

文章编号: 0253-3782(2003)03-0272-08

多次透射公式在衰减波场中的实现^{*}

陈少林¹⁾ 廖振鹏²⁾

1) 中国上海 200030 上海交通大学振动、冲击、噪声国家重点实验室

2) 中国哈尔滨 150080 中国地震局工程力学研究所

摘要 在多次透射公式的基础上, 引进一衰减系数, 用来模拟外行的衰减波, 将透射公式推广到考虑衰减波入射时的情形; 并对衰减波入射时两种极限情形下(理想稳态和理想暂态情形)的反射系数进行了分析. 结果表明, 多次透射公式对弱衰减波仍可适用, 对于强衰减波则需应用加衰减系数的多次透射公式进行透射. 最后, 通过两相介质两个数值实验, 验证了该边界条件在模拟衰减波时的精度.

关键词 多次透射公式 衰减波 两相介质

中图分类号: P315.3⁺1 **文献标识码**: A

引言

用解析方法研究无限域中波动问题时, 基于物理要求, 需要对无穷远处的波场行为施加一些限制条件, 即无穷远辐射条件, 以保证波动问题解的唯一性. 与此相对应, 在有限元或有限差分计算无限域问题时, 需要引入人工边界条件(artificial boundary condition, 简称 ABC)来模拟无穷远辐射条件. 基于不同的思想已经提出了多种人工边界(廖振鹏, 2001), 一般可分为全局人工边界(Givoli, Keller, 1990; Wolf, Song, 1996)和局部人工边界(廖振鹏等, 1984; Higdon, 1991). 由于全局人工边界条件的耦联特性, 在计算大型复杂的近场波动问题, 特别是当广义结构具有非线性时, 这类边界条件因其计算量过大而难以胜任.

对于一些近场波动问题, 由于介质的阻尼特性, 使得其中的波具有衰减特性, 如两相介质中的波动. 而以往建立的局部边界条件中, 都未考虑由于介质本身的阻尼而引起的波的衰减. 例如, CE 边界是基于弹性波动方程(Clayton, Engquist, 1977), 多次透射公式(Liao, 1996)是基于均匀平面波假设的基础上建立的. 虽可通过适当选取透射公式的阶数以及将边界置于距波源一定距离处(不小于感兴趣的最短波长)(Liao, 2001), 透射边界能以与有限元或有限差分相当的精度透射更为广泛类型的单向波动, 包括弱衰减波和球面波; 但当入射波为强衰减波时, 若仍用多次透射公式进行透射, 则将产生较大误差. 要保证模拟精度, 需将边界置于足够远处, 这将大大增加计算量. 因此, 当存在较强衰减波时, 出于精度和计算效率的考虑, 研究衰减波的透射具有实际意义.

考虑到透射边界是一种局部人工边界, 与特定模型无关且易于与有限元和有限差分结

^{*} 地震科学联合基金重点项目(95-07-442)资助.
2002-05-14 收到初稿, 2003-03-11 收到修改稿并决定采用.

合进行计算, 在近场波动的数值模拟中得到了广泛的应用. 为此, 本研究首先在多次透射公式的基础上, 推导出能够透射衰减波的多次透射公式. 然后, 通过频域反射系数和数值实验分析验证了其透射衰减波时的精度.

1 公式推导

多次透射公式(MTF)为(廖振鹏, 1984)

$$u_0^{p+1} = \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} C_j^N u_j^{p+1-j} \quad (1)$$

其中, u_0^{p+1} 为边界节点在 $t=(p+1)\Delta t$ 时刻的位移, u_j^{p+1-j} 为计算区内计算点 j (空间坐标为 $x=-jc_a\Delta t$, 图 1) 在 $t=(p+1-j)\Delta t$ 时刻的位移, C_j^N 为二项式系数.

