

李信富, 李小凡. 2008. 复杂介质地震波传播的褶积微分算子数值模拟. 地震学报, 30(4): 377-382.  
Li Xinfu, Li Xiaofan. 2008. Numerical simulation of seismic wave propagation in complex media by using convolutional differentiator. *Acta Seismologica Sinica*, 30(4): 377-382.

# 复杂介质地震波传播的褶积微分算子数值模拟<sup>\*</sup>

李信富<sup>1,2),\*</sup> 李小凡<sup>2)</sup>

1) 中国北京 100083 中国地质大学地质过程与矿产资源国家重点实验室

2) 中国北京 100029 中国科学院地质与地球物理研究所岩石圈演化国家重点实验室

**摘要** 将佛尔塞(Forsyte)广义正交多项式微分算子地震波场正演模拟算法运用于复杂非均匀介质模型的波场数值模拟中, 并比较了该方法在计算效率和计算精度方面与有限差分方法和伪谱法的差异. 数值结果表明, 这种广义正交多项式微分算子法计算速度快、精度高, 对计算资源需求低, 是一种颇具潜力的数值模拟方法.

**关键词** 地震波 数值模拟 非均匀介质 微分算子

**文章编号**: 0253-3782(2008)04-0377-06

**中图分类号**: P631

**文献标识码**: A

## Numerical simulation of seismic wave propagation in complex media by using convolutional differentiator

Li Xinfu<sup>1,2),\*</sup> Li Xiaofan<sup>2)</sup>

1) *State Key Laboratory of Geological Processes and Mineral Resources, China University of Geosciences, Beijing 100083, China*

2) *State Key Laboratory of Lithospheric Evolution, Institute of Geology and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China*

**Abstract:** We apply the forward modeling algorithm constituted by the Forsyte Generalized Orthogonal Polynomials proposed by former workers to the seismic wave simulation of complex heterogeneous media, and compare the efficiency and accuracy between this algorithm and other simulation approaches, such as finite difference and pseudospectral method. Numerical experiments demonstrate that the algorithm constituted by Convolutional Forsyte Polynomial Differentiator has high efficiency and accuracy, and needs less computational resources, so it is a numerical modeling method with much potential.

**Key words:** seismic wave; numerical simulation; heterogeneous media; differential operator

<sup>\*</sup> **基金项目** 中国地质大学地质过程与矿产资源国家重点实验室课题(GPMR0750)和国家自然科学基金重点项目(40437018)联合资助.

**收稿日期** 2007-09-24 收到初稿, 2008-05-06 决定采用修改稿.

<sup>+</sup> **通讯作者** e-mail: xinfu@cgub.edu.cn

## 引言

地震波场的数值算法和正演模拟历来都是地震学研究的一个热门领域. 迄今为止, 地震波场正演模拟的数值算法已有很多. 但人们谈起地震波场数值模拟方法, 通常都是指几何射线法, 积分方程法, 或基于波动方程直接解法的有限差分法、伪谱法、有限元法和谱元法. 然而, 一些也是非常重要的数值计算方法, 如细胞自动机法(李幼铭, 胡健行, 1995), 辛几何算法(罗明秋等, 2001), 褶积微分算子法(Zhou, Greenhal, 1992; Zhou *et al*, 1993; 张中杰等, 1996; 戴志阳等, 2005)等很容易被忽略. 这些方法都是吸收计算数学的一些思想, 并成功地将其应用于地震波场的数值模拟. 前人发展的这些方法都各具特点. 在数值计算中, 前人提出的褶积微分算子都利用傅里叶正反变换技术来构造, 而傅里叶方法是一种全局算法, 即它实际上是使用了长度是空间采样点数的长褶积滤波器(张中杰等, 1996). 常规有限差分法由于使用了短算子而具有算法简单快速的特点, 但难以克服频散效应, 而要解决这一问题, 须加密数值计算的网格, 这势必导致计算量增加, 效率下降. 本文讨论了将佛尔塞(Forsythe)多项式(谢靖, 1981)微分算子法应用于复杂非均匀介质地震波场数值模拟的问题. 理论模型表明, 该算法可以快速、高保真地模拟弹性波在复杂介质中的传播, 是复杂介质中地震波场模拟的一种新的颇具潜力的工具.

