

根据观测的应力方向利用有限单元方法 反演板块边界作用力^{*}

许忠淮 汪素云 俞言祥

(中国北京 100081 国家地震局地球物理研究所)

摘要

提出了两种在作二维线弹性问题有限单元分析时根据区域内部应力方向观测结果反演区域边界作用力的方法,即约束反演法和应力张量拟合法。用边界受力的圆盘问题对方法的有效性作了检验。

应用所提出的反演方法,根据中国东部及附近地区的主压应力轴方向观测结果,采用二维线弹性有限单元模型,反演出了周围板块边界作用力的相对大小。结果表明,为了在总体上拟合观测资料,菲律宾海板块沿琉球岛弧对中国东部的挤压压力不可能太大;台湾地区受到的指向北西方向的挤压力量很强;太平洋板块向北西西方向的挤压与北部西伯利亚地台的抵挡,二者的联合作用可以成为我国华北和东北地区主压应力轴取北东东方向的原因。在反演出的边界力作用下,长江流域和东南沿海之间出现一片低剪应力区,正好与少震区的位置大体一致。

关键词 主应力方向; 有限元; 反演

一、引 言

探讨板块内部构造应力场产生的原因是地球动力学研究的基本问题之一。板块内部构造应力场的观测结果对板块边界所受作用力的状况有约束作用,可以根据板块内部的观测结果反演板块边界相互作用力的方向和大小。

当采用线性力学模型研究实际问题时,可对区域内及区域边界上的位移、应力和应变等量运用线性迭加原理。王仁(Wang, 1983)提出了在进行有限单元分析时,利用线性迭加原理反演区域边界作用力或位移的基本思想和方法。所提方法的要点是将区域边界划分为若干段。首先计算对各段施加单位力时在区内产生的应力场或位移场,然后将这些与单位边界力对应的场乘以待定系数作线性迭加而得出区内的合应力场或位移场,再利用它们去拟合区内应力或位移的观测结果,并根据最佳拟合准则求解出一串待定系数,而所求边界作用力的大小和方向即由这些系数乘以单位力确定之。尔后,有人应用过这一方法(强祖基等, 1988; 俞言祥等, 1989)。

* 地震科学联合基金资助项目。国家地震局地球物理研究所论著 92A0034。

1991年2月4日收到本文初稿, 1991年8月21日决定采用。

在应用这一方法时,如果区内有位移的观测结果,则在求解最小二乘问题时将归结为解 $AX=B$ 形式的非齐次线性方程组(Wang, 1983),当矩阵 A 的病态程度不高时,一般是很易解出代表一串未知待定系数的 X 的。区内位移可以通过测量资料获得,也有人利用由地质资料确定的断层两盘的相对位移量(强祖基等,1988)。利用位移资料虽可获得数学上的简易性,但物理上会出现一些困难,因为实际观测不能获得某点的“总”位移量,而只能是某时间段内位移的变化或位移速率,要通过位移速率反推边界作用力必须了解介质的流变特性,而迄今对地下介质的流变特性了解还很肤浅,这势必对实际问题带来较大的模型误差。强祖基等(1988)将位移速率数据代入弹性模型反演边界力的合理性似值得商榷。

在某研究区内,单个观测点观测的主应力方向不含有应力大小的信息,但多个观测点上主应力方向观测结果的总体则含有区域所受边界作用力相对大小的信息(本文暂不考虑体力的影响)。本文试图探索单由应力方向观测资料而不用借助位移资料反演区域边界作用力的方法,并应用所提方法对中国东部及邻近地区所受周围板块作用力的特征作一些探讨。在有应力绝对大小观测结果的情况下,能同时根据区内应力大小和方向资料反演边界作用力当然更好。可惜当前地壳深部应力大小的测量点尚太稀少,而且测量深度迄今未超过 5 km 多一点,应用起来还有困难。但另一方面,地应力方向的观测资料却正以很高的速度积累着(Zoback *et al.*, 1989),因而探讨充分利用应力方向资料所提供信息的方法是不无裨益的。