考虑如下形式的衰减平面波

$$\tilde{u}_j = u_j \exp(jc_a \Delta t \beta_x) \quad (2)$$

其中, c_a 为沿边界法线方向的视人工波速, β_x 为沿边界法线方向(文中为图 1 中的 x 方向)的视衰减系数, 它与真实衰减系数 β 和入射角 θ 的关系为 $\beta_x = \beta \cos \theta$, 若按图 1 所示的节点编号, β_x 为正数; u_j 相当于均匀平面波的位移. 因此, 将 u_j 用 \tilde{u}_j 表示, 并代入到由均匀平面波假设推导出的 MTF 式(1)中, 稍做整理, 即可得到衰减平面波入射时的多次透射公式. 由式(2)可得

$$u_j = \tilde{u}_j \exp(-jc_a \Delta t \beta_x) \quad (3)$$

将式(3)代入到式(1)即可得衰减波入射时的多次透射公式(这里称为加衰减系数的 MTF):

$$\tilde{u}_0^{p+1} = \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} C_j^N a_1^{-j} \tilde{u}_j^{p+1-j} \quad (4)$$

其中

$$a_1 = \exp(c_a \Delta t \beta_x) \quad (5)$$

实际上由于 β_x 一般为未知的, 通常采用人工衰减系数 β_a 来代替.

假定 Δt 为离散数值计算中所采用的时间步距, 则式(4)中计算点的空间步距 $c_a \Delta t$ 一般不等于离散节点的空间步距, 在数值实现中需通过空间内插. 引入多个人工波速和人工衰减系数, 并采用三点抛物线齐次内插(廖振鹏, 2001)后的实用形式为

$$D\tilde{u}_0^{p+1} = 0 \quad (6)$$

$$D = \prod_{m=1}^L [B_0^0 - t_{1,1}^m B_0^1 - t_{1,2}^m \delta_m B_1^1 - t_{1,3}^m (\delta_m)^2 B_2^1] \quad (7)$$

$$t_{1,1}^m = \frac{(2 - S_m)(1 - S_m)}{2} \quad (8)$$

$$t_{1,2}^m = S_m(2 - S_m) \quad (9)$$

$$t_{1,3}^m = \frac{S_m(S_m - 1)}{2} \quad (10)$$

$$\delta_m = \exp(-\beta_{am} \Delta x) \quad (11)$$

$$S_m = \frac{c_{am} \Delta t}{\Delta x} \quad (12)$$

式中, c_{am} 和 β_{am} ($m=1, \dots, L$) 分别为第 m 个人工波速和第 m 个人工衰减系数, B_j^q 为向后移动算子:

$$B_j^q \tilde{u}_n^p = \tilde{u}_{n+j}^{p-q} \quad (13)$$

2 频域反射系数

人工边界的精度通常用反射系数来表示. 下面我们分析 MTF 和加衰减系数的 MTF 分别在衰减波入射时的反射系数. 在频域内反射系数可表示成(廖振鹏, 2001)

$$R = \left| \frac{U_0^R}{U_0^I} \right| \quad (14)$$

式中, U_0^I 和 U_0^R 分别为入射平面谐波和反射平面谐波在边界点 $x=0$ 处的振幅. 首先给出频域内的多次透射公式, 对应于式(1)和(4)的频域形式分别为(振幅均以 U_j 表示)

$$U_0 = \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} C_j^N a^{-j} U_j \quad (15)$$

$$U_0 = \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} C_j^N a_0^{-j} U_j \quad (16)$$

其中

$$a = \exp(i\omega \Delta t) \quad (17)$$

$$a_0 = \exp(i\omega \Delta t + c_a \Delta t \beta_a) \quad (18)$$

假定向人工边界上一点 o 入射的衰减波与 x 轴的夹角为 θ (图 1), 则入射波沿轴的振幅可表示为

$$U_j^I = U_0^I (a_x)^j \quad (19)$$

$$a_x = \exp\left(\frac{i\omega c_a \Delta t \cos\theta}{c} + \beta \lambda \frac{c_a \Delta t}{\lambda} \cos\theta\right) \quad (20)$$

