

粘弹性场地地形对地震动影响的 显式有限元-有限差分方法^{*}

李小军

(中国北京 100081 国家地震局地球物理研究所)

廖振鹏 关慧敏

(中国哈尔滨 150080 国家地震局工程力学研究所)

摘 要

推导出了分析二维粘及弹性场地地形对地震动影响的显式有限元-有限差分方法. 这一方法中, 首先利用人工边界及有限元离散方法, 给出问题分析的有限元离散网格计算力学模型, 并利用一种类似于差分方法的有限元方法, 建立局部网格节点的动力方程, 而后利用笔者提出的有阻尼体系动力方程求解的显式差分格式, 及推广的多次透射边界公式, 给出网格节点运动量计算的时域显式逐步积分公式. 利用计算机程序实现这一方法的计算具有所需计算机内存量小及计算时间量小的优势, 而且, 这一方法适用于任意地形情况, 具有较高的计算精度及较好的计算稳定性.

主题词 粘弹性介质; 有限差分方法; 地震反映; 人工边界; 显示有限元

引 言

局部场地条件对地震动影响的分析在结构抗震设计中起着很重要的作用. 局部场地条件对地震动的影响包括局部场地地形的影响, 及局部场地介质非均匀性非线性的影响. 当仅考虑局部场地地形的影响时, 人们假定场地模型为均匀线性介质半无限空间模型, 而当考虑局部场地介质非均匀性影响, 特别是考虑介质的非线性影响时, 场地力学模型则较为复杂, 往往要根据特定的场地情况来建立. 对于地形影响问题, 由于介质被视为线性均匀体, 分析问题时对方法的限制较少, 适用的方法有边界元法(杜修力等, 1993)、半解析边界元子结构法(赵成刚等, 1993)、有限元法、有限差分法、有限元-有限差分法(廖振鹏, 1984)等许多种半解析方法及数值方法(刘晶波, 1989). 对于地形形状规则的情况, 如球面形凸凹地形情况, 可以利用解析方法分析. 而对于局部介质非均匀非线性影响问题, 切实可行的方法还应该是数值分析方法, 如有限元法、有限差分法及有限元-有限差分法. 人们的研究结果及工程应用经验表明, 对于局部复杂介质场地问题,

^{*} 地震科学联合基金资助项目. 国家地震局地球物理研究所论著 95A0033.
1994 年 3 月 31 日收到初稿, 1994 年 8 月 29 日收到修改稿并决定采用.

特别是考虑介质的非线性特性时, 显式的时域逐步积分方法具有其它方法不可比拟的优势, 无论是在计算机程序所需内存方面还是在计算机计算耗时方面. 廖振鹏等一直致力于这一方面的研究工作, 并推导出了显式有限元-有限差分方法(廖振鹏, 1984, 杨柏坡等, 1991). 这一方法是在空间有限元离散动力方程及时间中心差分方法的基础上推导出来的. 因为时间中心差分方法在求解有阻尼多自由度体系动力方程(阻尼矩阵为非对角矩阵情况)时其所给出的积分格式不再为显式格式, 对于这种情况, 方法中引入了一种近似处理方法(杨柏坡等, 1991)以使所给方法仍为显式方法, 但这一近似处理使方法的计算精度下降.

本文推导出了二维场地地震反应分析的有限元-有限差分方法的一种时域高精度显式逐步积分式. 这一积分式的给出解决了已有方法在求解粘-弹-塑性场地地震反应时的计算式非显式问题或计算精度低的问题. 为了更清楚地表述本文的显式有限元-有限差分方法的基本思想, 这里以粘弹性地形场地模型为分析对象.

1 场地介质力学模型及动力方程的建立

本文分析的场地介质力学模型为二维粘弹性地形模型. 图 1 为设置人工边界后的力学模型示意图.

利用有限元方法将图 1 所示的力学模型中人工边界以内的计算区进行单元离散化处理, 可形成有限元离散模型. 对于各向同性的粘弹性介质情况, 可以建立相应的计算区内网格节点的运动动力方程:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{R(t)\} \quad (1)$$

式中, $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$ 分别为整个计算网格体系的质量阵、阻尼阵及刚度阵; $\{\ddot{u}(t)\}$ 、 $\{\dot{u}(t)\}$ 、 $\{u(t)\}$ 分别为计算区内网格节点运动的加速度、速度及位移矢量; $\{R(t)\}$ 为网格点上的外力矢量.