二、约束反演法

暂不考虑体力的作用,采用平面应力问题的有限单元简化模型,取 x 轴向东, y 轴向北。第 i 个观测点主压应力轴方位角(由 y 轴顺时针量度)的计算值 θ_i^c 可由下式求得(例如可参考铁摩辛柯等,(1964)):

$$\operatorname{tg} 2\theta_i^c = \frac{2\tau_{xyi}}{\sigma_{yi} - \sigma_{xi}} \quad (1)$$

令 $d_i^c = \operatorname{tg} 2\theta_i^c$, 在 $\sigma_{xi} \neq \sigma_{yi}$ 的情况下, 可将上式写为

$$2\tau_{xni} + d_i^c(\sigma_{xi} - \sigma_{yi}) = 0 \quad i=1, \dots, m \quad (2)$$

m 为观测点总数, 记 σ_{ij} 为在边界上施加第 j 次单位力在观测点 i 产生的应力分量, 则第 i 个观测点的合应力分量 σ_i 可表示为各 σ_{ij} 的线性迭加

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_j \quad i=1, \dots, m \quad (3)$$

式中 x_j 为待定的迭加系数, σ 可代表 σ_x , σ_y 或 τ_{xy} , n 为边界施加单位力总次数。(3)代入(2)可得以下形式的齐次线性方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} AX=0 \\ A_{ij} \equiv 2\tau_{xvij} + d_i^c(\sigma_{xij} - \sigma_{yij}) \end{array} \right. \quad (4)$$

A_{ij} 是 $m \times n$ 矩阵 A 的元素, $X = (x_1, \dots, x_n)^T$.

由第 i 个观测点主压应力轴方位角的观测值 θ_i^o 可得

$$d_i^o \equiv \operatorname{tg} 2\theta_i^o \quad i = 1, \dots, m \quad (5)$$

用(5)式中的 d_i^o 代替(4)式中的 d_i^e 将有 $AX \approx 0$. 本可通过解

$$\begin{cases} \|AX\|^2 \rightarrow \text{极小} \\ \|X\| = \text{给定数} \end{cases} \quad (6)$$

而得出 X (许忠淮, 1985). 然而, 由于(1)式对偏应力张量的主压应力轴和主张应力轴都成立, 导致方程组(4)对主压应力轴和主张应力轴无分辨能力, 因而在求解问题(6)时会出现区内某些点上实际是计算的主张应力轴方向拟合了观测的主压应力轴方向的情况, 致使最后解答不合理.

为克服上述困难, 需对待求的 X 加某些约束, 遂改求解以下问题:

$$\begin{cases} \|AX\|^2 \rightarrow \text{极小} \\ GX \geq h \end{cases} \quad (7)$$

矩阵 G 和矢量 h 由具体约束条件定. 问题(7)实质上是 Lawson 等(1974)所述的 LDP(Least Distance Programming)问题, 在对矩阵 A 作奇异值分解后, 就可直接利用该文附录 C 中所发表的 LDP 及 NNLS(Non-Negative Least Squares)子程序求得问题(7)的解答.

三、应力张量拟合法

我们所拥有的主压应力轴方向观测资料中实际是包含了能分辨是主压应力轴还是主张应力轴的信息的. 在前述的约束反演法中只是通过选择约束条件间接地利用了这一信息, 现探讨更充分地利用这一信息的方法.

