

受低频动态正压力加载的椭球腔的 地震矩张量表示及其在无限 介质中辐射的地震波^{*}

靳 平¹⁾ 徐果明¹⁾ 楼为涛²⁾

1) 中国合肥 230026 中国科学技术大学地球与空间科学系

2) 中国西安 710024 西北核技术研究所

摘要 受低频动态正压力加载的椭球腔在弹性介质中激发的地震波可以用 Eshelby 方法进行求解. 本文证明, 在地震波的波长远大于空腔尺寸的条件下, 为处理有关椭球体夹杂的弹性静力学问题而发展起来的这一方法可以推广到动态的情况. 球腔问题的近似解与精确解之间的比较表明, 当空腔半径在 100 m 以下时, 这一方法适用于 10 Hz 以下的频带. 由此方法证明, 对低频远场解来说, 受动态加载的椭球腔, 可以用 3 个方向和椭球的主轴方向相一致的偶极子来加以等效. 文中解析地求出了相应的地震辐射图型. 由此得出的结果表明, 椭球腔中的爆炸可以辐射出有重要意义的 S 波.

主题词 地震矩 地震波 椭球腔 空腔爆炸 辐射图型

引言

地震监测是对禁核试条约最有效最经济的核查手段. 有许多判据可以用来识别天然地震和地下爆炸, 其中 S 波与 P 波的幅值比非常重要. 进行空腔解耦爆炸是逃避地震监测的手段之一. 这样可以使耦合到地下介质中的地震能量大大降低 (Springer *et al.*, 1968; Stevens *et al.*, 1991), 从而减少事件被检测到的可能性.

其它的一些手段也可以被利用来逃避监测. 例如, 进行非球对称空腔中的爆炸 (Glenn *et al.*, 1985, 1986; Rial, Moran, 1986) 或者球对称空腔中的离心爆炸 (Zhao, Harkrider, 1992), 可以为地使得爆炸源呈现各向异性的性质. 非球对称爆炸源产生的地震波辐射图型不再是各向同性的, 同时源本身可以直接激发出 S 波. 这些效应会给识别工作及当量估算增加新的困难.

用解析的方法求解非对称空腔中爆炸激发的地震波通常是非常困难的. 这方面的工作曾有 Heelan (1953) 和 Hazebroek (1966) 做过研究. 前者分析了无限均匀介质中一根短的、底部不受力的圆柱形空腔受到动态压力作用时激发的地震波. 尽管 Abo-zena (1977) 指出了其推导过程中的某些不准确之处, 但他给出的远场解得到了证实 (White, 1965). Hazebroek (1966) 讨论了内表面受正压力加载的椭球腔在横截面趋于消失时所激发的地震波.

* 1996-06-05 收到初稿, 1997-04-04 收到修改稿并决定采用

在经过十分冗长的推导和一系列的近似之后, 他得出的结论认为, 一个有限长线源辐射的低频远场 P 波是各向同性的, 同时有辐射花样呈哑铃形的 S 波被激发. 这一结论令人难以理解, 因为很难想象出怎样的点力源或点偶极子源的组合使其能产生这样的辐射花样.

80 年代数值方法被应用到这一领域的研究当中. Glenn 等(1985, 1986)应用表象定理和边界元法计算了几种非球对称旋转空腔, 包括旋转椭球腔, 在受到动态加载时地震波的频谱随方向的变化. 计算结果表明, P 波的辐射花样是非各向同性的. 他们得到的一个重要结果是, 在椭球腔的长轴瞄准的方向上可以实现较大的高频解耦因子. 但是, 除花费的机时之外, 数值方法在一般应用中往往不够方便灵活. 为一般目的起见, 最好能够得出受动态加载的椭球腔的地震矩张量表示. Rial 和 Moran (1986)认为, 旋转椭球腔的低频远场辐射图型, 可以通过对底部不受力的短圆柱的辐射图型和椭球长轴方向上的偶极子的远场辐射图型进行适当加权来得到. 他们用数值方法验证了这一假设, 同时确定了相应的权重.

本文应用 Eshelby(1957)方法求解低频条件下椭球腔中爆炸的地震矩张量表示. 这一方法本来是为了解决有关椭球体夹杂的弹性静力学问题而发展起来的, 本文将其推广到动态低频的情况. 文中假定爆炸是完全解耦的, 空腔内表面上的压力是均匀的. 这一点在波长远大于空腔半径时是可以接受的.

