

印兴耀, 刘博, 杨凤英. 2015. 一种基于全局优化的交错网格有限差分法. 地震学报, 37(2): 278–288. doi:10.11939/jass.2015.02.008.

Yin X Y, Liu B, Yang F Y. 2015. A staggered grid finite difference method based on global optimization. *Acta Seismologica Sinica*, 37(2): 278–288. doi:10.11939/jass.2015.02.008.

一种基于全局优化的交错网格有限差分法^{*}

印兴耀 刘 博^{*} 杨凤英

(中国山东青岛 266580 中国石油大学(华东)地球科学与技术学院)

摘要 在地震波场数值模拟中, 交错网格有限差分技术得到了广泛的应用, 但是在弹性模量变化较大时, 通常会因插值而导致模拟误差增大. 旋转交错网格可以很好地克服这个缺点, 因而适合于各向异性介质正演模拟. 但是对于同样大小的网格单元, 旋转交错网格需要的步长比常规交错网格要大, 这会使梯度和散度算子的误差增大因而更易产生空间数值频散. 针对这些问题, 本文提出了旋转交错网格与紧致有限差分相结合的方法, 并基于模拟退火算法进行全局优化, 压制数值频散, 拓宽波数范围. 数值模拟结果表明, 此方法可以有效地压制数值频散, 且具有较高的模拟精度.

关键词 全局优化 旋转交错网格 紧致有限差分 数值频散 正演模拟
doi:10.11939/jass.2015.02.008 中图分类号: P315.3⁺1 文献标志码: A

A staggered grid finite difference method based on global optimization

Yin Xingyao Liu Bo^{*} Yang Fengying

(School of Geoscience, China University of Petroleum, Shandong Qingdao 266580, China)

Abstract: Staggered grid finite difference techniques have been widely used in numerical simulation of seismic wave field, but the interpolation might enlarge the simulation errors when the elastic moduli change dramatically. Rotated staggered grid can overcome this drawback thus be more applicable for modeling the anisotropic media. However, for the grid cells with the same size, rotated staggered grid needs larger step than conventional staggered grid does, consequently, the gradient operator and divergence operator generate larger errors which are more likely to cause spatial numerical dispersion. Aiming at the above problems, a combination of rotated staggered grid and compact finite difference method is proposed, simultaneously, global optimization is preformed based on simulated annealing algorithm to suppress numerical dispersion and to broaden the range of wavenumber. Numerical simulation results show that this method can effectively suppress the numerical dispersion and exhibits high simulation accuracy at the same time.

^{*} 基金项目 国家 973 项目(2013CB228604)和国家科技重大专项(2011ZX05030-004-002)共同资助.

收稿日期 2014-02-26 收到初稿, 2015-02-02 决定采用修改稿.

^{*} 通讯作者 e-mail: upcliubo@foxmail.com

Key words: global optimization; rotated staggered grid; compact finite difference; numerical dispersion; forward modeling

引言

地震波数值模拟是在地震波传播理论的基础上,通过数值计算来模拟地震波在地下介质中的传播(董良国,2003),是研究地震波传播特性与地球介质参数关系的重要手段.交错网格有限差分技术已经广泛应用于各向异性介质(Igel *et al*, 1995; Collino, Tsogka, 2001; 裴正林,王尚旭,2005; 殷文等,2006; 何燕,2008)、孔隙介质(Dai *et al*, 1995; Zeng *et al*, 2001; 孙林洁,2012)、黏弹性介质(白晓寅,2008; 孙成禹等,2010)的波动方程模拟中,但是常规交错网格在模拟非均匀性较强的介质和各向异性介质时需对介质参数进行平均或内插(陈浩等,2006),低阶插值可能会导致精度降低,高阶插值则会导致计算量增大. Gold 等(1997)提出了旋转交错网格有限差分算法, Saenger 等进一步研究了旋转交错网格的稳定性与频散的关系(Saenger *et al*, 2000; Saenger, Bohlen, 2004). 在旋转交错网格中采用沿网格对角线差分的方式,可以避免弹性模量的平均与插值,因而更准确. 随后一些研究人员通过旋转交错网格的完全匹配层(perfectly matched layer, 简称为 PML)边界条件的实现,利用旋转交错网格技术对各向异性介质(李敏,刘洋,2012)和黏弹介质(严红勇,刘洋,2012)等进行了数值模拟. 但由于旋转交错网格中差分是沿对角线进行,步长是同等条件下常规交错网格的 $\sqrt{2}$ 倍(网格是正方形的情况下),若用常规的差分格式会导致离散的梯度算子和散度算子在计算时误差增大,因而容易出现数值频散. 而如果使用高阶有限差分则会因需要更多的网格点而增大计算量与内存. 紧致有限差分是一种隐式差分格式,在同等网格数的条件下,具有比常规差分格式更高的精度以及更低的数值频散,故成为目前关注的热点. Lele(1992)分析了紧致差分格式的分辨率特性;王书强等(2002)对弹性波方程的紧致差分格式及其与中心差分的误差进行了研究;Du 等(2009)基于交错网格紧致有限差分进行了横向各向同性介质的正演模拟;Boersma(2011)利用 6 阶紧致有限差分求解了 Navier-Stokes 方程.