在有完整的应力张量观测结果的情况下, 通过观测的与计算的应力张量的拟合来反推边界作用力显然是一种方便的途径. 拟合准则可选取

$$\begin{cases} Q \equiv \sum_{i=1}^m Q_i \rightarrow \text{极小} \\ Q_i = [(\sigma_{xc} - \sigma_{xo})^2 + (\sigma_{yc} - \sigma_{yo})^2 + (\tau_{xyc} - \tau_{yxo})^2], \end{cases} \quad (8)$$

式中脚标 C 和 O 分别指计算和观测的应力分量, i 表示观测点序号. 然而目前还不能在大区域内获得足够可用的地下深部(例如 5 km 以下)主应力大小的数据. 为克服这一困难, 可先选定一初始边界力模型, 即取一初值 X_0 , 由(3)式计算出各观测点的主应力大小; 然后利用这些计算的主应力大小与观测的主应力方向构成一个“准”观测应力张量, 用它的分量作为(8)式中观测的应力分量, 并考虑(3)式, 可算出 X_1 , 并可同时计算出各观测点主应力方向的拟合残差 r_i 及总体残差 R . 重复上述步骤, 通过迭代可求出 X_2, X_3, \dots ,

直至获得与 R 的极小值对应的解 X .

实际试算发现上述迭代过程收敛较慢. 为提高收敛速度, 改用 $W_i Q_i$ 代替(8)式中的 Q_i , 并取权系数 W_i 为 $W_i = r_i \sqrt{\sum_{i=1}^m r_i^2}$, 即用各观测点归一后的主应力方向拟合残差来加权, 果然大大加快了收敛速度. 实际应用时, 是先用加权法求得一个“粗解”, 再用不加权法求出“细解”.

四、方法检验

利用圆盘边界受力的有限单元分析例子(监凯维奇, 1985)对上述方法的有效性作了检验. 根据对称性只分析 $1/4$ 圆盘就可以了(图 1). 主应力方向的人工“观测”数据由事先给定的边界力迭加系数的“真值”(表 1)计算出来. 本文施加的约束一律取

$$x_j \geq h_j \quad j = 1, \dots, k \quad (k \text{ 为约束条件总数})$$

的形式, 即取(7)式中的 G 为单位矩阵. 当 $h_j < 0$ 时计算中必须取 $-x_j \geq |h_j|$ 的形式.

表 1 给出检验算例的计算结果, 表中给出的 x_j 值是保持 x_1 取真值 4.0 时 x_j 的相对大小. 由表 1 可见, 对约束反演法, 如表 1 中约束 h_j 取值(A)的情况那样, 只要在约束条件下能反映出边界加力的方向性, 即 h_j 与 x_j 的“真值”同号时, 对较任意的约束数值, 该法是能准确地恢复出边界力迭加系数的“真值”来的. 但对较差的约束条件如表 1 中 h_j 全取 +0.1 的情况(B)那样, 反演结果虽仍能大致反映各应力迭加系数的大小趋势, 但拟合误差较大. 对应力张量拟合法, 也有类似的情况, 即所取初值若能反映边界受力方向, 对获得较好反演结果非常重要. 对表 1 中所给的初值, 12 次迭代后总体拟合误差降至 1° 以下, 23 次迭代后又降至 0.1° 以下, 说明方法是有效的.

表 1 用圆盘边界受力算例检验反演方法有效性结果

边界力迭加系数 x_j		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	迭代次数	主应力方向拟合误差	
		给定 x_j 的“真值”	4.0	1.0	-3.0	0.8	2.0	-1.5		方均根偏差(°)	平均绝对值偏差(°)
		加力方向	y	x	y	x	y	x			
约 束	约束值(A)	0.1	0.1	-0.1	0.1	0.1	-0.1	-0.1	1	0.01	0.00
	反演的 x_j	4.000	1.000	-2.999	0.800	2.000	-1.500	-2.000			
反演法	约束值(B)	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	1	9.10	5.13
	反演的 x_j	4.000	1.214	-2.200	1.028	2.270	-0.893	-1.573			
加 权	x_j 初值	1.0	1.0	-1.0	1.0	1.0	-1.0	-1.0	12	0.88	0.70
	应力张量拟合法	4.00	0.72	-3.28	0.97	2.20	-1.60	-2.04			
	迭 代 结 果	4.00	0.98	-3.02	0.81	2.01	-1.51	-2.00		0.10	0.08