1 理论

Eshelby 方法的详细情况可参见 Eshelby(1957). 这里只对文中需要用到的有关概念和公式作一简单介绍, 然后在低频条件下将这一方法推广到动态问题. 如图 1 所示, 设想一

弹性区域 D 中的子域 Ω (“夹杂”)受到应变为 $\epsilon_{ij}^*(x', \omega)$ 的初始非弹性变形. 其中 x' 表示源点位置, ω 为圆频率. 在没有约束的情况下这一非弹性应变场不会引起 Ω 内的应力变化. 因此, 它有时被称作无应力应变(Eshelby, 1957)或本征应变(张宏图, 陈易之, 1989). 当 Ω 中的介质性质与 Ω 外的介质的性质完全相同时, 这样的问题称之为同性夹杂问题; 当 Ω 中的介质性质与 Ω 外的介质的性质不相同时, 称之为异性夹杂问题. 为方便起见, 下面涉及到动态的讨论都将在频率域中进行. 这一无应力应变引起 D 中的位移场为

$$u_m(x, \omega) = - \int_{\Omega} C_{ijkl} G_{km,l}(x - x'; \omega) \times \epsilon_{ij}^*(x', \omega) d x' \quad (1)$$

式中, C_{ijkl} 为介质的弹性模量, $G_{km}(x - x'; \omega)$ 为源在 x' 、接收点在 x 时的格林函数. 下标 “ l ” 表示对接收点坐标 x_l 的偏导数. 当 D 为全空间, Ω 为椭球域

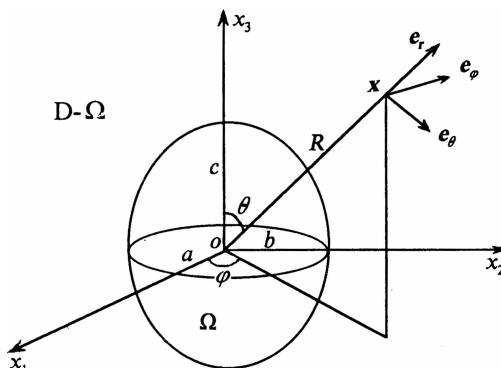


图 1 空腔形状及坐标系示意图. 直角坐标系的 3 个轴分别与椭球腔 Ω 的主轴方向相一致. 椭球腔半轴长为 a, b, c . 接收点到空腔中心的距离为 R , 极角为 θ , 方位角为 φ

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} \leq 1$$

时, 对均匀静态应变 $\epsilon_{ij}^*(x', \omega) = \epsilon_{ij}^*$, 则有

$$u_m(x) = -C_{ijkl}\epsilon_{ij}^* \frac{\partial}{\partial x_l} \int_{\Omega} G_{km}(x - x') dx'$$

特别, 对各向同性介质

$$u_m(x) = -\frac{\lambda\delta_{kl}\epsilon_{ii}^* + 2\mu\epsilon_{kl}^*}{8\pi\mu} (2\delta_{km}\varphi_{,l} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\psi_{,klm}) \quad (2)$$

式中, λ, μ 是介质的拉梅常数, δ_{ij} 为克罗内克符号, 函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 由下式给出:

$$\varphi(x) = \int_{\Omega} \frac{1}{|x - x'|} dx' \quad \psi(x) = \int_{\Omega} |x - x'| dx'$$

介质中的总应变场为

$$\gamma_{mn}(x) = -\frac{\lambda\delta_{kl}\epsilon_{ii}^* + 2\mu\epsilon_{kl}^*}{8\pi\mu} (\delta_{km}\varphi_{,nl} + \delta_{kn}\varphi_{,lm} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\psi_{,klmn}) \quad (3)$$

$\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 实际上是互不独立的. 根据 Eshelby(1957), 当 x 在 Ω 内时, 有

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(a^2 - x_1^2)I_a + \frac{1}{2}(b^2 - x_2^2)I_b + \frac{1}{2}(c^2 - x_3^2)I_c \quad (4)$$

$$\nabla^2\psi = 2\varphi \quad (5)$$

$$\psi_{,12} = \frac{a^2}{a^2 - b^2}x_2\varphi_{,1} + \frac{b^2}{b^2 - a^2}x_1\varphi_{,2} \quad (6)$$

类似地可以求出和 $\psi_{,23}$ 和 $\psi_{,31}$. 式(4)中系数 I_a 的定义是

$$I_a = 2\pi abc \int_0^{\infty} \frac{d\zeta}{(a^2 + \zeta)\Delta} \quad (7)$$

$$\Delta = \sqrt{(a^2 + \zeta)(b^2 + \zeta)(c^2 + \zeta)} \quad (8)$$

I_b, I_c 可以类似地求出. 没有必要求出 $\psi_{,11}, \psi_{,22}$ 及 $\psi_{,33}$, 因为 $\psi(x)$ 的三阶导数 $\psi_{,ijk}$ 全部都可以从 $\varphi, \psi_{,12}, \psi_{,23}$ 和 $\psi_{,31}$ 求出. 例如有

$$\psi_{,112} = (\psi_{,12})_{,1} \quad \psi_{,111} = 2\varphi_{,1} - (\psi_{,12})_{,2} - (\psi_{,13})_{,3} \quad (9)$$

由于上述结果, 介质的总应变场在 Ω 内也是均匀的, 且有

$$\gamma_{mn} = S_{mnkl}\epsilon_{kl}^* \quad (10)$$

其中, S_{mnkl} 为一四阶张量, 它有时也被称做 Eshelby 张量. 它的分量仅仅当其下标具有 $S_{iii}, S_{iij}, S_{ijj}$, ($i \neq j$, 不对下标求和) 的形式时才不为 0. 这些不为 0 的张量元素的值可类似地用下面方法求出:

$$\begin{aligned} 8\pi(1-\nu)S_{1111} &= \frac{a^2 I_a - b^2 I_b}{a^2 - b^2} + \frac{a^2 I_a - c^2 I_c}{a^2 - c^2} + 2(1-\nu)I_a \\ 8\pi(1-\nu)S_{1122} &= 2\nu I_a - \frac{a^2 I_a - b^2 I_b}{a^2 - b^2} \end{aligned} \quad (11)$$

$$8\pi(1-\nu)S_{1212} = -\frac{1}{2} \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} (I_a - I_b) + \frac{1}{2}(1-2\nu)(I_a + I_b)$$

