

# 地震载荷作用下土-结构相互 作用的数值分析\*

章根德<sup>1)</sup> 宁书城<sup>2)</sup>

1) 中国北京 100080 中国科学院力学研究所

2) 中国北京 100080 中国科学院数学研究所

**摘要** 用流固两相混合物连续介质理论研究了土-结构物耦合体系的动力响应, 采用有限元方法计算了建筑物基础体系受地震波激励的响应问题。给出了随时间变化的变形图和孔隙水压力等值线分布图、某节点位移和某单元剪应力随时间变化的曲线。本项研究加深了对多孔介质耦合性状的认识, 本文所提供的方法能有效地应用于从缓慢的准静态到很快的地震激励这样相当广泛的荷载条件。

**主题词** 土动力学 土-结构相互作用 地震响应

## 前言

在许多工程问题中, 特别是涉及到土体液化、土-结构相关作用时, 预言地震、波浪等动力荷载作用下结构物和土体的动力性状是十分重要的。由于土的力学性质十分复杂, 特别是存在水-土两相介质耦合的情况, 要解决这个问题更显得十分困难。所以, 近 10 年来, 地震荷载作用下结构物-水土两相介质的相互作用问题特别引起了人们的兴趣和重视。

人造结构物, 如水坝、挡土墙、建筑物等都是建在多孔地质材料基础上的。而地质材料是由固体骨架与颗粒之间的空隙所组成的。孔隙中部分或全部充满了孔隙水。此时, 整个孔隙介质的变形不仅决定于各相的变形, 而且还决定于各相之间的相互耦合作用。当外界扰动作用于部分或完全饱和的地质材料上时, 土骨架与孔隙水中的反力也随之增加, 这将引起孔隙水压力的变化并导致孔隙水的流动。孔隙水连续流动, 压力传递到土骨架上, 便会引起土骨架的连续变形。当孔隙水压力增加得过高时, 往往会导致土骨架的破坏及发生液化现象。

多年来水土两相介质复杂的耦合性状虽然引起了人们的极大兴趣, 但要获得问题的解答是十分困难的。除了某些极为简单的情况, 一般是不能得到解析解的。一种选择是作经验的估算。这不仅要有长期的工程经验, 还须对现场的工程地质特性及历史状况非常了解。即使这样, 在设计时由于多种的不确定因素, 往往要采用极高的安全系数才敢应用。另一种选择就是采用诸如有限元分析这样的先进技术。有限元分析能运用于复杂的几何形状、复杂的边值与初值条件和各种不同类型的材料与各种加载条件, 显示了广泛的适用性。

\* 国家自然科学基金资助项目。

1996-01-15 收到初稿, 1997-01-16 收到修改稿并决定采用。

关于多孔介质中流固两相耦合性状的研究最早是由 Biot(1941, 1956, 1962) 所给出的。尔后, 不少研究者进一步地完善和发展了水土两相介质混合物相互作用的理论, 如 Sandhu 和 Wilson(1969)、Ghaboussi 和 Wilson(1972), 以及 Zienkiewicz 和 Shiomi(1984)。在国内, 从 80 年代以来, 围绕水-土两相介质也作了不少的工作(章根德, 顾小芸, 1990, 1993; 章根德, 1993, 1994)。

## 1 基本方程推导

流体饱和的多孔介质是由土骨架与孔隙流体两部分所组成, 孔隙的体积  $V_v$  等于流体体积  $V_f$ , 孔隙率可由孔隙体积占总体积的百分比来表示, 即

$$n = \frac{V_v}{V_v + V_s} \quad (1)$$

式中,  $V_s$  为固体体积。

设固体体积的位移分量为  $u_i$  ( $i=1, 2, 3$ ), 则固体骨架的应变可定义为

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

设流体相对于土骨架的位移为  $w_i$  ( $i=1, 2, 3$ ), 则每单位土骨架体积内贮存的流体体积的变化为

$$\xi = w_{i,i} \quad (3)$$

根据 Biot 理论(Biot, 1941, 1956, 1962), 孔隙弹性介质的本构方程可以表示为

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} + \alpha M \delta_{ij} (\alpha \epsilon_{kl} \delta_{kl} + \xi) \quad (4)$$