实现有限差分时,差分系数的确定会影响数值模拟的精度. 有限差分系数的求取一般包括泰勒展开和最优化算法两种方法(Liu, 2013). 基于泰勒展开得到的差分系数在波数较小时精度高,但随波数增大其精度会降低;基于最优化算法的差分系数求取方法是在给定精度与差分算子长度的情况下尽可能拓宽波数范围(Holberg, 1987). Shan(2009), Kosloff等(2010), Zhou 和 Zhang(2011)以及 Liu(2013)等对基于最小二乘算法的差分算子优化方法进行了深入研究;Zhang 和 Yao(2012)则基于模拟退火算法对中心差分算子进行了优化.

本文拟结合旋转交错网格与紧致有限差分技术,基于模拟退火全局优化算法对紧致差分算子进行优化,拓宽数值模拟的波数范围,在此基础上进行频散分析,最后通过数值模拟验证该方法的可行性和有效性.

1 旋转交错网格紧致有限差分方法

1.1 一阶速度-应力方程

在弹性波正演模拟中,除了使用二阶方程外,还常常采用一阶速度-应力弹性波方程,

其主要优点是无需对弹性常数进行空间差分(Virieux, 1984). 这里根据运动平衡方程和本构关系给出二维情况下体力为零时各向异性介质的一阶速度-应力方程:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \\ \rho \frac{\partial v_3}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} = c_{11} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + c_{13} \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + c_{15} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right), \\ \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial t} = c_{13} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + c_{33} \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + c_{35} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial t} = c_{15} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + c_{35} \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + c_{55} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \end{cases} \quad (1)$$

式中: v, σ 分别代表速度和应力, 1 表示 x 方向, 3 表示 z 方向; c_{ij} 为介质弹性张量矩阵的元素, 当极端各向异性介质时, 该矩阵有 21 个独立参数; 当二维时, 不考虑 y 分量, 故张量矩阵中与 y 分量有关参数为 0, 只有 5 个独立参数($c_{11}, c_{13} = c_{31}, c_{15} = c_{51}, c_{33}, c_{35} = c_{53}, c_{55}$).

1.2 紧致有限差分

在地震波正演模拟中, 采用常规的中心有限差分往往需要较多的网格点才能比较有效地压制数值频散, 不利于边界的处理(王书强等, 2002). 紧致有限差分是一种隐式差分格式, 只需要较少的网格点即可有效地压制数值频散, 且同等阶次的精度要比常规中心有限差分格式高, 因此本文采用紧致有限差分格式, 弥补旋转交错网格因差分步长大导致梯度和散度算子在计算时误差增大因而更容易产生数值频散的不足.

常规的 $2(M-1)$ 点 $2M$ 阶紧致有限差分格式(Kim, Lee, 1996)为

$$a(F_{i-1} + F_{i+1}) + F_i \approx \frac{1}{\Delta x} \sum_{n=1}^{M-1} b_n \left\{ f\left(x_i + \frac{(2n-1)\Delta x}{2}\right) - f\left(x_i - \frac{(2n-1)\Delta x}{2}\right) \right\}, \quad (2)$$

式中, Δx 为网格的空间步长, a 和 b_n 分别为差分的权系数, 可以通过在第 i 个网格点的泰勒展开, 然后对比对应系数来求解

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & 5 & \cdots & 2M-3 \\ -\frac{3!}{2!} & 0.5^3 & 1.5^3 & 2.5^3 & \cdots & (M-1.5)^3 \\ -\frac{5!}{4!} & 0.5^5 & 1.5^5 & 2.5^5 & \cdots & (M-1.5)^5 \\ -\frac{7!}{6!} & 0.5^7 & 1.5^7 & 2.5^7 & \cdots & (M-1.5)^7 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{(2M-1)!}{(2M-2)!} & 0.5^{2M-1} & 1.5^{2M-1} & 2.5^{2M-1} & \cdots & (M-1.5)^{2M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{(M)} \\ b_1^{(M)} \\ b_2^{(M)} \\ b_3^{(M)} \\ \vdots \\ b_{M-1}^{(M)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

即可得到 $2(M-1)$ 点 $2M$ 阶紧致有限差分格式的差分系数(Liu, Sen, 2009), 例如当 $M=5$ 时, 可以得到 8 点 10 阶的紧致差分格式系数为 $a=0.25789474, b_1=0.88987116, b_2=0.21612116, b_3=-0.0047012, b_4=0.00015155$.

1.3 旋转交错网格及完全匹配层吸收边界条件

在二维旋转交错网格上, 密度和速度的各个分量定义在相同位置, 弹性模量和应力的

各个分量定义在另外的相同位置上,如图1所示. 旋转交错网格在计算时分为两步(陈浩等, 2006): 首先, 计算沿着对角线方向即 \tilde{x} , \tilde{z} 方向进行差分, 得到相关物理量的对角线方向的空间一阶导数; 然后, 通过坐标旋转的换算关系, 将得到的两个对角线方向的差分进行线性组合从而获得坐标轴方向即 x , z 方向的一阶空间导数, 其换算关系为 (Saenger *et al*, 2000):

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta r} \begin{bmatrix} \Delta x & -\Delta z \\ \Delta x & \Delta z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{\Delta r}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta x} & \frac{1}{\Delta x} \\ -\frac{1}{\Delta z} & \frac{1}{\Delta z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

式中 $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta z^2}$, $\partial/\partial \tilde{x}$ 和 $\partial/\partial \tilde{z}$ 是沿对角线方向的导数; $\partial/\partial x$ 和 $\partial/\partial z$ 是沿坐标轴方向的导数.