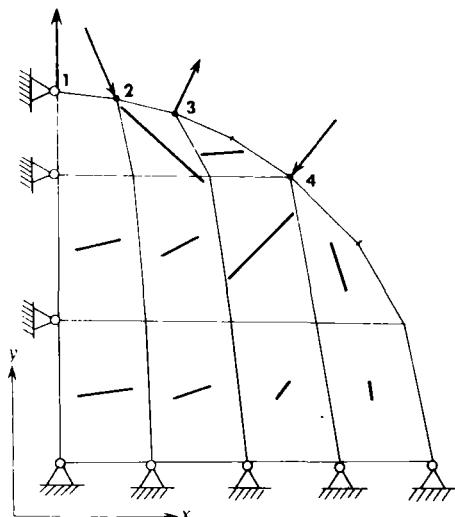


图 1 圆盘边界受力算例的有限元网格.箭头表示边界受力状况,短划的方向和长度分别表示各单元主应力的方向和相对大小

段加力的相对大小和方向都作为反演时求解的对象.为降低可能解答的任意性,东部各边界节点加力方向按板块相对运动方向加了约束,而只将各边界段加力的相对大小作为求解的未知数.第 5, 6, 7, 8 段边界各节点处菲律宾海板块相对于欧亚板块的运动方向是由

五、东亚地区边界力的反演

图 2 给出研究区范围、二维有限元网格划分、加力边界的分段及区内观测主应力方向的分布.图中粗短线表示由多个小震求得的平均震源机制 P 轴方向,共 55 个数据,取自许忠淮等(1989).由于北部和东北部数据点较稀,对边界力的观测约束太弱,遂从汪素云等(中国地震,待出版)的文章中补选了 12 个单个地震震源机制解的 P 轴数据,在图 2 中用细短线表示.采用线弹性介质模型,北部边界南北方向加位移约束,以模拟西伯利亚稳定地块对我国东部地壳块体向北运动可能产生的阻挡作用.西部和南部各边界

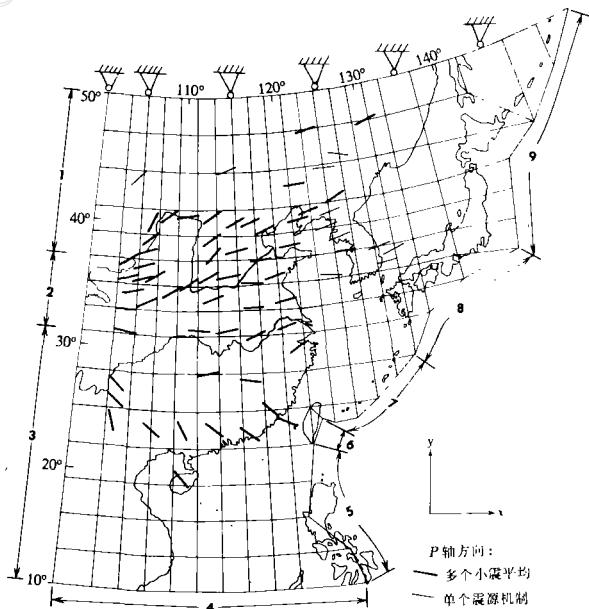


图 2 东亚地区的有限元网格,边界分段及震源机制 P 轴方向观测结果

Banken *et al.* (1984)给出的板块运动旋转极位置算出的。第9段边界各节点处太平洋板块相对于欧亚板块的运动方向是由 DeMets *et al.* (1990)给出的旋转极位置算出的。