## 1 佛尔塞广义正交多项式微分算子法基本原理

根据程冰洁等(2008)的推导, 佛尔塞多项式微分算子可写为

$$\frac{d}{dx} = C_1 + \sum_{k=2}^N C_k P'_k(x) \quad (1)$$

其中

$$C_k = \frac{\sum_{i=1}^m P_k(x_i)}{\sum_{i=1}^m P_k^2(x_i)}$$

将上述微分算子式(1)离散化可得

$$d_1(i\Delta x) = C_1 + \sum_{k=2}^N C_k P'_k(i\Delta x) \quad (2)$$

式中,  $i$  为采样指标,  $\Delta x$  为沿着  $x$  轴的采样间隔. 为了消除 Gibbs 效应和 Runge 现象, 程冰洁等(2008)采用高斯窗函数截断长微分算子, 得到如下实用的一阶微分算子:

$$\hat{d}_1(i\Delta x) = \begin{cases} (-1)^i d_1(i\Delta x) w(i) & i = 1, 2, \dots, m \\ -\hat{d}_1(j\Delta x) & i = -1, -2, \dots, -m \quad j = -i \end{cases} \quad (3)$$

$$\hat{d}_1(0\Delta x) = 0$$

其中, 高斯窗函数表达式为

$$w(i) = ce^{-ai\Delta x^2} \quad |i| = 0, 1, 2, \dots, m \quad (4)$$

此处,  $m$  为单边截断长度的采样数,  $c$  为常数,  $a(0.1 \leq a \leq 0.75)$  为衰减因子.

本文运用算子长度为9点的一阶微分算子求解弹性波场的一阶速度-应力方程. 根据

式(3)、式(4)计算出的 9 点微分算子的最优系数为:  $-0.00234, 0.00874, -0.0274, 0.085, 0.0, -0.085, 0.0274, -0.00874, 0.00234$ . 可以看出, 算子的系数是反对称的. 图 1 是 9 点微分算子振幅随采样点的变化曲线. 从图中可以看出, 算子振幅随采样点可以很快地衰减.

程冰洁等(2008)以  $f(x) = e^{-a^2 x^2}$ , 且  $a = 1/\Delta x$ 、 $\Delta x = 10$  作为检验函数, 检验了佛尔塞广义正交多项式褶积微分算子的计算精度. 数值试验表明, 9 点 Forsyte 褶积微分算子法的解比错格伪谱微分算子法的数值解要精确得多, 与 16 阶有限差分法差不多. 因此, 9 点佛尔塞褶积微分算子法可以较精确地模拟地震波场.

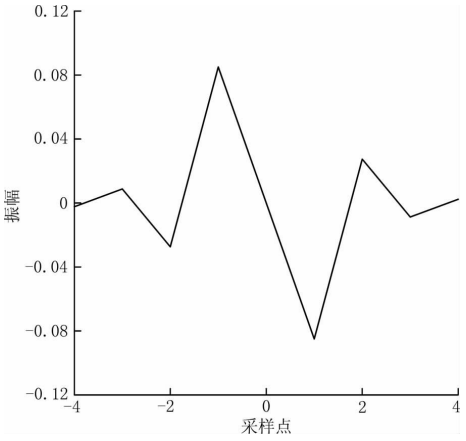


图 1 9 点褶积微分算子振幅随采样点的变化曲线

Fig. 1 Amplitude versus sampling point for nine-point convolutional differentiator

## 2 佛尔塞广义正交多项式微分算子法弹性波场模拟

### 2.1 二维非均匀各向同性弹性波基本方程

对于二维非均匀各向同性介质, 一阶速度-应力弹性波动方程(假定体力为零)为

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (5)$$

式中,  $v_x$  和  $v_z$  分别为  $x$  方向与  $z$  方向的速度分量;  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xz}$  和  $\sigma_{zz}$  是应力分量;  $\lambda$  和  $\mu$  是拉梅常数.