$$\pi = M(\alpha \delta_{ij} \epsilon_{ij} + \xi) \quad (5)$$

式中,  $\sigma_{ij}$  是应力张量分量,  $\pi$  为孔隙流体压力, 而  $C_{ijkl}$  为土骨架的弹性刚度。

$$C_{ijkl} = 2\mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (6)$$

式中,  $\mu$  和  $\lambda$  为土骨架的 Lamé 常数。

在 Biot 理论中, 方程式(4)和(5)中的参量  $\alpha$  与  $M$  分别定义为

$$\alpha = 1 - \frac{K}{K_s} \quad (7)$$

$$\frac{1}{M} = \frac{n}{K_f} + \frac{\alpha - n}{K_s} \quad (8)$$

上两式中,  $K$  为土骨架的体变模量,  $K_s$  和  $K_f$  分别表示为土颗粒与流体的体变模量。由于土颗粒的体变模量比土骨架体变模量高很多, 所以式(7)中的  $\alpha$  非常接近于 1, 而式(8)中的  $M \simeq \frac{K_f}{n}$ 。于是式(4)成为

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \pi \delta_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (9)$$

式中,  $\sigma'_{ij}$  就称为有效应力。式(9)与 Terzaghi 关于土骨架变形由有效应力所控制的假设是一致的。由于变形包括了不同的两相, 所以能导出两个不同的动力平衡方程。

总体平衡方程可表示为

$$\sigma_{ij,j} + (1-n)\rho_s r_i + n\rho_f r_i + (1-n)\rho_s \ddot{u}_i - n\rho_f \dot{U}_i = 0 \quad (10)$$

式中,  $r_i$  为每单位质量所受的体积力分量,  $\ddot{u}$  为土质点加速度,  $\dot{U}$  为流体加速度。再由 Darcy 定律  $w_i = k_{ij} h_{,j}$ , 流体的稳态条件  $h_{,j} = \pi_{,j} + \rho_f r_i - \rho_f \dot{U}_i$ , 最终可以得到表示水土两相介

质动力平衡方程

$$\sigma_{ij,j} + \rho r_i - \rho \ddot{u}_i - \rho_f \ddot{w}_i = 0 \quad (11)$$

$$\pi_{,i} + \rho_f r_i - \rho_f \ddot{u}_i + \frac{1}{n} \rho_f \ddot{w}_i + k_{ij}^{-1} \dot{w}_j = 0 \quad (12)$$

将式(2)、(3)、(4)、(5)代入上两式, 可以得到用位移表示的运动方程

$$[C_{ijkl} u_{k,l} + \alpha M(\alpha u_{k,k} + w_{k,k}) \delta_{ij}]_{,j} + \rho r_i = \rho \ddot{u}_i + \rho_f \ddot{w}_i \quad (13)$$

$$[M(\alpha u_{k,k} + w_{k,k})]_{,i} + \rho_f r_i = \rho_f \ddot{u}_i + \frac{1}{n} \rho_f \ddot{w}_i + k^{-1} \dot{w}_j \quad (14)$$

相应的边界条件为

$$\text{在 } S_{1i} \text{ 上 } u_i(\mathbf{x}, t) = \tilde{u}_i(\mathbf{x}, t) \quad (15)$$

$$\text{在 } S_{2i} \text{ 上 } \sigma_i(\mathbf{x}, t) = (C_{ijkl} u_{k,l} + \alpha \pi \delta_{ij}) n_j = \tilde{\sigma}_i(\mathbf{x}, t) \quad (16)$$

$$\text{在 } S_3 \text{ 上 } \pi(\mathbf{x}, t) = M(\alpha u_{k,k} + w_{k,k}) = \tilde{\pi}(\mathbf{x}, t) \quad (17)$$

$$\text{在 } S_4 \text{ 上 } w_i(\mathbf{x}, t) = \tilde{w}_i(\mathbf{x}, t) \quad (18)$$

在  $R$  的边界  $S$  上,  $S_{1i}$  与  $S_{2i}$ ,  $S_3$  与  $S_4$  为互补的子集. 而初始条件为

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \quad \dot{u}(\mathbf{x}, 0) = \dot{u}_0(\mathbf{x}) \quad w(\mathbf{x}, 0) = w_0(\mathbf{x}) \quad \dot{w}(\mathbf{x}, 0) = \dot{w}_0(\mathbf{x}) \quad (19)$$

## 2 数值分析

描述结构物-水土两相体系对地震响应的方程式(11)与(12)是非常复杂的, 只有极简单的情况下才可得到解析解, 所以通常采用数值方法来求解. 两相介质问题的数值解一般都需要在时间与空间领域内分别求解. 关于时间积分的迭代常采用 Newmark 方法, 关于空间领域一般采用有限元方法.