如果采用 Rayleigh 阻尼理论来考虑土体的粘性效应, 则有

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (2)$$

式中, α 、 β 为比例系数, 它们控制着体系阻尼效应的程度.

对于单元数较大的有限元计算模型, 利用有限元方法直接给出式(1)中的 $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$ 矩阵, 则在计算机上实现动力方程的求解所需内存量及计算量过大. 因此, 这里采用一种类似于差分方法的有限元方法来建立局部网格节点的动力方程(廖振鹏, 1984).

1.1 单元刚度阵、质量阵及节点荷载矢量

对于每个平面等参四节点四边形单元, 如图 2 所示, 有如下基本关系:

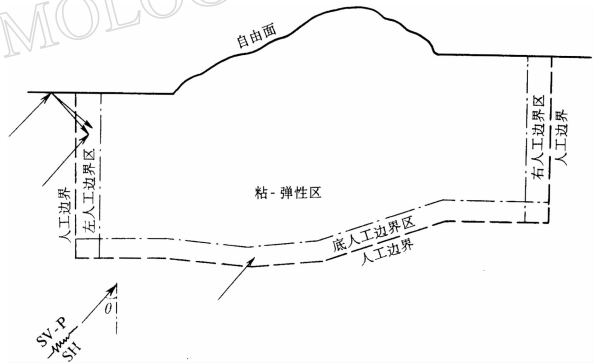


图 1 二维场地模型示意图

单元刚度矩阵

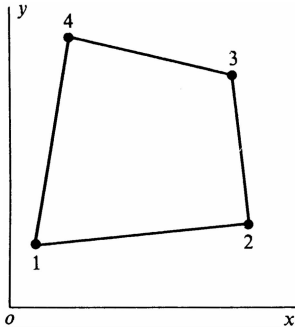


图 2 等参四节点四边形单元示意图

$$[K_{ij}^e] = \iint_{se} [B]^T [D] [B] t dx dy \quad (3)$$

单元一致质量矩阵

$$[M_{ij}^e] = \iint_{se} [N]^T \rho [N] t dx dy \quad (4)$$

单元等效节点荷载向量

$$\{R_i^e\} = \iint_{se} [N]^T g t dx dy + \int_{Le} [N]^T \tau t dl \quad (5)$$

上面各式中, ρ 为单元内介质的密度, 假定它为一常数; $[N]$ 为单元形函数矩阵; $[B]$ 为单元几何矩阵; t 为单元厚度, 它为一常数; $[D]$ 为材料矩阵, 并且有如下关系:

对于 SH 问题有

$$[D] = \rho \begin{bmatrix} C_s^2 & 0 \\ 0 & C_s^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

对于 SV-P 问题有

$$[D] = \rho \begin{bmatrix} C_p^2 & C_p^2 - 2C_s^2 & 0 \\ C_p^2 - 2C_s^2 & C_p^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_s^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

这里, C_s , C_p 分别为单元内介质的 S 波波速值与 P 波波速值.

1.2 局部节点的运动方程

对于如图 3 所示的局部节点系, 在建立节点 1 的运动方程时, 采用一种类似于差分方法的集中质量有限元模型(廖振鹏, 1984). 这一模型中, 位移形函数和集中质量矩阵的给出基于如下基本假定:

(1) 单元内沿局部坐标方向应变的变化较之应变本身为高阶微量, 且可以忽略不计;

(2) 单元内惯性体积力的变化较之惯性体积力本身为高阶微量, 可以忽略不计.

对于图 3 所示的局部节点系, 设 L 为此节点系所包含的节点总数, 且节点编号以 l 表示, $l=1, 2, \dots, L$, 此节点系的位移矢用 u 表示, 且有

$$[u]^T = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_L] \quad (8)$$

其中

对于 SH 问题有 $u_i = u_{iz} \quad (9a)$

对于 SV-P 问题有 $u_i = [u_{ix} \ u_{iy}] \quad (9b)$

在此节点系中, 节点编号 l 与其中某一单元 e 的节点编号 j 之间存在如下关系:

$$l = l(j) \quad (10)$$

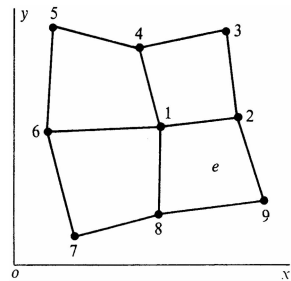


图 3 局部节点系单元连接示意图

相应地有

$$u_l = u_{l(j)} = u_j^e \quad (11)$$

且特别地规定节点系中编号 1 的节点在每一单元中的编号也相应地为 1, 即有

$$u_1 = u_1^e \quad (12)$$

结合假定(1)及上文给出的单元刚度阵、质量阵的关系式, 对于节点 1, 可以推导出

$$\sum_e \left[\sum_{j=1}^4 M_{1j}^e \dot{u}_j^e + \sum_{j=1}^4 (\alpha M_{1j}^e + \beta K_{1j}^e) \dot{u}_j^e + \sum_{j=1}^4 K_{1j}^e u_j^e - R_1^e \right] = 0 \quad (13)$$

利用假定(2)可推知

$$\ddot{u}_{l(j)}^e = \ddot{u}_1 \quad (14)$$

则由式(13)可得

$$M_1 \ddot{u}_1 + \sum_{l=1}^L (\alpha M_{1l} + \beta K_{1l}) \dot{u}_l + \sum_{l=1}^L K_{1l} u_l - R_1 = 0 \quad (15)$$

其中

$$M_1 = \sum_e \sum_{j=1}^4 M_{1j}^e \quad (16)$$

$$\sum_{l=1}^L M_{1l} = \sum_e \sum_{j=1}^4 M_{1j}^e \quad (17)$$

$$\sum_{l=1}^L K_{1l} = \sum_e \sum_{j=1}^4 K_{1j}^e \quad (18)$$

$$R_1 = \sum_e R_1^e \quad (19)$$

式(15)即为节点系中节点 1 的运动方程式. 类似地, 可以得到整个计算区内每一节点的运动量与相连节点的运动量之间的关系式. 对于含有其它非四节点四边形单元(如三角形单元)情况下的节点运动方程, 可以采用类似的方法得到, 本文不作具体推导.

2 局部节点动力方程的显式差分分解

为了获得反应计算的高精度显式积分式, 本文利用最近笔者提出的求解有阻尼体系动力方程的显式差分格式(李小军等, 1992), 这一格式的计算精度不低于二阶. 局部节点运动方程式(15)的显式差分格式解为

$$\begin{cases} u_1^{P+1} = \frac{\Delta t^2}{2M_1} R_1 + u_1^P + \Delta t \dot{u}_1^P - \frac{\Delta t^2}{2M_1} \sum_{l=1}^L [K_{1l} u_l^P + (\alpha M_{1l} + \beta K_{1l}) \dot{u}_l^P] \\ \dot{u}_1^{P+1} = \frac{\Delta t}{2M_1} (R_1^{P+1} + R_1^P) + \dot{u}_1^P - \frac{1}{2M_1} \sum_{l=1}^L [K_{1l} \Delta t (u_l^{P+1} + u_l^P) + 2(\alpha M_{1l} + \beta K_{1l}) (u_l^{P+1} - u_l^P)] \\ \ddot{u}_1^{P+1} = -\ddot{u}_1^P + \frac{2}{\Delta t} (\dot{u}_1^{P+1} - \dot{u}_1^P) \end{cases} \quad (20)$$

式(20)为局部节点系中某一节点的反应量计算的递推关系式. 对于计算区内网格中任意节点 i , 其运动量可以由式(20)求得, 只需以“ i ”取代式(20)中的节点号“1”.

3 时域局部多次透射边界

上文已推导出场地离散网格模型中人工边界内节点(不包括人工边界上的节点)运动

量计算的时域显式递推公式. 然而, 要实现节点运动的递推计算还得给出人工边界上的节点运动量计算的递推公式. 这正是人工边界方法所要解决的问题.

人工边界是在对无限连续介质进行有限化处理时在原连续介质中设置的一种虚拟的边界. 因为在人工边界处, 原介质本质上完全连续, 所以, 在设置人工边界后, 要实现与原连续介质中波动的精确模拟, 必须保证波在人工边界界面处的传播性质与在原连续介质中的一致, 即波通过人工边界界面时无反射效应, 而是完全透射. 多次透射边界正是直接在人工边界上模拟波的传播的这一特性的指导思想下发展起来的一种人工边界处理方法. 多次透射边界方法中将人工边界区内的波场分为内行波场及外行波场, 多次透射边界主要是对外行波场进行模拟, 模拟外行波场引起的人工边界点的运动. 利用时域多次透射边界可以建立边界点运动与内点运动之间近似关系的时域显式递推公式.