设  $n, m, k$  分别为沿空间  $x$  轴、 $z$  轴及时间  $t$  轴的采样点数;  $\Delta x, \Delta z, \Delta t$  分别为沿  $x$  轴、 $z$  轴、 $t$  轴的采样间隔;  $m_x$  和  $m_z$  分别为沿  $x$  轴、 $z$  轴采样数的单边算子长度;  $\rho(n\Delta x, m\Delta z)$ ,  $\lambda(n\Delta x, m\Delta z)$ ,  $\mu(n\Delta x, m\Delta z)$  分别为非均匀介质的密度及拉梅常数;  $v_x$  和  $v_z$  分别为地震波场速度的  $x$  分量和  $z$  分量. 对模型区间离散后, 二维非均匀各向同性介质弹性波一阶速度-应力方程的离散化时间错格差分微分算子法格式为(体力为零)

$$\begin{aligned} v_x \left( n, m, k + \frac{1}{2} \right) &= v_x \left( n, m, k - \frac{1}{2} \right) + \frac{\Delta t}{\rho(n\Delta x, m\Delta z)} \left\{ \Delta x \cdot \sum_{i=-m_x}^{m_x} \hat{d}_1(i\Delta x) \cdot \right. \\ &\quad \left. \sigma_{xx}(n-i, m, k) + \Delta z \cdot \sum_{i=-m_z}^{m_z} \hat{d}_1(j\Delta z) \cdot \sigma_{xz}(n, m-j, k) \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

$$v_z\left(n,m,k+\frac{1}{2}\right)=v_z\left(n,m,k-\frac{1}{2}\right)+\frac{\Delta t}{\rho(n\Delta x,m\Delta z)}\left\{\Delta x\cdot\sum_{i=-mx}^{mx}\hat{d}_1(i\Delta x)\cdot\right. \\ \left.\sigma_{xz}(n-i,m,k)+\Delta z\cdot\sum_{j=-mz}^{mz}\hat{d}_1(j\Delta z)\cdot\sigma_{zx}(n,m-j,k)\right\}$$

(7)

$$\sigma_{xx}(n,m,k+1)=\sigma_{xx}(n,m,k)+\Delta t\cdot\left\{\left[\lambda(n\Delta x,m\Delta z)+2\mu(n\Delta x,m\Delta z)\right]\cdot\right. \\ \left.\Delta x\cdot\sum_{i=-mx}^{mx}\hat{d}_1(i\Delta x)\cdot v_x\left(n-i,m,k+\frac{1}{2}\right)+\lambda(n\Delta x,m\Delta z)\cdot\Delta z\cdot\right. \\ \left.\sum_{j=-mz}^{mz}\hat{d}_1(j\Delta z)\cdot v_z\left(n,m-j,k+\frac{1}{2}\right)\right\}$$

(8)

$$\sigma_{zz}(n,m,k+1)=\sigma_{zz}(n,m,k)+\Delta t\cdot\left\{\lambda(n\Delta x,m\Delta z)\cdot\Delta x\cdot\sum_{i=-mx}^{mx}\hat{d}_1(i\Delta x)\cdot\right. \\ \left.v_x\left(n-i,m,k+\frac{1}{2}\right)+\left[\lambda(n\Delta x,m\Delta z)+2\mu(n\Delta x,m\Delta z)\right]\cdot\Delta z\cdot\right. \\ \left.\sum_{j=-mz}^{mz}\hat{d}_1(j\Delta z)\cdot v_z\left(n,m-j,k+\frac{1}{2}\right)\right\}$$

(9)

$$\sigma_{xz}(n,m,k+1)=\sigma_{xz}(n,m,k)+\Delta t\cdot\mu(n\Delta x,m\Delta z)\cdot\left\{\Delta x\cdot\sum_{i=-mx}^{mx}\hat{d}_1(i\Delta x)\cdot\right. \\ \left.v_z\left(n-i,m,k+\frac{1}{2}\right)+\Delta z\cdot\sum_{j=-mz}^{mz}\hat{d}_1(j\Delta z)\cdot v_x\left(n,m-j,k+\frac{1}{2}\right)\right\}$$

(10)

本文中的子波函数采用 Ricker 子波(俞寿朋,1996). 边界条件采用 Cerjan 等(1985)以及 Kosloff(1986)等提出的吸收边界条件.

2.2 数值实验

2.2.1 模型 I：复杂非均匀介质模型

图 2 为复杂的非均匀介质模型,模型参数如表 1 所示. 模型的网格大小为150×120,以网格点数为模型坐标,网格间距Δx=Δz=10 m,采样间隔Δt=1 ms. 震源放置于介质