表2给出了边界力相对大小的反演结果。对约束反演法,解 X 模的绝对大小受施加约束条件的限制,因为它对应于矢量 AX 取从零点到达约束区边界的最小长度时的值。对应力张量拟合法,迭代计算 X 时保持了 X 的模不变(等于初值 X_0 的模)。图3给出用约束反演法算得的边界力及区内各观测点主压应力方向和相对大小,图的右下角给出主应力方向拟合残差的统计分布。由该图可见,除长江中下游附近地区外(这里计算的主压应力值相对较小),其余地区计算的与观测的主压应力方向拟合是较好的。图4与图3类似,是

表2 中国东部及邻区由主应力方向反演边界力的结果

边界段序号		1	2	3	4	5	6	7	8	9	应力方向拟合误差					
边界力		f_{v1}	f_{v2}	f_{v3}	f_{v4}	f_{v5}	f_{v6}	f_{v7}	f_{v8}	f_{v9}	方均根偏差	绝对偏差				
约 束 反演法	施加约束	>0	>0	>1.0	>0	>0	<0	>0	>0	>1.5	<0	>0	>0.5			
	反演结果	0.66	0.09	0.87	0.00	0.66	-0.19	-0.31	0.53	0.00	2.35	0.00	0.48	0.44	21.8°	15.7°
应 力 张 量 拟 合 法	初 值	1.00	0.50	1.70	0.05	0.70	-0.40	-0.50	0.50	0.30	1.40	0.10	0.40	0.70	24.4°	20.1°
	反 演 结 果	0.65	0.13	1.22	0.05	0.75	-0.32	-0.50	0.59	-0.20	2.08	0.16	0.26	0.61	13.7°	10.7°

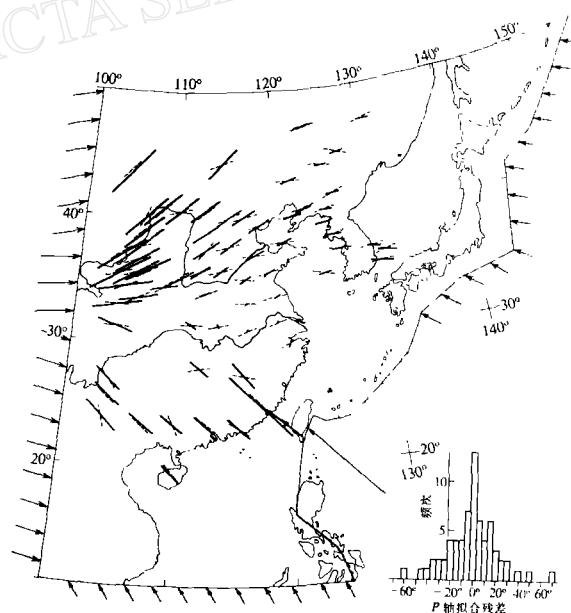


图3 约束反演法计算结果。边界箭头方向表示作用力的方向,箭头长短表示边界力相对大小。区内实短线方向和长短分别为计算的主压应力方向和相对大小,虚短线为观测的震源机制 P 轴方向

应力张量拟合法相应结果。表 2 和图 4 所表示的应力张量拟合法结果都是先由加权拟合法求出边界力迭加系数，并取其作初值，再用不加权拟合法作迭代计算所得之结果。图 5 表示出迭代收敛情况。由图 4 可见，计算的与观测的主压应力方向达到了相当好的总体拟合，方均根偏差不到 14° ，而角度差的平均绝对值偏差小于 11° （表 2）。事实上，偏差最大的