根据虚功原理, 这类问题的有限元方程一般都由变分公式求得. 对任意的虚位移方程(11)和(12), 在所关心的空间内积分为零. 由方程(11)可给出

$$\int_V [\sigma_{ij,j} + \rho r_i - \rho \ddot{u}_i - \rho_f \ddot{w}_i] \delta u_i \, dv = 0 \quad (20)$$

式中,  $V$  为所关心的区域,  $\delta u_i$  为虚位移.

同样地, 对方程(12)应用虚功原理, 可得

$$\int_V [\pi_{,i} + \rho_f r_i - \rho_f \ddot{u}_i - \frac{1}{n} \rho_f \ddot{w}_i - k_{ij}^{-1} \dot{w}_j] \delta w_i \, dv = 0 \quad (21)$$

式中,  $\delta w_i$  为  $w_i$  的虚位移.

根据 Gauss 定律并利用相应的边界条件, 经运算最终可得到

$$[M_{uu}] \{ \ddot{u} \} + [M_{uw}] \{ \ddot{w} \} + \int_V [B_u]^T \{ \sigma \} \, dv = \{ f_u \} \quad (22)$$

$$[M_{uw}] \{ \ddot{u} \} + [M_{ww}] \{ \ddot{w} \} + [C_{ww}] \{ \dot{w} \} + \int_V [H_w]^T \pi \, dv = \{ f_w \} \quad (23)$$

式中,  $[M_{uu}]$  为固体质量矩阵,  $[M_{uw}]$  为流体质量矩阵,  $[M_{ww}]$  为固体与流体的耦合质量矩阵,  $[C_{ww}]$  为反映流动性质的矩阵,  $[B_u]$  为固体的应变-位移关系,  $[H_w]$  为流体的流动梯度关系,  $\{u\}$  是固体的节点位移矢量,  $\{w\}$  是流体相对于固体的节点位移,  $\{\sigma\}$  是总应力矢量,  $\pi$  是孔隙水压力,  $\{f_u\}$  与  $\{f_w\}$  分别为作用于固体与流体的荷载.

一般地,关于动力问题的有限元方程的未知数是时间的函数,它们可以通过类似于 Newmark 方法那样的时间积分迭代算法来求解. 方程(22)和(23)就是用 Newmark 无条件稳态积分运算来数值求解的.

### 3 应用举例

作为一个典型的例子,我们来分析如图 1 所示的结构物-水土两相介质对地震荷载的动力响应问题. 这里,选用了如 Zienkiewicz 和 Shiomi(1984)所使用的假想的地基. 如图 1 所示,高 75 m、宽 75 m 的建筑物放置于高为 300 m 的饱和土层之上,土层下是岩性地基.

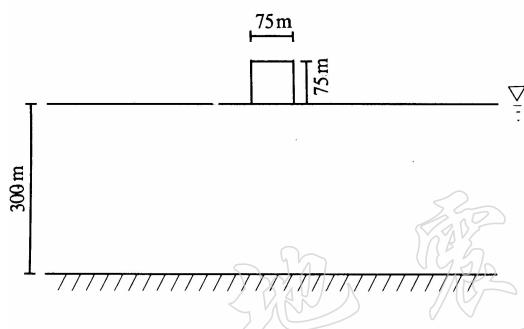


图 1 结构物-基础相互作用问题的图示

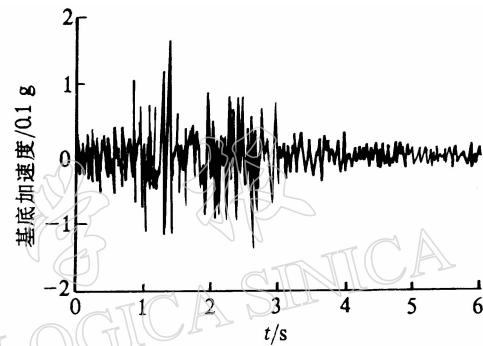


图 2 基底输入的地震波

输入地震荷载的波形如图 2 所示,最大加速度为 0.16 g(章根德, 1994). 地震波是横向剪切波,由岩性地基向上传播.