利用波动方程进行数值模拟, 一个关键问题就是边界条件. 为了解决边界反射问题, 引入弹性波方程的 PML 边界条件. 陈浩等(2006)指出, 在旋转交错网格中, PML 吸收边界条件的处理方式及吸收效果与常规交错网格中几乎是一样的. 为此, 引入图1所示的 PML 吸收层. PML 边界的基本做法是在研究区域四周引入 PML, 波在 PML 中传播时不会产生反射, 并且随传播距离按一定规律衰减. 当波传播到 PML 边界时, 波场近似为零, 也不会产生反射(王守东, 2003).

以式(1)中的 v_x 为例来说明旋转交错网格紧致有限差分算法 PML 的实现方法:

$$v_x = v_x^x + v_x^z, \quad (6)$$

$$(v_x^x)_{i,j}^{n+1/2} = \frac{1 - 0.5d_i\Delta t}{1 + 0.5d_i\Delta t} (v_x^x)_{i,j}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\rho(1 + 0.5d_i\Delta t)} (T_{xx}^n)_{i,j}^x, \quad (7)$$

式中 $(v_x^x)_{i,j}^{n+1/2}$ 表示 $n+1/2$ 时刻 v_x 在网格点 (i, j) 处沿坐标轴 x 方向的分量, $(v_x^x)_{i,j}^{n-1/2}$ 表示 $n-1/2$ 时刻的 x 方向分量, d_i 为衰减因子, $(T_{xx}^n)_{i,j}^x$ 表示 n 时刻 σ_{xx} 在网格点 (i, j) 处沿坐标轴 x 方向的导数. 根据式(5)可推导出

$$(T_{xx}^n)_{i,j}^x = \frac{\Delta r}{2\Delta x} [(T_{xx}^n)_{i,j}^{\tilde{x}} + (T_{xx}^n)_{i,j}^{\tilde{z}}], \quad (8)$$

式中 $(T_{xx}^n)_{i,j}^{\tilde{x}}$ 和 $(T_{xx}^n)_{i,j}^{\tilde{z}}$ 分别为 $(\sigma_{xx}^n)_{i,j}$ 沿着所在对角线 \tilde{x} 与斜对角线 \tilde{z} 方向的导数值, 根据

$$(T_{xx}^n)_{i,j}^{\tilde{x}} = \frac{1}{\Delta \tilde{x}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\sigma_{xx}^n)_{i,j}^{\tilde{x}} \quad (9)$$

和

$$(T_{xx}^n)_{i,j}^{\tilde{z}} = \frac{1}{\Delta \tilde{z}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\sigma_{xx}^n)_{i,j}^{\tilde{z}} \quad (10)$$

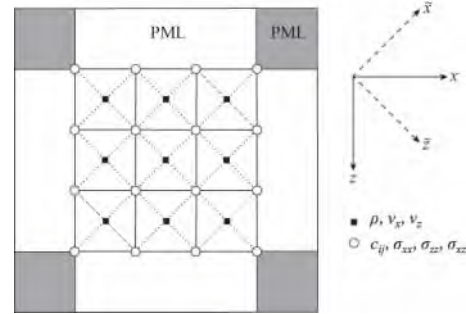


图1 旋转交错网格及完全匹配层吸收边界示意图

x , z 为坐标轴方向, \tilde{x} , \tilde{z} 为对角线方向; 灰色区域表示沿着 x 和 z 方向均进行衰减, 白色区域表示只沿着 x 方向或者 z 方向进行衰减

Fig. 1 Schematic diagram of rotated staggered-grid and perfectly matched layer (PML) absorbing boundary

x and z are the coordinate directions, and \tilde{x} and \tilde{z} are the diagonal directions. Gray areas indicate that waves are absorbed along both x and z directions and white areas indicate that waves are absorbed only along the x or z direction

求出. 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a & 1 & a & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a & 1 & a & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & a & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 & a & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a & 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a & 1 & a & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -b_1 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -b_2 & -b_1 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -b_3 & -b_2 & -b_1 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_4 & -b_3 & -b_2 & -b_1 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & -b_4 & -b_3 & -b_2 & -b_1 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & -b_4 & -b_3 & -b_2 & -b_1 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & -b_4 & -b_3 & -b_2 & -b_1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_4 & -b_3 & -b_2 & -b_1 & b_1 \end{bmatrix}.$$

类似地可以推导出其它分量的旋转交错网格紧致有限差分下的 PML 控制方程.

1.4 紧致有限差分的全局优化

根据平面波理论, 令

$$f(x) = A_0 e^{ikx}, \quad (11)$$

式中, A_0 为常数, $i = \sqrt{-1}$, k 为波数. 将式(11)带入式(2), 有

$$\beta \approx \sum_{i=1}^{M-1} b_i \sin[(2i-1)\beta] - 2a\beta \cos(2\beta) = \beta^*, \quad (12)$$

式中, $\beta = k\Delta x/2$, $0 \leq \beta \leq \pi/2$.

为了使式(2)左右两边的误差尽可能小, 须满足 $\beta - \beta^* \approx 0$ 的 β 取值范围应尽可能地大.

