的误差，以及分量正交性将另文讨论。

## 2.2 Hilbert 谱分析

对给定的连续时程曲线  $X(t)$ ，其 Hilbert 变换定义为(胡广书, 1997)

$$Y(t) = \frac{1}{\pi} \int \frac{X(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (12)$$

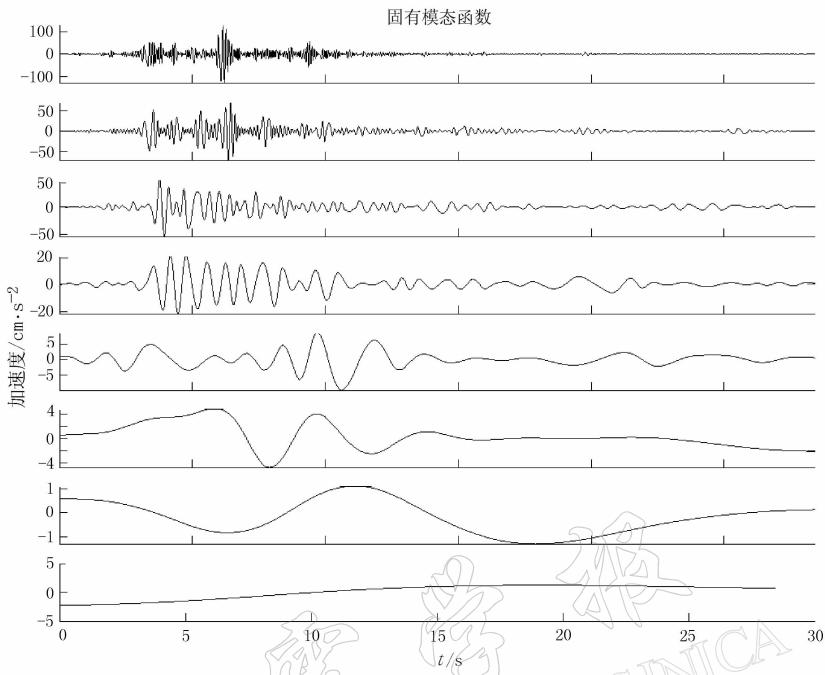


图 3 原始地震记录的 Huang 变换

则有

$$Z(t) = X(t) + iY(t) \quad (13)$$

$Z(t)$  称为  $X(t)$  的解析信号,  $Z(t)$  可写为

$$Z(t) = a(t) e^{i\theta(t)} \quad (14)$$

其中

$$a(t) = \sqrt{X^2(t) + Y^2(t)} \quad (15)$$

$$\theta(t) = \arctan \frac{Y(t)}{X(t)} \quad (16)$$

按式(14)的极坐标表达式, 瞬时频率可定义为

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (17)$$

可见, 瞬时频率  $\omega(t)$  也是时间的函数. 对  $X(t)$  的  $n$  阶固有模态函数  $c(t)$  进行 Hilbert 变换, 则  $H(t)$  为

$$H(t) = \sum_{j=1}^n a_j(t) \exp \left( i \int \omega_j(t) dt \right) \quad (18)$$

其中,  $a_j(t)$  是第  $j$  阶固有模态函数  $c_j(t)$  的解析信号的幅值. 对照式(11)可看出, 这里省略了第  $n$  阶残差  $r_n(t)$ , 这是因为  $r_n(t)$  是单调函数或常数的缘故.

### 3 小波谱与 Hilbert 谱的实例分析比较

本文通过两个典型的实例来比较信号的小波谱与 Hilbert 谱分析方法, 以此说明 Hilbert 谱分析的特性。在小波分析的实际应用中最常用到的是 Morlet 小波, 它定义为  $x(t) = \exp(-t^2/2)\cos(5t)$ , 如图 4 所示。下面就用 Morlet 小波作为基函数进行小波谱分析。

图 5a 是把双正弦信号作为地震波记录中的一个低频脉冲的例子, 其相应的 Morlet 谱和 Hilbert 谱见图 5b 和 c。如图所示, 正弦脉冲信号的 Hilbert 谱的大部分能量都集中在一定的时间和频率范围内, 而 Morlet 谱的能量在频率范围内分布广泛。很明显, 它受到母波的影响。

Ma(2001)对水波做过 Hilbert 谱与小波谱的对比分析。本文取一条由两条时程曲线组成的波, 如图 6a 所示。其表达式为  $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ , 其中,  $y_1(t) = \sin[2\pi t + 0.5 \sin(2\pi t)]\exp(-0.2t)$ ,  $y_2(t) = 0.05 \cos(40\pi t)$ , 其相应的 Hilbert 谱和 Morlet 谱见图 6b 和 c 所示。从图中可见, 信号的 Hilbert 谱清楚地反映了能量随时间和频率的分布, 真实地反映了波的能量由大约 1 Hz 的频率振动和 20 Hz 的干扰振动组成, 而 Morlet 谱则较难反映这种特性。