以上结果应归功于 Eshelby. 由于椭球体同性夹杂的这一特性, 他进一步引入了处理异性夹杂问题的等效方法. 例如, 对无穷介质中的一个椭球腔, 当空腔 Ω 的边界受到一静压力 p 的作用时, $D - \Omega$ 中的位移场本应该是如下边值问题的解:

I

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad \mathbf{x} \notin \Omega \quad \sigma_{ij} n_j |_{\Sigma} = -pn_i$$

其中, $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \gamma_{kl}$ 为 Ω 外介质中的应力, Σ 为 Ω 的边界, n_j 为 Σ 的外法向 \mathbf{n} 的方向余弦. 但上述问题可等效成同性夹杂问题来加以求解. 即假定 Ω 中的介质性质与 Ω 外的介质的性质完全相同, 但在 Ω 内有均匀的无应力应变场 ϵ_{ij}^* 存在. 此时, 整个 D 中的位移场为如下数学问题的解:

$$\text{II} \quad C_{ijkl} (\gamma_{kl} - \epsilon_{kl}^*)_{,j} = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad C_{ijkl} \gamma_{kl,j} = 0 \quad \mathbf{x} \notin \Omega$$

$$C_{ijkl} (\gamma_{kl} - \epsilon_{kl}^*) n_j |_{\Sigma^-} = C_{ijkl} \gamma_{kl} n_j |_{\Sigma^+} \quad u_m |_{\Sigma^-} = u_m |_{\Sigma^+}$$

假如有如下边界条件 $C_{ijkl} (\gamma_{kl} - \epsilon_{kl}^*) n_j |_{\Sigma^-} = -pn_i$, 则在 $D - \Omega$ 中由 ϵ_{kl}^* 产生的位移场与问题 I 的解完全相同. 为此, 只需要令无应力应变场满足如下方程:

$$C_{ijkl} (S_{klmn} \epsilon_{mn}^* - \epsilon_{kl}^*) = -p\delta_{ij} \quad (12)$$

上述方法一般不易应用到动态的问题, 因为由椭球域 Ω 中的空间上均匀的动态无应力应变场 $\epsilon_{kl}^*(t)$ 产生的总应变场即使在 Ω 内也是不均匀的, 也不可能找到一均匀的动态无应力应变场, 使得它激发的总应变场满足 Ω 边界上的边值条件. 不过, 对于低频载荷, 我们可以近似地做到这一点.

由式(1), Ω 内的空间上均匀的动态无应力应变 $\epsilon_{ij}^*(\omega)$ 在介质中激发的位移场为

$$u_m(\mathbf{x}, \omega) = -C_{ijkl} \epsilon_{ij}^*(\omega) \frac{\partial}{\partial x_l} \int_{\Omega} G_{km}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; \omega) d\mathbf{x}'$$

当 D 为全空间时, 上式中积分号后的格林函数为

$$G_{km}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; \omega) = \frac{1}{4\pi\rho} \left\{ \left(\frac{e^{i\omega\bar{x}/\alpha}}{\alpha^2} - \frac{e^{i\omega\bar{x}/\beta}}{\beta^2} \right) \frac{\bar{x}_k \bar{x}_m}{\bar{x}^3} + \frac{\delta_{km} e^{i\omega\bar{x}/\beta}}{\beta^2 \bar{x}} + \right. \right. \\ \left. \left. \left(\frac{1}{\bar{x}} \right)_{,km} \left[\frac{1}{i\omega} \left(\frac{\bar{x}}{\beta} e^{i\omega\bar{x}/\beta} - \frac{\bar{x}}{\alpha} e^{i\omega\bar{x}/\alpha} \right) - \frac{1}{(i\omega)^2} (e^{i\omega\bar{x}/\beta} - e^{i\omega\bar{x}/\alpha}) \right] \right\} \quad (13)$$

其中, $\bar{x} = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$; $\bar{x}_k = x_k - x'_k$; α, β 分别为 P 波和 S 波速度, ρ 为介质密度. 注意到

$$e^{i\omega\bar{x}/\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\omega\bar{x}}{\alpha} \right)^n \quad e^{i\omega\bar{x}/\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\omega\bar{x}}{\beta} \right)^n$$

并将它们代入式(13), 得到格林函数的泰勒展开为

$$G_{km}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; \omega) = \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\delta_{km}}{\bar{x}} \sum_{n=0}^{\infty} (i\omega\bar{x})^n \left[\frac{\beta^{-n-2}}{n!} + \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} \right) \times \right. \\ \left. (\alpha^{-n-2} - \beta^{-n-2}) \right] + \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\bar{x}_k \bar{x}_m}{\bar{x}^3} \sum_{n=0}^{\infty} (i\omega\bar{x})^n \left[\frac{1}{n!} - 3 \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} \right) \right] (\alpha^{-n-2} - \beta^{-n-2}) \quad (14)$$