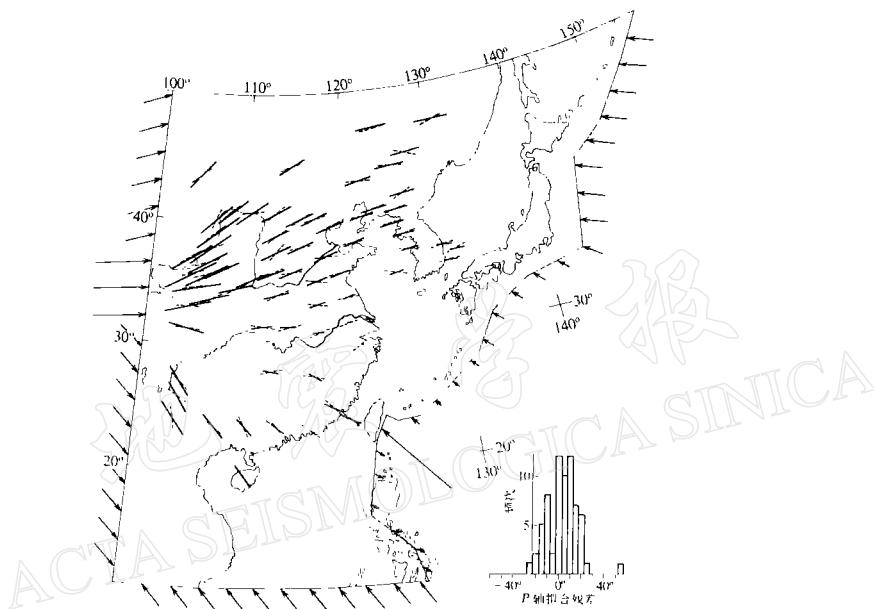


图 4 应力张量拟合法计算结果，说明同图 3

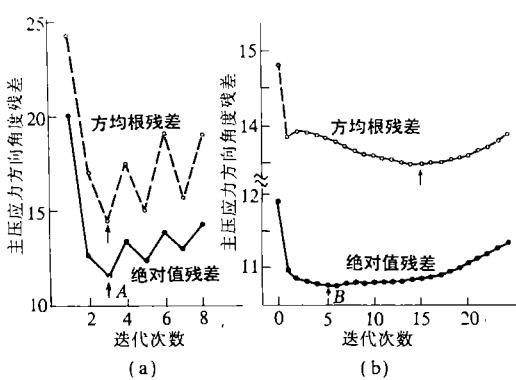


图 5 应力张量拟合法主压应力方向拟合残差
452 随迭代次数的变化。箭头指示残差极小值

(a) 加权拟合法结果；(b) 取与 A 点对应的解答当初值，再用不加权拟合法迭代的结果，与 B 点对应的
边界力解答见表 3 和图 4

是位于浙江的一个数据点，由于浙江地震很少，该点观测的主应力方向本身欠可靠（许忠淮等，1989），而计算的主压应力也很小，该点的拟合误差很大（达 55° ）是不足为奇的。若去掉这个数据点，总体拟合残差的方均根值降至 12° ，平均绝对值差降至 10° ，可见拟合是相当好的。

根据反演结果（表 2、图 3、图 4）有以下几点值得注意：(1) 多次反演计算表明，在我国东部观测的主应力方向和已知的板块运动方向约束下，菲律宾海板块通过琉球岛弧对中国东部的挤压压力比其它边界的挤压压力都小得多；(2) 台湾地区受到的指向西北的压力总是十分强的；(3) 太平洋板块在日

本海沟处向北西西的推挤与北部边界所受的阻挡(用 y 方向位移受约束模拟),二者的联合作用可以成为我国华北和东北地区主压应力方向为NEE-SWW的原因,由此可解决太平洋板块推挤方向与华北、东北主压应力方向不一致的矛盾,也可说明我国华北地区受到太平洋板块运动的影响较强;(4)在反演出的边界力的作用下(图3),在夹于长江流域和东南沿海之间的地区,计算出的剪应力(图6)出现一片近东西向延伸的低应力带,其位置正好与少震地带(傅征祥等,1990)大致相当.这说明,我国长江以南的少震区可能与低剪应力背景以及相应的板块相互作用特征有关.