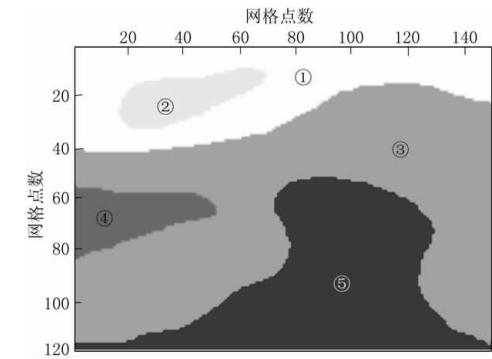


图 2 复杂非均匀介质模型 I

①—⑤代表不同的介质

Fig.2 Model I for complex heterogeneous medium

①—⑤ represents different media

表 1 模型 I 的物性参数  
Table 1 Parameters for model I

介质	$\rho/\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$	$v_P/\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	$v_S/\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
①	1.9	3400	1950
②	2.0	3550	2100
③	2.2	3900	2200
④	2.3	4100	2300
⑤	2.5	4600	2650

①中,坐标为(75,15),运用爆炸源进行波场模拟,震源 Ricker 子波主频为 25 Hz. 图 3 为模型 I 在 400 ms 时  $x$  分量和  $z$  分量的波场快照.

从图 3 可以看出,基于佛尔塞广义正交多项式微分算子波场模拟方法能较好地模拟特别复杂的非均匀介质中的地震波场.

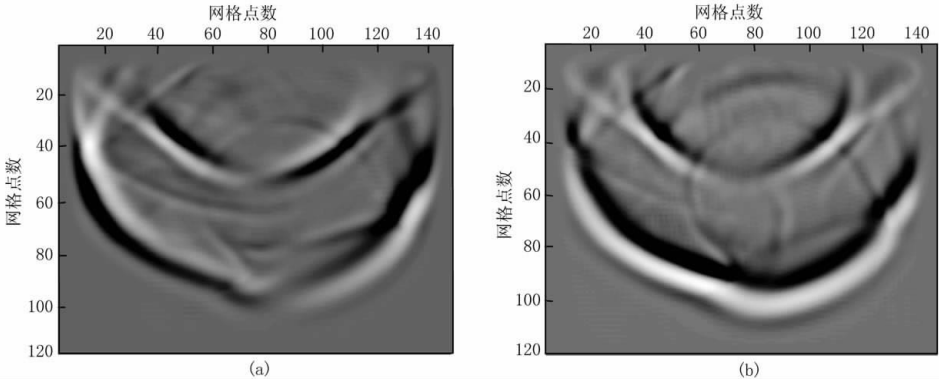


图 3 模型 I 在 400 ms 时的波场快照. (a)  $x$  分量; (b)  $z$  分量

Fig. 3 Snapshots of model I at the time of 400 ms. (a)  $x$  component; (b)  $z$  component

2.2.2 模型 II：经典 Marmousi 模型弹性波场模拟

Marmousi 模型是检验地震波成像效果及估计速度精度的标准模型. 该模型在构造上十分复杂, 模型的空间网格为  $384 \times 122$ , 网格间距  $\Delta x = \Delta z = 10$  m. 利用基于佛尔塞广义正交多项式微分算子的波场模拟法对模型进行数值模拟, 采样间隔  $\Delta t = 1$  ms, 震源坐标为 (192, 20), Ricker 子波主频为 25 Hz. 在原始 Marmousi 模型的纵波速度基础上获得其它介质参数, 即用  $v_s = v_p / \sqrt{3}$  计算横波速度, 运用 Gardner 公式  $\rho = 310 \times v_p^{0.25}$  计算模型密度. 图 4 为 Marmousi 速度模型示意图, 图 5 为 Marmousi 模型 400 ms 时  $x$  分量与  $z$  分量的波场快照.