本文中, 采用模拟退火全局最优算法(Kirkpatrick *et al*, 1983)来优化旋转交错网格紧致有限差分算子. 为此, 建立以下目标函数:

$$f_{\text{obj}} = \int_0^\theta (\beta - \beta^*)^2 d\beta \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (13)$$

Kim 和 Lee(1996)指出, 当 θ 接近最大值 $\pi/2$ 时, 会出现很多难以控制的误差, 从而导致优化效果不佳, 因此本文选择 $\theta = r\pi/2$, 其中 $0 < r < 1$. 表 1 列出了优化的 8 点 10 阶, 10 点 12 阶, 12 点 14 阶以及 14 点 16 阶的紧致有限差分系数.

表 1 优化的 10—16 阶紧致有限差分系数
Table 1 Optimized coefficients of 10—16-order compact finite-difference

阶次	r	a	b_1	b_2	b_3	$b_4/10^{-2}$	$b_5/10^{-5}$	$b_6/10^{-3}$	$b_7/10^{-5}$
10	0.85	0.384	0.728	0.369	-0.015	0.152			
12	0.87	0.390	0.720	0.376	-0.016	0.171	-6.49		
14	0.89	0.434	0.658	0.434	-0.022	0.361	-74	0.138	
16	0.85	0.452	0.633	0.458	-0.0252	0.452	-114	0.322	-7.79

2 频散分析

由式(12)可以看出， β 接近于 β^* 的程度表征了优化的紧致有限差分算子的精度，故定义

$$\alpha = \frac{\beta^*}{\beta}, \tag{14}$$

使 $\alpha \approx 1$ 的 β 取值范围越大，数值频散越小.

图 2 给出了常规的基于泰勒展开得到的差分算子与本文提出的全局优化算子的精度对比. 可以看出，对于常规的基于泰勒展开得到的紧致有限差分算子，随着空间阶次的增大，使 $\alpha \approx 1$ 的波数范围变得越宽，即数值模拟的精度随阶次的增大而增大. 显然，本文得到的全局优化的紧致有限差分算子在相同最大误差下使 $\alpha \approx 1$ 的波数范围比常规紧致有限差分算子还要大. 从图 2 中还可以看出，优化的 8 点 10 阶紧致有限差分算子的频散比常规 14 点 16 阶紧致有限差分算子小，即优化的 10 阶精度要高于常规的 16 阶精度，从而可以使用较少的网格点来达到较高的精度，节省计算内存.

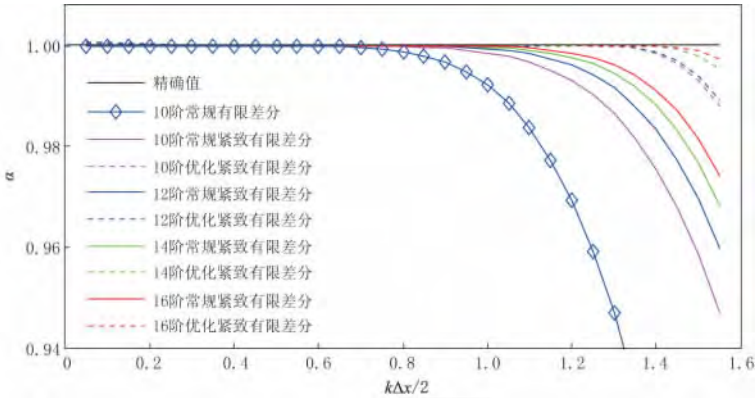


图 2 10 阶常规有限差分，10—16 阶常规紧致有限差分及对应的优化紧致有限差分的频散对比 (k 代表波数， Δx 表示空间网格间距)

Fig. 2 Dispersion comparison by 10-order conventional finite-difference, 10—16-order conventional compact finite-difference and the corresponding optimized compact finite-difference. k denotes the wavenumber, and Δx is spatial grid spacing

由图 2 中的 10 阶常规有限差分、10 阶常规紧致有限差分与 10 阶优化紧致有限差分的频散曲线可以看出，10 阶常规紧致有限差分格式的波数范围较 10 阶常规有限差分要宽，而经过优化的 10 阶紧致有限差分格式的波数范围则更进一步拓宽. 设最大允许误差为 $\epsilon_{\max} = |\alpha - 1|_{0 \leq \beta \leq \beta_{\max}}$ ，取 $\epsilon_{\max} = 0.2\%$ ，分别计算得到 10 阶常规有限差分、10 阶常规紧致有

限差分及 10 阶优化紧致有限差分的最大波数范围 β_{\max} 分别为 0.8475, 1.0375, 1.4580, 即 10 阶常规紧致有限差分的波数范围比常规差分格式拓宽了 1.22 倍, 而经过全局优化后, 波数范围提升至 1.72 倍. 考虑到正演模拟中最常采用 $\Delta x = \Delta z$ 的情况, 则对于旋转交错网格, Δr 比常规交错网格差分步长 Δx 及 Δz 增大了 $\sqrt{2}$ 倍, 因而可以采用优化系数的紧致有限差分来弥补这一不足, 从而有效地压制数值频散. 需要指出的是, 优化系数的紧致有限差分格式也可以很方便地应用于 PML 边界条件, 而不需要特殊的处理.