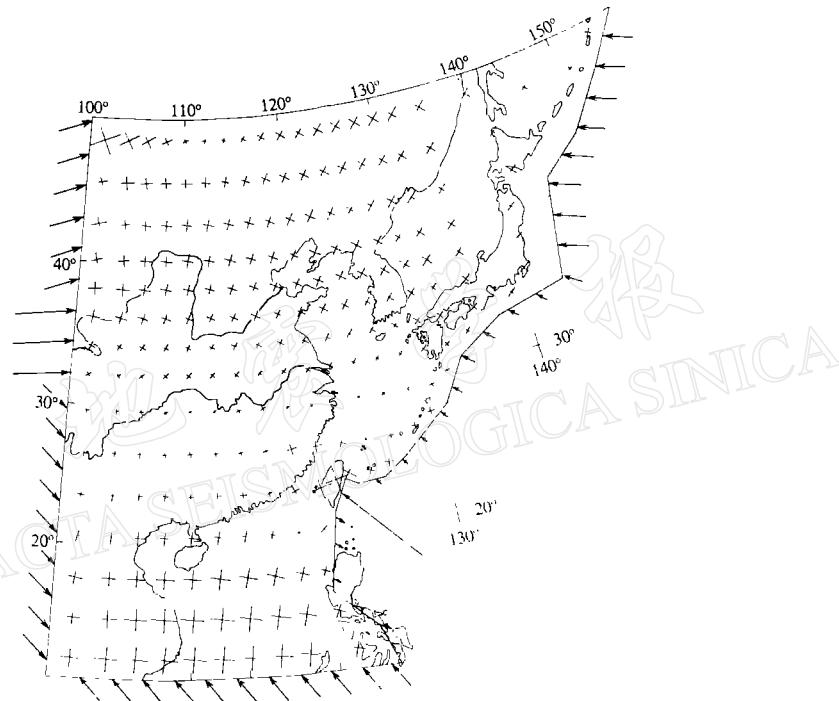


图6 由应力张量拟合法求得的边界力(见表2和图4)计算出的区内剪应力分布.交叉短线表示剪应力方向,线的长短表示剪应力相对大小

六、讨 论

1. 本文模型第7段边界的位置(图2)与琉球岛弧的中南段(Kuramoto *et al.*, 1989)对应. 表示于图3、图4的边界力反演结果及笔者所作的其它计算试验表明, 为拟合我国大陆东部主应力方向观测结果, 菲律宾海板块通过琉球岛弧对我国东部大陆的挤压压力不可太大, 这一由应力方向观测结果独立作出的推断与其它不少研究者的推论不谋而合. 例如, 日本学者江口指出(Eguchi, 1983), 冲绳海槽附近最大水平主应力为近E-W向, 而不是沿菲律宾海板块相对于欧亚板块运动的方向, 说明在琉球岛弧处两板块运动的耦合不强; 他还指出冲绳海槽是类似于贝加尔和山西地堑的张性构造. 臧绍先等(1989)根据琉球岛弧地区浅层(<70 km)地震震源机制解特征推断菲律宾海板块的俯冲没有造成对

中国大陆的挤压影响。与琉球岛弧相反,台湾地区(图2中的边界段6)所受到的指向NW的压力很大(图3、图4),由表2可看出,约束反演和应力张量拟合迭代的结果,都使该段边界力数值比所给初始约束或初值大,这是受应力方向观测数据约束的结果。

2. 边界段8的大部分与南海海槽(Eguchi, 1983)位置对应,边界段9的南半部位置与日本海沟对应(图2)。东部由北而南第9、8、7三段边界上力的相对大小正好是按大、中、小顺序排列的,这也与江口(Eguchi, 1983)认为日本海沟、南海海槽和琉球海沟分别处于压缩、剪切和引张状态的看法相一致。西部三段边界相对而言,中段受压力大些。东边台湾南部的第5段边界在数次反演计算中均得到稍稍受到向东南拉伸力作用的结果,这虽与中国南海小板块向东俯冲的方向一致(Ho, 1986),但因研究区南部缺少观测数据(图2),且边界段划分太长(为减少未知数数目),南部各段(第3、4、5段)边界力反演结果还欠可靠。类似地,图6所示在南部以及东北角都有剪应力较高的地区,这与边界状况不清或离边界太近等不无关系。根据观测数据的控制情况看,由模型的北部到中部到南部剪应力大小呈高—低—高的总体分布格局,这恐怕不是偶然的,这可能是长江南部缺少地震的原因。