设由内行波及外行波引起的人工边界节点运动位移量分别为 u_{IJ} 及 u_{RJ} , 则

$$u_J^{P+1} = u_{IJ}^{P+1} + u_{RJ}^{P+1} \quad (21)$$

这里, u_{IJ}^{P+1} 为已知入射波场在 $P+1$ 时刻人工边界上 J 点的值.

对于有限元离散模型中的人工边界, 如图 4 所示, 推广的多次透射边界方法(李小军, 1993; 廖振鹏等, 1995)给出的关系式为:

$$u_{RJ}^{P+1} = \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} C_n^N u_{n,J}^{P+1} + \sum_{l=1}^M (-1)^{l+1} C_l^M (u_{RJ-l}^{P+1} - \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} C_n^N u_{n,J-l}^{P+1}) \quad (22)$$

其中

$$u_{K,J'}^{P'} = \frac{1}{2}(1-S)(2-S)u_{K-1,J'}^{P'-1} + S(2-S)u_{K-1,J'-1}^{P'-1} + \frac{1}{2}S(S-1)u_{K-1,J'-2}^{P'-1} \quad (23)$$

且

$$u_{0,J'}^{P'} = u_{RJ'}^{P'} \quad (24)$$

这里

$$P' = P+1, P, \dots, P+1-N;$$

$$K = N, N-1, \dots, 1;$$

$$J' = J, J-1, \dots, J-2N-M$$

式中, M, N 为推广的多次透射边界的模拟精度控制参数, 一般地取 $M=1, N=1$ 或 $M=1, N=2$; $S = C_a \Delta t / \Delta x$, C_a 为人工波速值. 反应的速度量 \dot{u} 也可利用式(22)给出, 只是以 \dot{u} 取代式(22)中的 u .

4 算例分析

上文已给出二维场地反应分析的显式有限元-有限差分方法的基本公式. 下面利用上文的计算理论及编制的相应的计算程序以一场地地形模型为例, 分析介质粘性效应对地震动的影响.

计算场地地形模型在设置人工边界及进行空间有限元离散后的情形如图 5 所示. 场

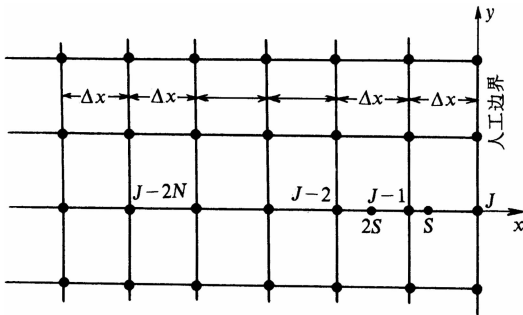


图 4 空间离散模型中的透射边界

地介质的 S 波及 P 波波速值分别为 1400 m/s, 2000 m/s, 介质的密度为 2000 kg/m^3 . 计算分析时, 分别假定 SH, SV, P 平面行波以与场地水平自由表面成 30° 角的方向射向场地自由表面.