这一展开对任意的 ω 和 \bar{x} 都是成立的. 在波长远大于空腔尺寸的低频条件下, 由上式写出直到 ω 的二次项, 有

$$G_{km}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; \omega) = G_{km}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; 0) + \frac{i\omega\delta_{km}}{12\pi\rho} (2\beta^{-3} + \alpha^{-3}) - \\ \frac{\omega^2 \bar{x}_k \bar{x}_m}{32\pi\rho\alpha^2} (\beta^{-4} - \alpha^{-4}) + \frac{\omega^2 \bar{x}_k \bar{x}_m}{32\pi\rho} (3\beta^{-4} + \alpha^{-4}) + O(\omega^3) \quad (15)$$

上式中等号左边的第一项

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} \frac{\delta_{km}}{\bar{x}} + \frac{1}{8\pi\rho\alpha^2} (\alpha^{-2} - \beta^{-2}) \left(\delta_{km} - \frac{\bar{x}_k \bar{x}_m}{\bar{x}^2} \right) \quad (16)$$

即为静态格林函数, 第二项在位移和应变的表达式中将消失. 因此, 椭球域 Ω 内的均匀无应力应变 $\epsilon_{ij}^*(\omega)$ 在 Ω 中产生的位移场为

$$u_m(\mathbf{x}, \omega) \approx -C_{ijkl}\epsilon_{ij}^*(\omega) \frac{\partial}{\partial x_l} \int_{\Omega} G_{km}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; 0) d\mathbf{x}' + \frac{\omega^2}{32\pi\rho} C_{ijkl}\epsilon_{ij}^*(\omega) \times \left\{ (\beta^{-4} - \alpha^{-4}) \frac{\partial}{\partial x_l} \int_{\Omega} \frac{\bar{x}_k \bar{x}_m}{x} d\mathbf{x}' - (3\beta^{-4} + \alpha^{-4}) \delta_{km} \frac{\partial}{\partial x_l} \int_{\Omega} \bar{x} d\mathbf{x}' \right\} \quad (17)$$

而在 Ω 中相应的总应变场为

$$\gamma_{mm} = \frac{u_{m,n} + u_{n,m}}{2} = S_{mmkl}\epsilon_{kl}^* + \tilde{\gamma}_{mm} \quad (18)$$

等式右边的第一项和静态时的结果是完全相同的, 而余项 $\tilde{\gamma}_{mm}$ 为类似于

$$\frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_n} \int_{\Omega} \bar{x} d\mathbf{x}' \quad \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_n} \int_{\Omega} \frac{\bar{x}_k \bar{x}_m}{x} d\mathbf{x}'$$

的一些项的线性组合. 其中第一种形式的项即 ϕ_{nl} , 在 Ω 内它是坐标 x_1, x_2, x_3 以及椭球的半轴长 a, b, c 的二次函数. 对第二项我们有

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_n} \int_{\Omega} \frac{\bar{x}_k \bar{x}_m}{x} d\mathbf{x}' \right| = \left| \int_{\Omega} f(\mathbf{v}) \frac{1}{x} d\mathbf{x}' \right| \leq \int_{\Omega} |f(\mathbf{v})| \frac{1}{x} d\mathbf{x}' \leq N\varphi(\mathbf{x}) \quad (19)$$

$$f(\mathbf{v}) = 3v_k v_l v_m v_n - \delta_{kn} v_m v_l - \delta_{kn} v_l v_m - \delta_{kl} v_m v_n - \delta_{lm} v_k v_n - \delta_{nl} v_k v_m + \delta_{kn} \delta_{lm} + \delta_{nm} \delta_{kl}$$

其中, v_k 为矢量 $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ 的方向余弦, N 为一正的常数. 在得出式(19)中的最后一个不等式时, 利用了下面这一事实, 即 $f(\mathbf{v})$ 实际上是有限的. 注意到 $\varphi(\mathbf{x})$ 也是坐标分量 x_1, x_2, x_3 和 Ω 的半轴长 a, b, c 的二次函数, 因此在椭球域 Ω 内 $\tilde{\gamma}_{mm}$ 相对于 γ_{mm} 在 $\omega^2 \alpha^2 \beta^{-2}$ 的量级, 即有

$$\frac{\tilde{\gamma}_{mm}}{\gamma_{mm}} \propto \frac{\omega^2 \alpha^2}{\beta^2} \propto \left(\frac{a}{\Lambda} \right)^2 \quad (20)$$

其中, a 为椭球的半长轴, Λ 为地震波波长. 对 a 为 100 m 的椭球腔和频率为 1 Hz 的扰动, 当介质的 S 波速度 β 为 3 km/s 时, 比值 $\omega^2 \alpha^2 / \beta^2$ 不超过 10%. 因此, 对低频扰动, 可以认为在椭球域 Ω 内式(10)仍然近似地成立, 所以可将 Eshelby 方法推广到椭球腔受动态加载的问题.