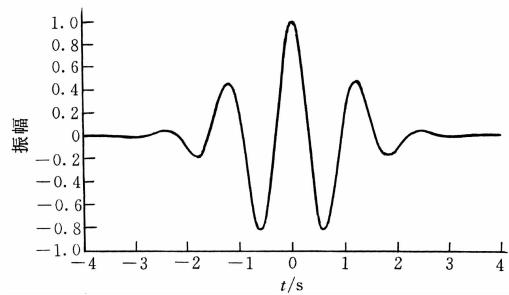


图 4 Morlet 小波

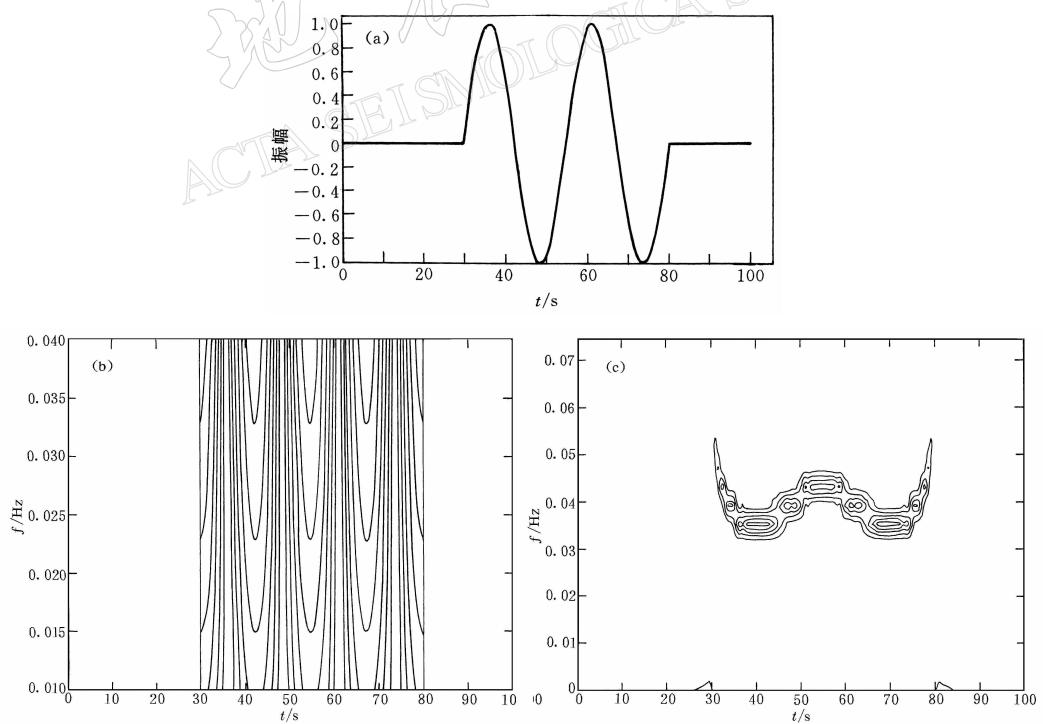


图 5 双正弦信号(a)、Morlet 谱(b) 和 Hilbert 谱(c)