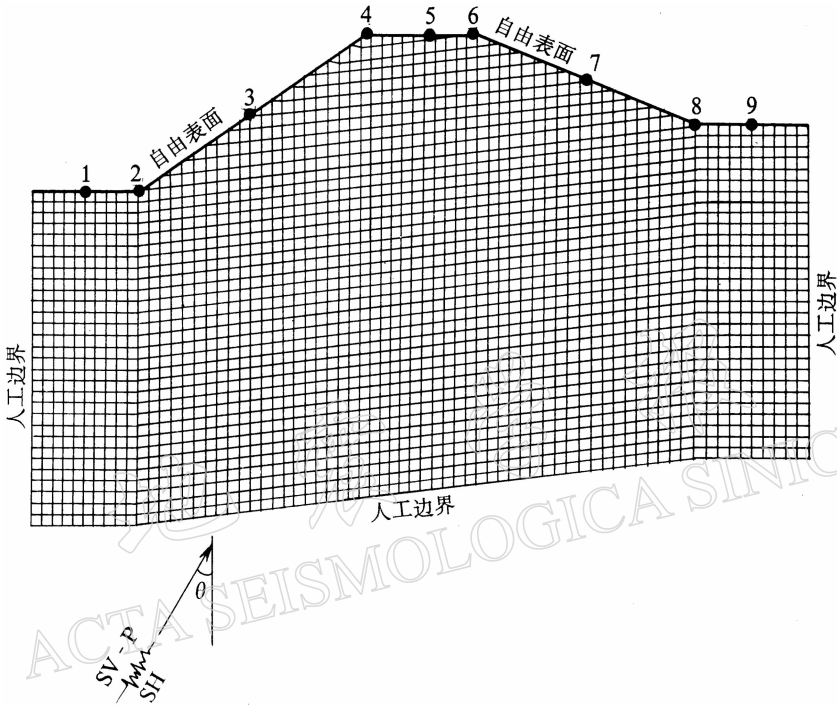


图 5 粘弹性场地地形影响分析的有限元离散模型

计算分析中的部份算例的计算入射波(位移时程)及图 5 中各标注观测点处的反应的位移时程分别见图 6 及图 7 所示. 从计算结果可以看出, 介质的粘性特性将使计算反应中的高频成分显著减小, 并且随着粘性阻尼值的增加, 高频成分减小程度也增加. 这一计算结果可以从两个方面来理解: ① 由于介质粘性阻尼的存在及粘性阻尼值的增加, 使得介质对波动能耗效应加强, 并且由于本文在考虑介质的阻尼效应时采用的是 Rayleigh 阻尼形式($\alpha=0, \beta \neq 0$), 因而介质的能耗程度随着介质中传播波的频率的增大而增加, 介质对高频波有较大的滤波效应; ② 方法中采用了作者提出的显式差分格式求解粘-弹性体系动力方程, 而随着动力方程中粘性项的系数值(即动力方程所对应的结构体系的阻尼效应)的增大, 这一显式差分格式本身的数值计算人工阻尼值增大, 即数值高频滤波效应增加. 所以, 随着介质粘性阻尼程度的增加, 计算反应中过高的频率成分必然减少.

从图示计算反应结果还可以看出, 在介质为弹性介质情况下, 反应中出现一些过高的频率成份(相对于入射波). 这是由于在无粘性阻尼情况下, 动力方程求解的显式差分格式不具备计算高频能耗特性所致, 即此时数值积分方法不能抑制计算反应中出现的计算高频误差的放大. 这一计算高频误差中包括由于时空离散化引入的高频误差及多次透