2 动态加载的椭球腔的地震矩张量表示

设想在无限的均匀各向同性弹性介质中有一个半轴长分别为 a, b, c 的椭球腔. 腔壁受到均匀分布的正压力 $p(t)$ 的作用. 根据上一节的分析, 此椭球腔激发的低频地震波可以用 Eshelby 方法进行求解. 为此, 在式(12)中假定 $\epsilon_{ij}^* = \epsilon_i \delta_{ij}$ (不对下标求和). 这时在 Ω 内总的应变场和应力场也都只有对角线上的元素不为 0. 从式(12)得到

$$\begin{cases} (S_{1111} - 1)\epsilon_1(\omega) + S_{1122}\epsilon_2(\omega) + S_{1133}\epsilon_3(\omega) = -P(\omega)/(3\lambda + 2\mu) \\ S_{2211}\epsilon_1(\omega) + (S_{2222} - 1)\epsilon_2(\omega) + S_{2233}\epsilon_3(\omega) = -P(\omega)/(3\lambda + 2\mu) \\ S_{3311}\epsilon_1(\omega) + S_{3322}\epsilon_2(\omega) + (S_{3333} - 1)\epsilon_3(\omega) = -P(\omega)/(3\lambda + 2\mu) \end{cases} \quad (21)$$

其中, $P(\omega)$ 为 $p(t)$ 的富里叶变换. 由这一方程组可以很容易地解出 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 的值. 张量元素 S_{ijij} 不难从式(7)、(8)和(11)求出. 特别是, 对 $a = b \neq c$ 的旋转椭球腔, 类似于式(7)中的积分可解析地积出来(见附录 1). 对于远场低频地震波来说, 根据 Aki 和 Richards (1980), 上述动态夹杂源可等效成地震矩张量

$$M_{ij} = \int_{\Omega} C_{ijkl}\epsilon_{kl}^* dV \quad (22)$$

即

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{pmatrix} \quad (23)$$

其中

$$M_i = [\lambda(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) + 2\mu\epsilon_i]V \quad (24)$$

式中, V 为椭球腔的体积. 相应于上述地震矩张量, 远场地震波在频率域和球坐标系(参见图 1)中的分量为

$$\begin{cases} \mathbf{u}^R(\mathbf{x}, \omega) = \frac{i\omega}{4\pi\alpha^3} (M_1 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + M_2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + M_3 \cos^2 \theta) \frac{e^{i\omega R/\alpha}}{R} \mathbf{e}_R \\ \mathbf{u}^\theta(\mathbf{x}, \omega) = \frac{i\omega}{4\pi\alpha^3} (-M_1 \cos^2 \varphi - M_2 \sin^2 \varphi + M_3) \sin \theta \cos \theta \frac{e^{i\omega R/\beta}}{R} \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{u}^\varphi(\mathbf{x}, \omega) = \frac{i\omega}{4\pi\alpha^3} (M_1 - M_2) \cos \varphi \sin \varphi \sin \theta \frac{e^{i\omega R/\beta}}{R} \mathbf{e}_\varphi \end{cases} \quad (25)$$

这里只取了几何扩散因子为 $\frac{1}{R}$ 的远场项. 对球形空腔, 我们将该问题的近似解和精确解作一比较以检验我们得出的结果. 球腔对应的地震矩的近似解为

$$M_0(\omega) = \frac{3(1-\nu)}{2(1-2\nu)} P(\omega) V \quad (26)$$

相应的严格解析解(可由 Eringen 和 Suhubi (1975) 中的位移势得出)为

$$M(\omega) = \frac{P(\omega)V}{\frac{2(1-2\nu)}{3(1-\nu)}(1 - \frac{i\omega a}{\alpha}) - \frac{\omega^2 a^2}{3\alpha^2}} \quad (27)$$

其中, a 为球腔半径, V 为空腔体积. 图 2 比较了不同的空腔半径下近似解(26)相对于精确解(27)的误差. 可以看出, 空腔半径在 100 m 以下时, 对 10 Hz 以下的频率误差基本上不超过 5%. 这表明在可实现的空腔半径下 Eshelby 方法可以应用到大部分的远场地震学频带.

3 结果和分析

根据上两节的结果计算了不同形状的椭球腔对应的地震矩张量和辐射图型. 图 3 给出了 $a=b\neq c$ 的旋转椭球腔所对应的地震矩张量元素与空腔形状因子 $A_R=c/a$ 的函数关系. 图中的张量元素进行了归一化, 归一化因子取 $M_0(\omega) = \frac{3(1-\nu)}{2(1-2\nu)} P(\omega) V$, 即具有同样的乘积 $P(\omega)V$ 的球腔所对应的地震矩. 为图示方便起见, 地震矩张量被分解成球对称分量及坐标轴 x_3 方向的偶极子, 即

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{pmatrix} = M_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 - M_1 \end{pmatrix} \quad (28)$$

其中, 对旋转椭球 $M_1=M_2$. 从图中可以看出, 随着球对称空腔演化成椭球腔, 上述球对称分量和偶极子的强度都迅速地增加. 但对 $A_R > 1$ 的扁长椭球腔来说, 当形状因子 A_R 很大时, 球对称分量的强度 M_1 和偶极子的强度 $M_1 - M_3$ 都趋近于各自的渐近值. 图 4 给出了