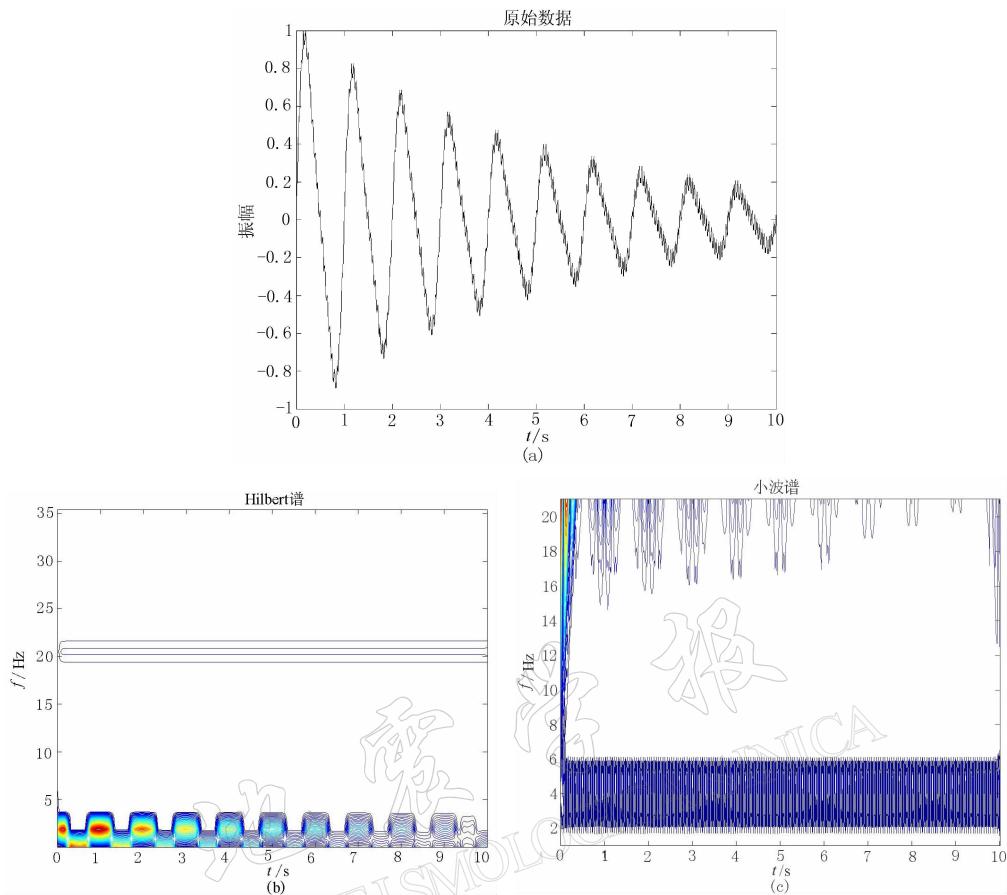


图 6 一条波形记录(a)、Hilbert 谱(b)和 Morlet 谱(c)

## 4 结论

通过对地震记录进行小波分解和 Huang 变换，以及对两个时程信号实例的小波谱与 Hilbert 谱分析的比较，我们可以得出如下结论：

1) 由 Huang 变换得到的固有模态函数是直接从原始时程数据中分离出来的，而从小波分解得到的分量是相对于小波基(母波)进行的，它们强烈地受到所选母波的影响。所以，固有模态函数更能够反映原始时程数据固有的物理特性。

2) HHT 变换和小波变换都能用于对非平稳的信号进行分析，都能捕捉到信号变化的主要特征。

3) HHT 变换的 Hilbert 谱能清晰地刻画信号能量随时间、频率的分布。

4) Hilbert 谱的大部分能量都集中在一定的时间和频率范围内，而 Morlet 谱的能量在频率范围内分布较广，这是由于 Morlet 小波引起能量的泄漏造成的。

本研究只是对时程信号的 HHT 变换与小波分析进行了简单的对比。有关其在结构地震的反映与地震波频谱分析中的应用，尚有待深入研究。

美国科罗拉多矿业大学张瑞冲博士、马硕硕士提供了宝贵的资料与帮助，在此表示衷

心地感谢.

## 参 考 文 献

- 胡昌华, 张军波, 夏军, 等. 1999. 基于 MATLAB 的系统分析与设计——小波分析[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1~17, 157~168
- 胡广书. 1997. 数字信号处理——理论、算法与实现[M]. 北京: 清华大学出版社, 120
- 罗奇峰, 石春香. 2003. HHT 变换理论及其计算分析中存在的问题[J]. 同济大学学报(待刊)
- 朱继梅. 1996a. 小波变换及其工程应用[J]. 振动与冲击, 15(2): 94~100
- 朱继梅. 1996b. 小波变换及其工程应用[J]. 振动与冲击, 15(3): 85~91, 94~101
- Huang N E, Shen Z, Long S R, et al. 1998. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis[J]. Proc R Soc London, 454: 903~995
- Ma Shuo. 2001. *HHT Analysis of Near-Field Seismic Ground Motions*[D]. The Colorado School of Mines. A Thesis for Degree of Master of Science, 19~40

# HILBERT-HUANG TRANSFORM AND WAVELET ANALYSIS OF TIME HISTORY SIGNAL

Shi Chunxiang Luo Qifeng

(Research Institute of Structural Engineering and Disaster Reduction, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** After introducing the brief theories of wavelet analysis and Hibert-Huang Transform (HHT), several signal data were analyzed by using HHT and wavelet analysis methods. From the comparison of the two kinds results, we can get conclusions as following: Both HHT and wavelet transform can be used to analyze non-stationary signal and grasp main characteristics of signal. In HHT the intrinsic mode function (IMF) is directly decomposed from original data, while wavelet components are decomposed according to mother wavelet, which are influenced strongly by the selected mother wavelet. So that IMF can reflect the intrinsic physical characteristics of original data more efficiently. Hilbert spectrum can clearly express the energy distribution with time and frequency. Most energy in Hilbert spectrum from HHT is much more concentrated in the definitive range of time and frequency than that in Morlet spectrum from wavelet analysis. Therefore we consider that HHT is not only one efficient method for analyzing non-stationary and non-linear data, but also is a useful tool for examining detail characters of time history signal.

**Key words:** Hilbert-Huang transform; wavelet analysis; mother wavelet; intrinsic mode functions; spectrum analysis