3 模型试算

3.1 模型 1

为了验证全局优化的旋转交错网格紧致有限差分的精度比常规旋转交错网格有限差分方法有所提升, 首先采用一个简单的各向同性模型进行测试(模型大小为 $3000 \text{ m} \times 3000 \text{ m}$, 在测试中并未添加任何边界条件), 震源采用主频 30 Hz 的雷克子波, z 方向集中力源激发, 网格大小为 $\Delta x = \Delta z = 10 \text{ m}$, 时间采样为 $\Delta t = 1 \text{ ms}$. 纵横波速度分别为 4000 m/s 和 2600 m/s , 模型密度为 2300 kg/m^3 . 图 3 给出了 3 种有限差分条件下 400 ms 时刻 x 分量波场快照, 均采用旋转交错网格系统. 图 3a 采用常规 10 阶常规有限差分格式; 图 3b 采用 8 点 10 阶, 10 点 12 阶, 12 点 14 阶, 14 点 16 阶常规紧致有限差分格式; 图 3c 采用优化的 8 点 10 阶紧致有限差分格式. 可以看出, 10 阶常规有限差分与 10 阶紧致有限差分对比, 后者频散要小; 而对于图 3b 中的紧致有限差分格式, 随着空间阶次的增大, 其精度越高, 频散越小; 对比图 3b 与图 3c 可以看出, 优化的 8 点 10 阶紧致有限差分的数值频散甚至比常规 14 点 16 阶紧致有限差分还要小, 这与图 2 所示是一致的. 图 4 给出了从图 3 中提取的 $z = 500 \text{ m}$ 处(即 50 个网格点处)的波形曲线, 以此来对比以上 3 种差分格式的数值频散. 可以看出, 10 阶常规有限差分算法在波形外出现了数值抖动, 说明数值频散比较高, 模拟精度相对较低, 而 10 阶紧致有限差分和优化的 10 阶紧致差分精度较高, 从虚线框中可以进一步看出优化的 10 阶紧致有限差分算法的精度更高一些.

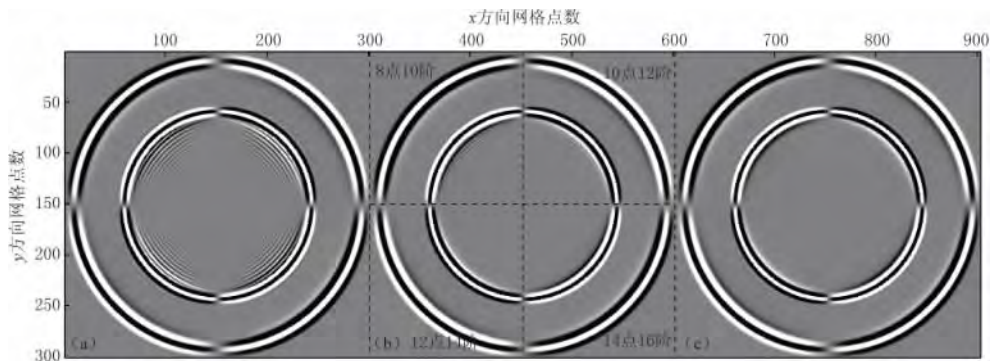


图 3 10 阶常规有限差分(a), 10—16 阶常规紧致有限差分(b)与优化的 10 阶紧致有限差分(c)得到的波场快照

Fig. 3 Snapshots of wave field by using 10-order conventional finite-difference (a), 10—16-order conventional compact finite-difference (b) and optimized 10-order compact finite-difference (c)

3.2 模型 2

模型 2 的几何构造如图 5 所示, 其中凹陷构造上部及下部均为各向同性介质, 最下层

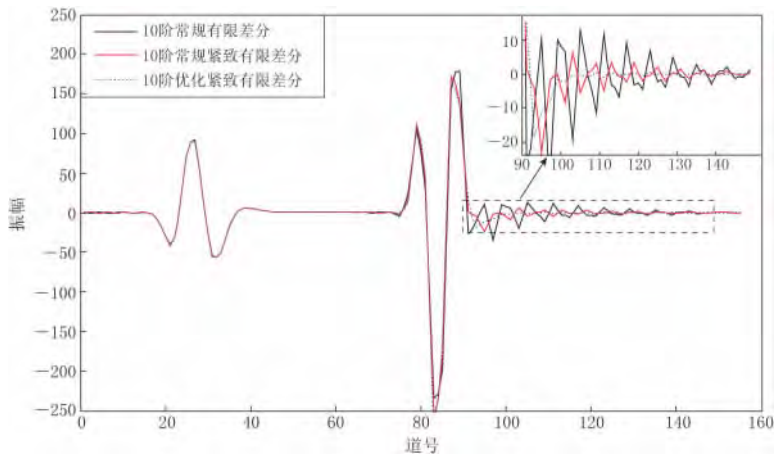


图 4 10 阶常规有限差分, 10 阶常规紧致有限差分及 10 阶优化紧致有限差分波形对比图

Fig. 4 Comparison of waveforms by using 10-order conventional finite-difference (FD) (dark line), 10-order conventional compact FD (blue line) and optimized 10-order compact FD (red line)