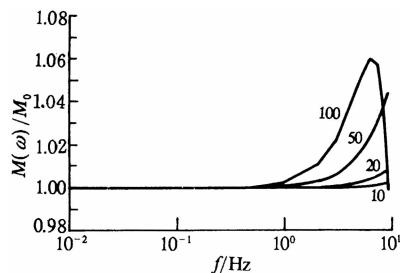


图 2 球腔情况下由 Eshelby 方法得到的地震矩近似解相对于精确解的误差. 纵坐标为精确解与近似解的比值. 曲线旁的数字为相应的以米为单位的球腔半径. P 波速度 $\alpha=6$ km/s, 泊松系数 $\nu=0.25$

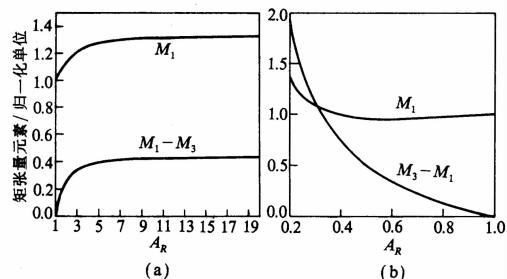


图 3 扁长(a)或扁平(b)的旋转椭球腔所对应的归一化地震矩张量元素随空腔形状因子 $A_R = c/a$ 的变化. 地震矩张量的表示和归一化方法见正文. 泊松系数 $\nu=0.25$

有关 $M_1/M_3 - A_R$ 关系的两条曲线. 其中实线是本文得出的结果, 虚线是 Rial 和 Moran (1986) 所给出结果, 即

$$\frac{M_1}{M_3} = 2(1-\nu) - (1-2\nu)A_R^{-3/2}$$

式中, ν 为 Poisson 系数. 明显地, 二者十分一致.

对形状因子 A_R 略小于 1 的扁平空腔来说, 地震矩张量元素的变化类似于扁长椭球的情形, 不过在这时有 $M_3 > M_1 = M_2$. 在 A_R 趋近于 0 时各张量元素的数值趋于无穷. 这一结果似乎是违反我们的物理直觉的, 但它在弹性力学的范畴内却是正确的. 事实上, 在 A_R 趋近于 0 时空腔实际上演化成了一个裂隙面, 这样一个扁平裂隙面是不能承受作用在其内表面上的趋于无穷的压力(因为乘积 PV 要保持为有限值)所产生的张裂型加载的, 而必然会发生裂隙面的扩展. 这已经超出了线性弹性力学和本文讨论的范围. 后面我们将不再讨论这一情况.

需要指出的是, 即使是对一般的三轴椭球, 如果比例系数 a/b 保持一定, 而系数 c/a 趋向于无穷大时, 则对应地震矩张量的对角元素 M_1, M_2, M_3 仍然趋于各自的渐进值. 反之, 在 c/a 趋于 0 时, 空腔又演化为一个裂隙面, 这时仍然在线弹性力学的范围内进行讨论是毫无意义的.

图 5 给出的是旋转椭球腔在无限介质中的远场辐射图型. 图中给出 P 波和 S 波位移幅值随极角 θ 的变化. 有关位移分量的值用同一距离上的球形空腔(具有相同乘积 $P(\omega)V$)的 P 波位移幅值来进行归一化. 明显地, 当空腔形状开始偏离球对称时, S 波的强度迅速提高. 而在空腔形状偏离球腔很远时, S 波的最大幅值可以和 P 波最大幅值相当甚至超过 P 波的最大幅值. 但是, 如果空腔演化成有限长的线源, 则无论是 P 波还是 S 波的辐射强度都将趋近一极限值. 这一结论与 Rial 和 Moran(1986) 的结果是一致的. 需要指出的是, 他们所给出的是折合速度势(RVP)的计算结果. 因此, S 波相对 P 波的幅值看起来要小一些. 考虑到 P, S 波势分别正比于 α^{-2}, β^{-2} , 而位移正比于 α^{-3}, β^{-3} , 两个结果实际上是一致的.

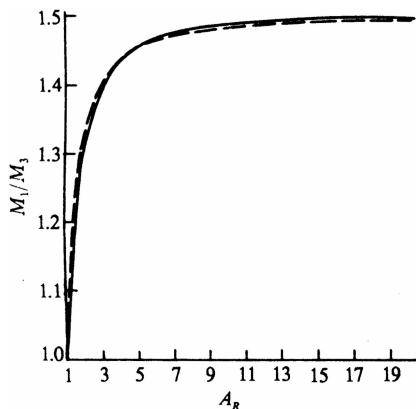


图 4 扁长旋转椭球的 M_1/M_3 - A_R 关系曲线. 实线为本文得出的结果, 虚线为 Rial 和 Moran(1986)给出的结果. 泊松系数 $\nu=0.25$