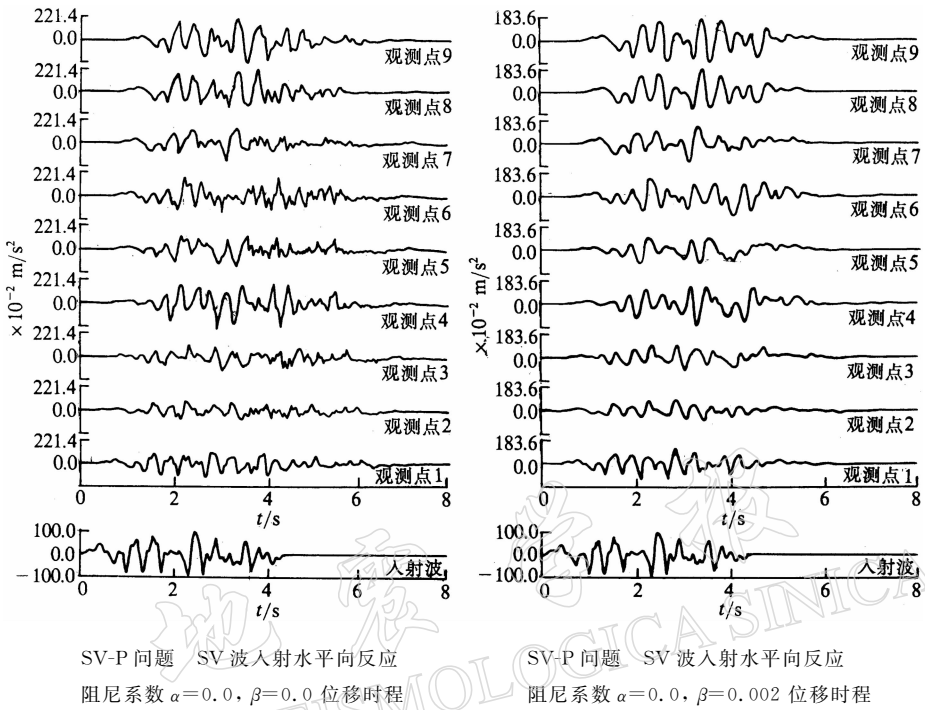


图 6 粘弹性场地地形影响分析算例结果

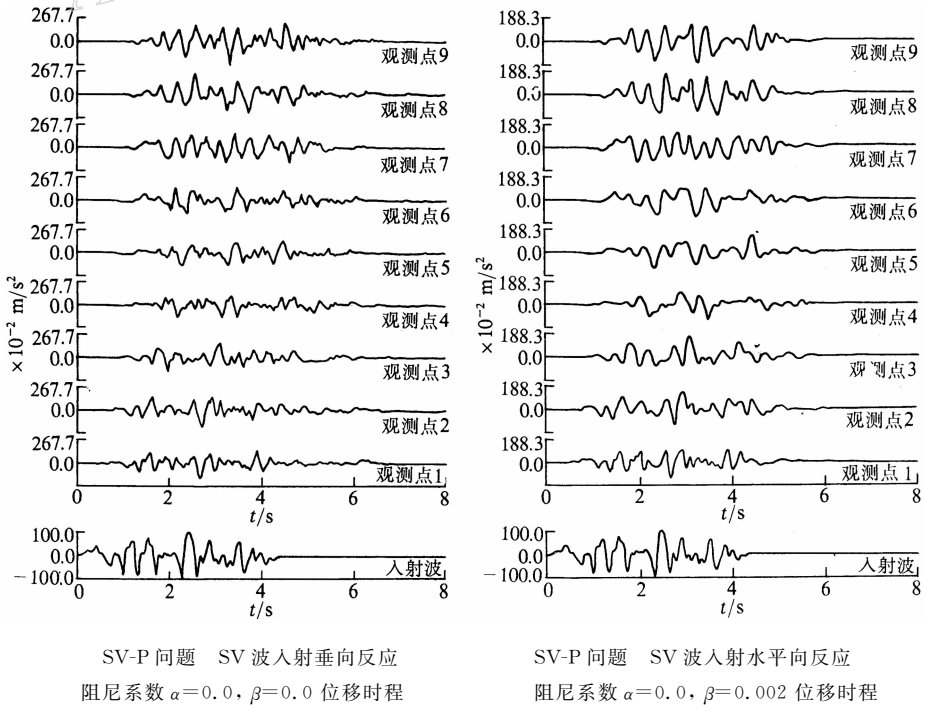


图 7 粘弹性场地地形影响分析算例结果

射边界的高频失稳特性引起的高频误差.

5 结 语

本文叙述了二维局部场地地震反应分析的一种高精度显式有限元-有限差分方法的基本思想,并具体推导出了粘弹性介质情况下的相应的计算公式,给出了粘弹性场地地形对地震动影响分析的计算算例.本文所述方法的基本思想同样适用于三维场地问题,及局部介质非均匀非线性场地问题.对于非线性问题这一显式方法更显示出其优势,即大大地减少计算时间及计算所需计算机内存量,这正是作者在此建立高精度的积分式以完善显式有限元-有限差分方法的主要用意所在.

参 考 文 献

- 杜修力、熊建国、关慧敏,1993. 平面 SH 波散射问题的边界积分方程分析法. 地震学报, **15**, 331—338.
- 李小军、廖振鹏、杜修力,1992. 有阻尼体系动力问题的一种显式差分解法. 地震工程与工程振动, **12**, 4, 74—80.
- 李小军,1993. 非线性场地地震反应分析方法的研究. 国家地震局工程力学研究所博士学位论文, 135—166.
- 廖振鹏,1984. 近场波动问题的有限元解法. 地震工程与工程振动, **4**, 2, 1—14.
- 廖振鹏、李小军,1995. 推广的多次透射边界: 标量波情形. 力学学报, **27**, 1, 69—78.
- 刘晶波,1989. 波动的有限元模拟及复杂场地对地震动的影响. 国家地震局工程力学研究所博士学位论文, 184—197.
- 杨柏坡、陈庆彬、袁一凡,1991. 地震小区划中复杂场地影响的修正方法. 地震工程与工程振动, **11**, 4, 19—24.
- 赵成刚、杜修力、李小军,1993. 用半解析边界元的子结构法分析凸起山包对地震波的散射. 中国地震, **9**, 2, 155—162.