为横向各向同性(VTI)介质. 模型纵向和横向长为 3 000 m, 具体参数见表 2. 采用优化的旋转交错网格紧致有限差分方法进行正演模拟, 网格大小为 $\Delta x=\Delta z=10$ m, 时间采样为 $\Delta t=1$ ms. 震源采用 30 Hz 雷克子波, 在模型的(1 150 m, 1 500 m)处以纵波源形式激发. 模拟过程中, 采用 PML 边界条件(PML 层部分同样采用优化的旋转交错网格紧致有限差分算法), 厚度层为 30 个网格点. 为体现吸收效果包含了 PML 层, 图 6 给出了 600 ms 时刻 x 及 z 分量的波场快照. 可以看出, 震源激发的纵波传播至分界面时, 发生了反射与透射, 可以见到

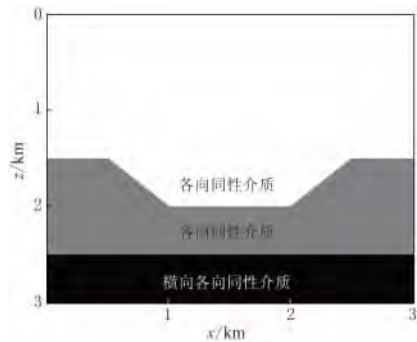


图 5 凹陷模型示意图

Fig. 5 Schematic diagram of the depression model

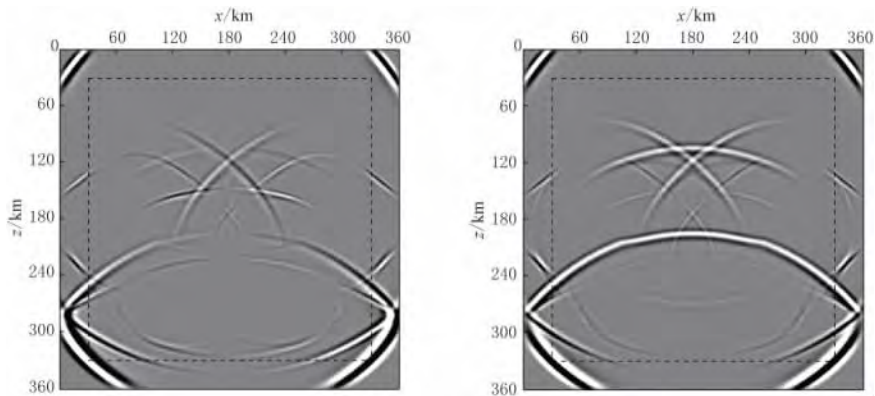


图 6 600 ms 时刻优化的旋转交错网格紧致有限差分正演 x 分量(左)和 z 分量(右)的波场快照(虚线框外围代表 PML 层)

Fig. 6 Wavefield snapshots of x -(left) and z -component (right) at 600 ms using optimized rotated staggered-grid compact finite-difference method (PML layers are outside the dashed box)

PP 波、PS 波等，并可在凹陷处看到断面波，波场复杂，但波前面清晰，数值频散小. 从图 7 所示的单炮记录中也可以看出优化的旋转交错网格紧致有限差分算法具有较高的模拟精度，各类波均可得到清晰体现，并且能够证明所加 PML 边界条件的吸收效果很好，无明显人为边界反射产生.

表 2 凹陷模型参数

Table 2 Parameters of the depression model

序号	介质类型	c_{11}/GPa	c_{13}/GPa	c_{33}/GPa	c_{55}/GPa	密度/ $(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$
第一层	各向同性	31.77	42.68	31.77	13.75	2 200
第二层	各向同性	42.33	47.04	42.34	18.82	2 400
第三层	横向各向同性	87.88	21.22	67.60	22.56	2 500

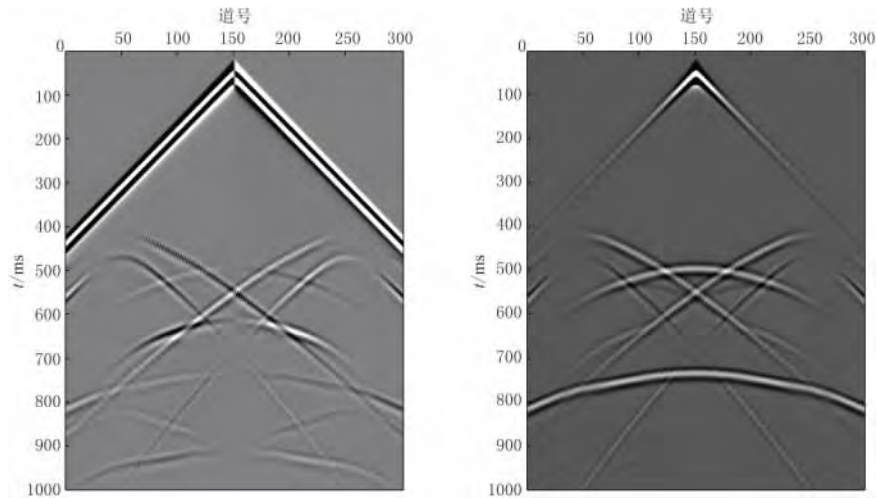


图 7 凹陷模型优化的旋转交错网格紧致有限差分正演 x 分量(左)和 z 分量(右)单炮记录

Fig. 7 Records of x -(left) and z -component (right) of the depression model using optimized rotated staggered-grid compact finite-difference method

4 讨论与结论

旋转交错网格在地震波正演模拟中由于其可以避免在模拟中因弹性模量插值或平均而产生的误差和其对边界条件处理的便捷性而被广泛应用. 但由于其差分方向是沿网格的对角线方向, 因此相对于常规的交错网格而言, 其差分步长较大, 梯度算子、散度算子在计算时更容易产生误差, 这意味着旋转交错网格更容易产生数值频散, 从而影响模拟的精度. 若采用小网格, 虽然可以压制数值频散, 却又大大增加了运算量及内存. 因此本文采用旋转交错网格与紧致有限差分技术相结合的方法来提高模拟精度, 并在此基础上, 基于模拟退火算法对紧致有限差分进行全局优化, 进一步提高计算精度, 压制数值频散.