上述问题的有限元离散图如图 3 所示,它由 129 个节点和 26 个 8 节点等参单元组成. 边界条件,岩性基底可看成不透水的刚性地基,而只有横向地震波传入,即

$$u_x = u_x(t), u_y = w_x = w_y = 0$$

上表面,远离结构物处可视为自由的,满足自由面边界条件

$$\{\pi\} = 0 \quad \{u\}, \{w\} \text{ 自由}$$

左、右两边振动时可看成是对称的,即

$$u_{x\text{左}} = u_{x\text{右}} \quad u_{y\text{左}} = u_{y\text{右}} \quad w_{x\text{左}} = w_{x\text{右}} \quad w_{y\text{左}} = w_{y\text{右}}$$

结构物与水土两相介质的材料常数如表 1 所示.

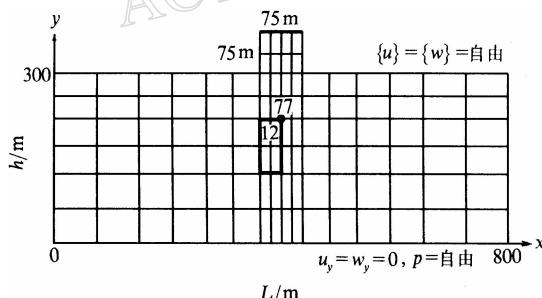


图 3 结构物-基础相互作用问题的有限元离散

表 1 结构物-基础相互作用问题中的材料常数

材料常数	土	结构物
杨氏模量( $E$ )	$79.2 \text{ MN} \cdot \text{m}^{-2}$	$1300 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$
泊桑比( $\gamma$ )	0.29	0.3
固体密度( $\rho_s$ )	$2.66 \text{ Mg} \cdot \text{m}^{-3}$	$2.7 \times 10^6 \text{ g} \cdot \text{m}^{-3}$
流体密度( $\rho_f$ )	$1.0 \text{ Mg} \cdot \text{m}^{-3}$	
土颗粒体变模量( $k_s$ )	$1.0 \times 10^{17} \text{ MN} \cdot \text{m}^{-2}$	
流体体变模量( $k_f$ )	$2250 \text{ MN} \cdot \text{m}^{-2}$	
渗透系数	$1.0 \times 10^{-4} \text{ m/s}$	
孔隙比	0.34	

计算时步长在计算中是变化的,如表 2 所示,总的分析计算时间为 600 s.

表 2 结构物-基础问题分析中所用的时间步长

时间步长/s	起止时间/s
0.02	[0, 4]
0.5	(4, 54]
5	(54, 600]

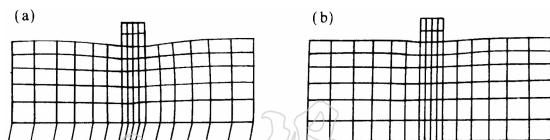


图 4 水土两相介质地基变形图  
(a)  $t=2.68 \text{ s}$ ; (b)  $t=124 \text{ s}$

图 4 给出了不同时间水土两相介质地基的变形图. 图 4a 所示的是  $t=2.68 \text{ s}$  时的变形图, 图 4b 所示的是  $t=124 \text{ s}$  时的变形图. 孔隙水压力分布的等值线如图 5 所示. 图 5a 与图 5b 所对应的时间分别为地震波入射后  $t=0.2 \text{ s}$  与  $t=124 \text{ s}$ . 在结构物与基础相接触的边缘附近出现较高的孔隙水压力的分布. 这是由于水平地震波入射引起结构物左右摆动, 引起局部区域孔隙水异常流动, 导致孔隙水压力高度集中. 在地震波停止后相当长时间内, 如图 5b 所示( $t=124 \text{ s}$  相当于地震激震时间的 20 倍之后), 较高的孔隙水压力仍不消散.

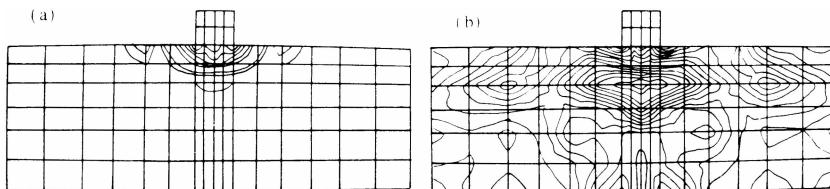


图 5 地基中孔隙水压力分布

(a)  $t=0.2 \text{ s}$ ; (b)  $t=124 \text{ s}$

图 6 给出了结构物正下方地基中编号为 77 节点的位移随时间变化的曲线. 图 7 所示的是结构物下方地基中编号为 12 单元剪应力随时间变化的曲线. 地震停止后, 随着时间的增长, 地震的影响逐渐减小, 位移趋于恢复, 应力趋于消散.