3. 赵志新等(Zhao *et al.*, 1990)根据地震活动活跃期与平静期的相关性分析,得出华北地区构造应力可能是从太平洋板块与欧亚板块边界传递过来的结论,本文反演的结果也支持这一看法(图3、图4、表2)。

4. 作为求解反问题的工具,本文采用了二维线弹性平面应力问题的有限单元模型。事实上,只要应力叠加原理可以适用,对其它介质模型(如线性流变模型)或相应的三维问题,都可用应力方向观测结果反演边界力的方向和相对大小。本文所提出的反演方法也应是可用的。

参 考 文 献

- 傅征祥、陈修启, 1990. 中国大陆东部强震活动空间分布的不均匀性及其地震力学意义. 中国地震, **6**, 4, 26—34.
- 监凯维奇, 1985. 有限元法(下册). 科学出版社, 北京, 732.
- 强祖基、谢富仁, 1988. 临汾裂谷现代构造应力场特征及其数值模拟. 地球物理学报, **31**, 556—565.
- 铁摩辛柯、古地尔, 1964. 弹性理论, I4. 人民教育出版社, 北京.
- 汪素云、高阿甲、许忠淮, 中国及邻区地震震源机制特征. 中国地震, 待出版.
- 许忠淮, 1985. 用滑动方向拟合法反演唐山余震区的平均应力场. 地震学报, **7**, 349—362.
- 许忠淮、汪素云、黄丽蕊、高阿甲, 1989. 由大量的地震资料推断的我国大陆构造应力场. 地球物理学报, **32**, 636—647.
- 俞言祥、许忠淮、汪素云, 1989. 对我国大陆地壳应力场观测结果的一种解释. 八十年代中国地球物理学进展, 284—292.
- 学术书刊出版社, 北京.
- 臧绍先、宁杰远、许立忠, 1989. 琉球岛弧地区的地震分布、Benioff带形态及应力状态. 地震学报, **11**, 113—123.
- Banken, B., Cardwell, R. K. and Karig, D. E., 1984. Kinematics of the Philippine Sea plate. *Tectonics*, **3**, 555—575.
- DeMets, C., Gordon, R. G., Argus, D. F. and Stein, S., 1990. Current plate motions. *Geophys. J. Int.*, **101**, 425—478.
- Eguchi, T., 1983. Tectonic stress field in East Eurasia. *Phys. Earth Plane. Interi.*, **33**, 318—327.
- Ho, C. S., 1986. A synthesis of the geologic evolution of Taiwan. *Tectonophysics*, **125**, 1—3, 1—16.
- Kuramoto, S. and Konishi, K., 1989. The southwest Ryukyu Arc is a migrating microplate. *Tectonophysics*, **163**, 1/2, 75—91.

- Lawson, C. H. L. and Hanson, R. J., 1974. *Solving Least Squares Problems*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, Chapter 23, 158–173.
- Wang, R., 1983. A short note on the inversion of tectonic stress fields. *Tectonophysics*, **100**, 1–3, 405–411.
- Zhao, Z. X., Oike, K., Matsumura, K. and Ishikawa, Y., 1990. Stress fields in the continental part of China derived from temporal variations of seismic activity. *Tectonophysics*, **178**, 357–372.
- Zoback, M. L. et al., 1989. Global patterns of tectonic stress. *Nature*, **341**, 6240, 291–298.

地震学报
ACTA SEISMOLOGICA SINICA