数值频散分析结果表明, 优化的旋转交错网格紧致有限差分算法相对于普通旋转交错网格有限差分算法具有更宽的波数范围, 这意味着优化的旋转交错网格有限差分算法可以在采用更大的空间采样间隔或者更高的震源主频时依然有较高的精度和较低的数值频散; 且经过全局优化的 10 阶紧致有限差分算子比常规的 16 阶紧致有限差分算子具有更高的精度, 即可以采用较少的网格点来达到较高的模拟精度, 因此可以节省计算内存.

数值模拟实验进一步证实了本文提出的优化的旋转交错网格紧致有限差分算法的正确性与可行性。凹陷模型中,各类波均具有比较清晰的响应,揭示了波场的传播规律。同时波场快照与单炮记录中无明显的人为边界反射产生,也证明了模拟采用的 PML 吸收边界条件的有效性。

但是本文提出的方法亦存在不足之处。在求解紧致差分格式时需要解三角矩阵线性方程,较常规显式有限差分格式增加额外的计算负担,且不利于在 GPU 等平台直接并行,例如图 3a 和图 3c 中的 400 ms 时长的计算时间分别为 46.5 s 和 85.6 s,后者计算耗时约为前者的 1.8 倍。在科学计算中,效率与计算精度常常不可兼得,随着计算机科学计算能力的提高,可以采用 GPU 加速的 LU 分解算法或者使用 LAPACK 等优化程序包来克服求解大型矩阵的计算效率问题。在实际应用中需权衡利弊,选择适合的算法。

衷心感谢审稿专家提出的宝贵意见和建议。

参 考 文 献

- 白晓寅. 2008. 基于地震波衰减理论的地层吸收参数提取方法研究[D]. 东营: 中国石油大学(华东)地球科学与技术学院: 24–54.
- Bai X Y. 2008. *The Study on Method of Layer Absorbing Parameters Extraction Based on the Theory of Seismic Wave Attenuation*[D]. Dongying: School of Geosciences, China University of Petroleum: 24–54 (in Chinese).
- 陈浩, 王秀明, 赵海波. 2006. 旋转交错网格有限差分及其完全匹配层吸收边界条件[J]. 科学通报, 51(17): 1985–1994.
- Chen H, Wang X M, Zhao H B. 2006. Rotated staggered grid finite-difference and the PML boundary[J]. *Chinese Science Bulletin*, 51(17): 1985–1994 (in Chinese).
- 董良国. 2003. 地震波数值模拟与反演中几个关键问题研究[D]. 上海: 同济大学海洋与地球科学学院: 1–2.
- Dong L G. 2003. *Several Key Problems in Seismic Wave Numerical Simulation and Inversion*[D]. Shanghai: School of Ocean and Earth Science, Tongji University: 1–2 (in Chinese).
- 何燕. 2008. 正交各向异性弹性波高阶有限差分正演模拟研究[D]. 东营: 中国石油大学(华东)地球科学与技术学院: 45–80.
- He Y. 2008. *High-Order Finite-Difference Forward Modeling of Elastic-Wave in Orthorhombic Anisotropic Media* [D]. Dongying: School of Geosciences, China University of Petroleum: 45–80 (in Chinese).
- 李敏, 刘洋. 2012. 高阶旋转交错网格有限差分方法模拟 TTI 介质中横波分裂[J]. 物探与化探, 36(6): 934–940.
- Li M, Liu Y. 2012. Modeling of the S-wave splitting in TTI media using high-order rotated staggered grid scheme[J]. *Geophysical and Geochemical Exploration*, 36(6): 934–940 (in Chinese).
- 裴正林, 王尚旭. 2005. 任意倾斜各向异性介质中弹性波波场交错网格高阶有限差分法模拟[J]. 地震学报, 27(4): 441–451.
- Pei Z L, Wang S X. 2005. A staggered-grid high-order finite-difference modeling for elastic wave field in arbitrary tilt anisotropic media[J]. *Acta Seismologica Sinica*, 27(4): 441–451 (in Chinese).
- 孙成禹, 肖云飞, 印兴耀, 彭洪超. 2010. 黏弹介质波动方程有限差分解的稳定性研究[J]. 地震学报, 32(2): 147–156.
- Sun C Y, Xiao Y F, Yin X Y, Peng H C. 2010. Study on the stability of finite difference solution of visco-elastic wave equations[J]. *Acta Seismologica Sinica*, 32(2): 147–156 (in Chinese).
- 孙林洁. 2012. 非均匀孔隙介质有限差分正演模拟方法研究[D]. 青岛: 中国石油大学(华东)地球科学与技术学院: 64–108.
- Sun L J. 2012. *Finite-Difference Modeling Research in Heterogeneous Porous Media*[D]. Qingdao: School of Geosciences, China University of Petroleum: 64–108 (in Chinese).
- 王守东. 2003. 声波方程完全匹配层吸收边界[J]. 石油地球物理勘探, 38(1): 31–34.
- Wang S D. 2003. Absorbing boundary condition for acoustic wave equation by perfectly matched layer[J]. *Oil Geophysi-*