## 4 结论

在许多实际工程问题中, 岩土介质总是部分或全部地浸润于水中. 当岩土介质为水饱和时, 就可以称为水-土两相介质体系. 建立在 Biot 理论基础上水-土两相介质的基本方程

能很好地描述水-土两相介质的各种响应问题：从动力响应、固结问题(去掉方程中的加速度项)、静力平衡(去掉与时间相关项)以及干材料性状的模拟(忽略流体孔隙压)等. 本文所给出的基本方程组能相当广泛地使用于解决地质材料-结构物的相互作用问题.

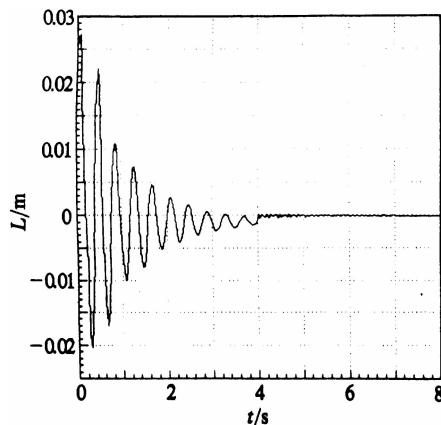


图 6 节点 77 的位移随时间变化曲线

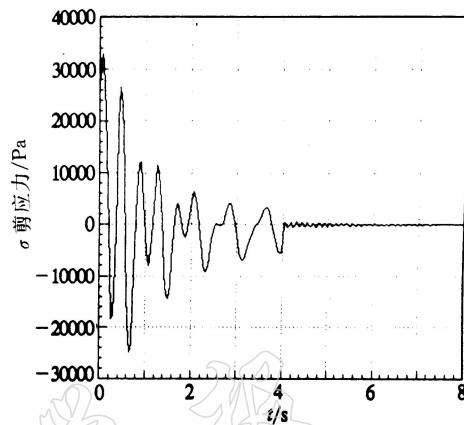


图 7 单元 12 的剪应力随时间变化曲线

本文所作的结构物-水土两相介质平面应变问题有限元计算的结果表明，在地震波停止后的相当长的一段时间内(约为地震波作用时间的数百倍)，孔隙水压力分布的高度集中现象并不会很快消散. 过高的孔隙水压力往往会引起非凝聚土的液化(Zienkiewicz, Shioomi, 1984)，常常是许多重大工程问题的基础设计所面临的严重问题，而常规工程设计方法又很难对非凝聚土地基的液化问题作出科学解答. 所以，发展水-土两相介质理论及其有限元分析的计算方法，对大型工程项目地基设计有着极为重要的意义.

## 参 考 文 献

- 章根德, 1993. 固体-流体混合物连续介质理论及其在工程上的应用. 力学进展, **23**(1): 58~68
- 章根德, 1994. 饱和砂土对地震的动力响应. 力学学报, **26**(2): 251~256
- 章根德, 顾小芸, 1990. 波浪引起的海底土层中的应力场和位移场. 力学与实践, **12**(6): 29~34
- 章根德, 顾小芸, 1993. 有限厚度砂床对波浪载荷的响应. 力学学报, **25**(1): 56~69
- Biot M A, 1941. General theory of the three dimensional consolidation. *J Appl Phys*, **12**: 155~164
- Biot M A, 1956. Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid. *J Acoust Soc of America*, **28**: 169~191
- Biot M A, 1962. Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipation media. *J Acoust Soc of America*, **34**: 1 254~1 264
- Ghaboussi J, Wilson E L, 1972. Variational formulation of dynamics of fluid-saturated porous elastic solids. *J Eng Mech Div ASCE*, **98**: 947~963
- Sandhu R S, Wilson E L, 1969. Finite element analysis of seepage in elastic media. *J Eng Mech Div ASCE*, **95**: 641~652
- Zienkiewicz O C, Shiomi T, 1984. Dynamic behaviour of saturated porous media, the generalized Biot formulation and its numerical solution. *Int J Numer Analy Methods Geomech*, **8**: 71~96