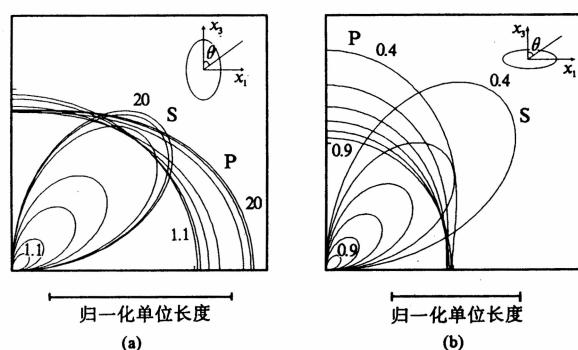


图 5 扁长(a)和扁平(b)旋转椭球腔对应的归一化远场 P 波和 S 波位移辐射图型. 图中垂向对应于极角 $\theta=0^\circ$, 水平向对应于 $\theta=90^\circ$. 图中给出了一个归一化单位对应的长度, 归一化方法参见正文. 同一曲线族(P 或 S)中的各条曲线对应的空腔形状因子从原点向外分别为: (a) 1.1, 1.2, 1.5, 2.0, 5.0, 10.0, 20.0; (b) 0.9, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5, 0.4; 泊松系数 $\nu=0.25$

图 6 给出了一般的三轴椭球的辐射图型的两个例子. 与图 5 不同, 现在表示的是位移分量 u^R , u^θ 和 u^φ 的幅值随方位角 φ 的变化情况, 图中极角 $\theta=45^\circ$. 所有的位移值用和图 5 相同的方法进行了归一化. 在图 6 a 中, 椭球的 3 个半轴长之间的比例取作 $a:b:c=1.0:0.8:1.2$, 这一形状较球腔略有偏离但不是很大. 可以看出, 此时的 P 波辐射图型基本上还是圆对称的, 但同时有一定大小的 S 波, 包括横向运动分量, 被激发出来. 这一点也许有助于更全面地理解地下核爆炸时 S 波的产生机制. 实际上这一图案和某些实际观测到的地下核爆炸的辐射图型(Lambert *et al.*, 1972)是很相似的. 图 6 b 中 $a:b:c=1.0:0.5:10$, 此时有相当强的 S 波被激发. 假如在实践中类似辐射图型可以实现的话, 无疑会给鉴别工作带来额外的困难.

需要强调的是, 本文讨论的是远场解. 在远场 P 波和 S 波的幅值分别正比于 α^{-3} , β^{-3} . 因此, 尽管空腔形状偏离球腔不多时, 地震矩张量中的偏张量成分和球张量相比不是很大, 但在远场可以观测到显著的 S 波. 但是, 在近场或中远场, P 波和 S 波幅值的优势项分别正比于 α^{-1} , β^{-1} 或 α^{-2} , β^{-2} . 因此在近场或中远场, 在同样的非对称空腔下, S 波的幅值相对于 P 波的幅值来说可能就不是十分显著甚至是可以忽略的.

应当指出, 本文是在空腔完全解耦的假设下进行讨论的. 对大当量爆炸来说, 实践中要做到这一点在工程上往往是很困难的. 对非完全解耦空腔, 介质的非线性响应可能会对地震波的辐射产生重要影响. 除此之外, 球对称空腔中的离心爆炸(Zhao, Harkrider, 1992)、各向异性介质中的爆炸(Mandal, Toksoz, 1991), 也都能直接激发出 S 波.

4 结论

当扰动产生的地震波波长远大于空腔直径时, 受低频动态正压力加载的椭球腔在介质中激发的地震波可以用 Eshelby 方法很好地求解。分析和计算表明, 在空腔半径小于 100 m 时, 这一方法差不多可以用到大多数的远场地震频带。由此得出的结果证明, 对低频远场地震波, 椭球腔中的爆炸可以用 3 个方向和椭球腔主轴方向相一致的偶极子来等效, 偶极子之间的相对强度和椭球腔的形状因子 a/b 和 c/a 非线性相关。由此得到的辐射图型证明, 非对称空腔可以辐射出具有重要意义的 S 波。

以上结论对核爆侦查与事件识别具有重要意义。当然, 在实践中不大可能选取标准的椭球腔, 更实际的选择可能类似于 Glenn 等(1985)所建议的那样, 在球腔的基础上添加一些与之相连的坑道。这样既能使空腔为非对称的从而导致 S 波的激发, 同时在坑道瞄准的方向上可以实现较大的高频解耦因子。