- cal Prospecting*, **38**(1): 31–34 (in Chinese).
- 王书强, 杨顶辉, 杨宽德. 2002. 弹性波方程的紧致差分方法[J]. 清华大学学报: 自然科学版, **42**(8): 1128–1131.
- Wang S Q, Yang D H, Yang K D. 2002. Compact finite difference scheme for elastic equations[J]. *Journal of Tsinghua University: Science and Technology*, **42**(8): 1128–1131 (in Chinese).
- 严红勇, 刘洋. 2012. 黏弹 TTI 介质中旋转交错网格高阶有限差分数值模拟[J]. 地球物理学报, **55**(4): 1354–1365.
- Yan H Y, Liu Y. 2012. Rotated staggered grid high-order finite-difference numerical modeling for wave propagation in viscoelastic TTI media[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, **55**(4): 1354–1365 (in Chinese).
- 殷文, 印兴耀, 吴国忱, 梁锴. 2006. 高精度频率域弹性波方程有限差分方法及波场模拟[J]. 地球物理学报, **49**(2): 561–568.
- Yin W, Yin X Y, Wu G C, Liang K. 2006. The method of finite difference of high precision elastic wave equations in the frequency domain and wave field simulation[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, **49**(2): 561–568 (in Chinese).
- Boersma B J. 2011. A 6th order staggered compact finite difference method for the incompressible Navier-Stokes and scalar transport equations[J]. *J Comput Phys*, **230**(12): 4940–4954.
- Collino F, Tsogka C. 2001. Application of the perfectly matched absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media[J]. *Geophysics*, **66**(1): 294–307.
- Dai N, Vafidis A, Kanasewich E R. 1995. Wave propagation in heterogeneous, porous media: A velocity-stress, finite-difference method[J]. *Geophysics*, **60**(2): 327–340.
- Du Q Z, Li B, Hou B. 2009. Numerical modeling of seismic wavefields in transversely isotropic media with a compact staggered-grid finite difference scheme[J]. *Appl Geophys*, **6**(1): 42–49.
- Gold N, Shapiro S A, Burr E. 1997. Modelling of high contrasts in elastic media using a modified finite difference scheme [C]// *SEG Technical Program Expanded Abstracts*. Dallas, Texas: SEG: 1850–1853.
- Holberg O. 1987. Computational aspects of the choice of operator and sampling interval for numerical differentiation in large-scale simulation of wave phenomena[J]. *Geophys Prospect*, **35**(6): 629–655.
- Igel H, Mora P, Riollot B. 1995. Anisotropic wave propagation through finite-difference grids[J]. *Geophysics*, **60**(4): 1203–1216.
- Kim J W, Lee D J. 1996. Optimized compact finite difference schemes with maximum resolution[J]. *AIAA J*, **34**(5): 887–893.
- Kirkpatrick S, Gelatt C D Jr, Vecchi M P. 1983. Optimization by simulated annealing[J]. *Science*, **220**(4598): 671–680.
- Kosloff D, Pestana R C, Tal-Ezer H. 2010. Acoustic and elastic numerical wave simulations by recursive spatial derivative operators[J]. *Geophysics*, **75**(6): T167–T174.
- Lele S K. 1992. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution[J]. *J Comput Phys*, **103**(1): 16–42.
- Liu Y, Sen M K. 2009. An implicit staggered-grid finite-difference method for seismic modelling[J]. *Geophys J Int*, **179**(1): 459–474.
- Liu Y. 2013. Globally optimal finite-difference schemes based on least squares[J]. *Geophysics*, **78**(4): T113–T132.
- Saenger E H, Bohlen T. 2004. Finite-difference modeling of viscoelastic and anisotropic wave propagation using the rotated staggered grid[J]. *Geophysics*, **69**(2): 583–591.
- Saenger E H, Gold N, Shapiro S A. 2000. Modeling the propagation of elastic waves using a modified finite-difference grid[J]. *Wave Motion*, **31**(1): 77–92.
- Shan G. 2009. Optimized implicit finite-difference and Fourier finite-difference migration for VTI media[J]. *Geophysics*, **74**(6): WCA189–WCA197.
- Virieux J. 1984. SH-wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method[J]. *Geophysics*, **49**(11): 1933–1957.
- Zeng Y Q, He J Q, Liu Q H. 2001. The application of the perfectly matched layer in numerical modeling of wave propagation in poroelastic media[J]. *Geophysics*, **66**(4): 1258–1266.
- Zhang J H, Yao Z X. 2012. Optimized finite-difference operator for broadband seismic wave modeling[J]. *Geophysics*, **78**(1): A13–A18.
- Zhou H B, Zhang G Q. 2011. Prefactored optimized compact finite-difference schemes for second spatial derivatives[J]. *Geophysics*, **76**(5): WB87–WB95.