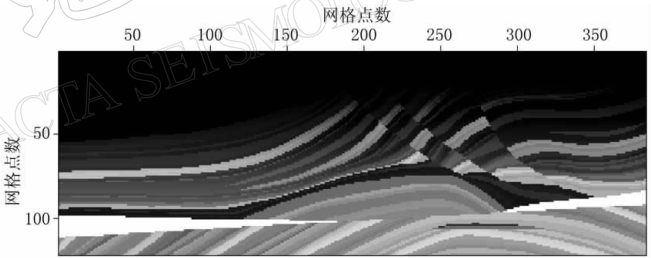


图 4 Marmousi 速度模型示意图  
Fig. 4 Marmousi velocity model

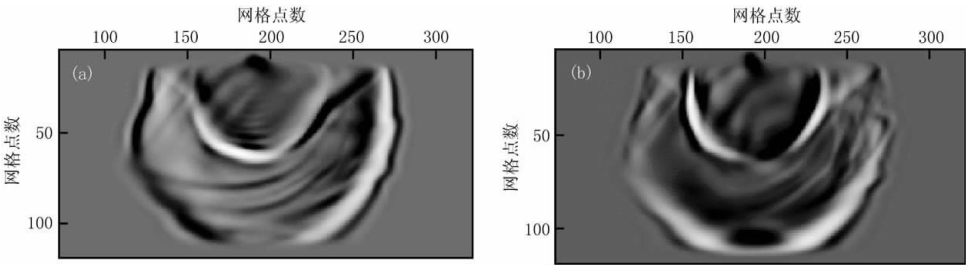


图 5 Marmousi 模型 400 ms 时的波场快照. (a)  $x$  分量; (b)  $z$  分量  
Fig. 5 Snapshots for Marmousi model at the time of 400 ms  
(a)  $x$  component; (b)  $z$  component

从 Marmousi 模型的波场快照来看,震源发出的地震波在介质界面和突变点处产生的反射和绕射等现象非常明显.基于佛尔塞广义正交多项式褶积微分算子的数值模拟方法,能很好地模拟地震波在速度变化比较剧烈的介质中的传播.

### 2.3 与伪谱法的时间比较

假设二维空间计算区域的大小为  $N \times N$ ,微分算子的长度为  $M$ .对波动方程进行数值模拟时,若使用伪谱法,则需要  $N^2 \log_2 N$  次复数乘法;而若使用本文的微分算子法,则只需要  $M \times N^2$  次实数乘法.显然,微分算子法与伪谱法的计算时间比为  $M/(4 \log_2 N)$ .只要  $M < (4 \log_2 N)$ ,微分算子法将比伪谱法的计算速度快.例如,在  $256 \times 256$  的计算区域内,9 点微分算子法与伪谱法的计算时间比为 9:32,即伪谱法(Zhou *et al*, 1993)的计算速度此时是本文方法的 3.5 倍.

## 3 讨论和结论

本文结果是将广义正交多项式微分算子应用于地震波场正演模拟的一个新的应用.该微分算子具有快速衰减和反对称性质.通过引入高斯窗,极大程度地压制了算子截断所引起的吉谱斯效应.理论模型计算结果表明,该方法计算速度快、效率高.这种方法是继戴志阳等(2005a, b)发展的褶积微分算子法之后的又一种弹性波数值模拟的颇具潜力的工具.

### 参 考 文 献

- 程冰洁, 李小凡, 龙桂华. 2008. 基于广义正交多项式褶积微分算子的地震波场数值模拟方法[J]. 地球物理学报, **51**(2): 531-537.
- 戴志阳, 孙建国, 查显杰. 2005a. 地震波场模拟中的褶积微分算子法[J]. 吉林大学学报(地球科学版), **35**(4): 520-524.
- 戴志阳, 孙建国, 查显杰. 2005b. 地震波混合阶褶积算法模拟[J]. 物探化探计算技术, **27**(2): 111-114.
- 李幼铭, 胡健行. 1995. 细胞自动机在地震波传播中的应用[J]. 地球物理学报, **38**(5): 651-661.
- 罗明秋, 刘洪, 李幼铭. 2001. 地震波场的辛几何算法[J]. 地球物理学报, **44**(1): 120-128.
- 谢靖. 1981. 物探数据处理的数学方法[M]. 北京: 地质出版社: 97-104.
- 俞寿朋. 1996. 宽带 Ricker 子波[J]. 石油地球物理勘探, **31**(5): 605-615.
- 张中杰, 滕吉文, 杨顶辉. 1996. 声波与弹性波场数值模拟中的褶积微分算子法[J]. 地震学报, **18**(1): 60-69.
- Cerjan C, Kosloff D, Kosloff R, Reshef M. 1985. A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equation[J]. *Geophysics*, **50**: 705-708.
- Kosloff R. 1986. Absorbing boundaries for wave propagation problems[J]. *J Comput Phys*, **63**: 363-376.
- Zhou B, Greenhalgh S A. 1992. Seismic scalar wave equation modeling by a convolutional differentiator[J]. *Bull Seism Soc Amer*, **82**(1): 289-303.
- Zhou B, Greenhalgh S A, Zhe J. 1993. Numerical seismogram computations for inhomogeneous media using a short, variable length convolutional differentiator[J]. *Geophysical Prospecting*, **41**: 751-766.