本文得到中国科学技术大学徐文骏、倪四道等的帮助, 在此表示衷心地感谢。

参 考 文 献

- 张宏图, 陈易之, 1989. 固体的形变与断裂. 北京: 高等教育出版社. 96~141
- Abo-Zena, 1977. Radiation from a finite cylindrical explosive source. *Geophysics*, **42**(7): 1 384~1 393
- Aki K, Richards P G, 1980. *Quantitative Seismology. Theory and Methods*. Vol. I. San Francisco: W. H. Freeman. 37~61
- Eringen A C, Suhubi E S, 1975. *Elastodynamics*, Vol. II (Linear Theory). New York: Academic Press. 475~483
- Eshelby J D, 1957. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proc R Soc, A* **241**(1226): 376~396
- Glenn L A, Ladd A J C, Moran B, et al, 1985. Elastic radiation from explosively loaded ellipsoidal cavities in an unbounded medium. *Geophys J R astr Soc*, **81**(1): 231~241
- Glenn L A, Moran B, Ladd A J C, et al, 1986. Elastic radiation from explosively-loaded axisymmetric cavities. *Geophys J R astr Soc*, **86**(1): 119~136
- Hazebroek P, 1966. Elastic waves from a finite line source. *Proc R Soc, A* **294**(1436): 38~65
- Heelan P A, 1953. Radiation from a cylindrical source of finite length. *Geophysics*, **18**(3): 685~696
- Lambert D G, Flinn E A, Archambeau C B, 1972. A comparative study of elastic wave radiation from earthquakes and underground explosions. *Geophys J R astr Soc*, **29**(4): 403~432
- Mandal B, Toksöz M N, 1991. Effects of an explosive source in an anisotropic medium. In: Tarlor S R, Pattern H J, Richards P G (eds), *Explosion Source Phenomenology*. Washington, D C: American Geophysical Union. 261~268
- Rial J A, Moran B, 1986. Radiation patterns for explosively-loaded axisymmetric cavities in an unbounded medium: analytic approximations and numerical results. *Geophys J R astr Soc*, **86**(3): 855~862

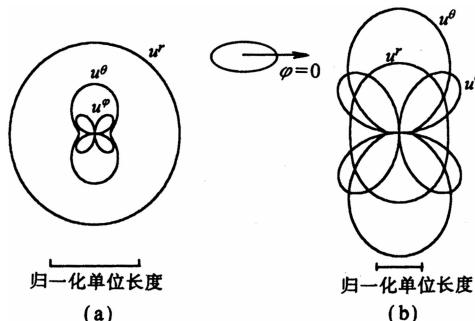


图 6 一般三轴椭球所对应的地震波远场辐射图型。图中给出的是位移分量 u^r, u^θ, u^φ 的归一化值随方位角 φ 的变化, 极角 $\theta = 45^\circ$ 。辐射图型下方的线段代表一个归一化单位的长度, 归一化方法参见正文的解释, 椭球的 3 个主轴之间的比值为 (a) $a : b : c = 1.0 : 0.8 : 1.2$; (b) $a : b : c = 1.0 : 0.5 : 10$; 泊松系数 $\nu = 0.25$

- Springer D, Denny M, Healy J, *et al*, 1968. The STERLING experiment: decoupling seismic waves by shot-generated cavity. *J Geophys Res*, **73**(18): 5 995~6 011
- Stevens J L, Murphy J R, Rimer N, 1991. Seismic source characteristics of cavity decoupled explosions in salt and tuff. *Bull Seism Soc Amer*, **81**(4): 1 272~1 291
- White J E, 1965. *Seismic Waves*. New York: McGraw-Hill. 213~239
- Zhao L S, Harkrider D G, 1992. Wave fields from an off-center explosion in an embedded solid sphere. *Bull Seism Soc Amer*, **82**(4): 1 927~1 955

附录 1 旋转椭球腔下的 Eshelby 张量

$$S_{1111} = S_{2222} = \frac{1}{8\pi(1-v)} \left\{ \frac{a^2 I_a - c^2 I_c}{a^2 - c^2} + I_{ab} + 2(1-v) I_a \right\}$$

$$S_{1122} = S_{2211} = \frac{1}{8\pi(1-v)} \{ -I_{ab} + 2v I_a \}$$

$$S_{3311} = \frac{1}{8\pi(1-v)} \left\{ 2v I_c - \frac{a^2 I_a - c^2 I_c}{a^2 - c^2} \right\}$$

$$S_{1133} = \frac{1}{8\pi(1-v)} \left\{ 2v I_a - \frac{a^2 I_a - c^2 I_c}{a^2 - c^2} \right\}$$

$$S_{3333} = \frac{1}{8\pi(1-v)} \left\{ 2(1-v) I_c + 2 \frac{a^2 I_a - c^2 I_c}{a^2 - c^2} \right\}$$

$$I_a = \frac{2\pi A_R}{(1-A_R^2)^{3/2}} \{ \arccos A_R - A_R (1-A_R^2)^{1/2} \} \quad (\text{当 } a > c)$$

$$I_a = \frac{2\pi A_R}{(A_R^2 - 1)^{3/2}} \{ -\operatorname{arccosh} A_R + A_R (A_R^2 - 1)^{1/2} \} \quad (\text{当 } a < c)$$

$$I_c = 4\pi - 2I_a$$

$$I_{ab} = \lim_{b \rightarrow a} \frac{a^2 I_a - b^2 I_b}{a^2 - b^2} = 2\pi a^2 c \int_0^\infty \frac{\zeta d\zeta}{(a^2 + \zeta^2) \Delta}$$

$$I_{ab} = \frac{\pi}{2(1-A_R^2)^2} \{ (1+2A_R^2) A_R^2 + (1-4A_R^2) \frac{A_R}{\sqrt{1-A_R^2}} \arccos A_R \} \quad (\text{当 } a > c)$$

$$I_{ab} = \frac{\pi}{2(A_R^2 - 1)^2} \{ (1+2A_R^2) A_R^2 + (1-4A_R^2) \frac{A_R}{\sqrt{A_R^2 - 1}} \operatorname{arccosh} A_R \} \quad (\text{当 } a < c)$$