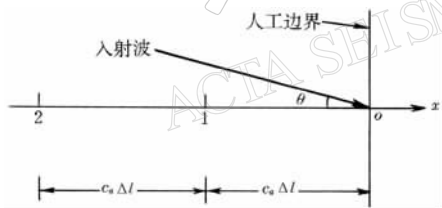


图 1 入射波射向人工边界的几何示意图

其中, c 为物理波速, β 为真实衰减系数; $\beta \lambda$ 表示在每个波长内的衰减因子, 代表波衰减的强弱程度. 下面我们分理想稳态和理想暂态情形分别进行讨论.

2.1 理想稳态情形

理想稳态情形是指反射波已得到充分发育的情形. 在这一情形下, 总波场由入射波和充分发育的反射波构成

$$U_j = U_j^I + U_j^R \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

$$U_j^R = U_0^R (a_x)^{-j} \quad (22)$$

将式(21)代入(15), 并利用式(19)和(22), 可得

$$U_0 = b_I U_0^I + b_R U_0^R \quad (23)$$

$$b_I = 1 - (1 - a_x^{-1})^N \quad (24)$$

$$b_R = 1 - (1 - a_x^{-1})^N \quad (25)$$

令式(21)中 $j=0$, 并将此式代入式(23)左端, 可得

$$\frac{U_0^R}{U_0^I} = -\frac{1 - b_I}{1 - b_R} \quad (26)$$

将式(24)、(25)代入(26), 按照反射系数的定义式(14)可得 MTF 透射衰减波的反射系数

为

$$R = \left| \frac{1 - a^{-1}a_x}{1 - a^{-1}a_x^{-1}} \right|^N \quad (27)$$

将式(17)、(20)代入上式, 并取 $c_a = c$ 可得

$$R = \left| \frac{1 - \exp[i2\pi(\Delta t/T)(\cos\theta - 1) + \beta\lambda(\Delta t/T)\cos\theta]}{1 - \exp[-i2\pi(\Delta t/T)(\cos\theta + 1) - \beta\lambda(\Delta t/T)\cos\theta]} \right|^N \quad (28)$$

式中, T, λ 分别为波动周期和波长.

将式(21)代入式(16), 经过同样的运算, 并取 $c_a = c, \beta_a = \beta$, 可得加衰减系数的 MTF 透射衰减波的反射系数为

$$R = \left| \frac{1 - \exp[i2\pi(\Delta t/T)(\cos\theta - 1) + \beta\lambda(\Delta t/T)(\cos\theta - 1)]}{1 - \exp[-i2\pi(\Delta t/T)(\cos\theta + 1) - \beta\lambda(\Delta t/T)(\cos\theta + 1)]} \right|^N \quad (29)$$

2.2 理想暂态情形

理想暂态情形是指在全波场中入射波占绝对优势的情形. 此时, 假定总波场等于入射波场

$$U_j = U_j^I = U_0^I(a_x)^j \quad (30)$$

将上式代入式(15)右端, 得

$$U_0 = b_I U_0^I \quad (31)$$

反射波位移可表示为

$$U_0^R = U_0 - U_0^I \quad (32)$$

将式(32)代入式(14), 并注意到式(31)、(24), 得

$$R = |1 - a^{-1}a_x|^N \quad (33)$$

将式(17)、(20)代入上式, 可得 MTF 透射衰减波的反射系数为

$$R = \left| 1 - \exp\left[i2\pi\left(\frac{\Delta t}{T}\right)\left(\frac{c_a}{c}\right)(\cos\theta - 1) + \beta_a \Delta t \cos\theta\right] \right|^N \quad (34)$$

将式(30)代入式(16), 经同样的运算, 可得加衰减系数的 MTF 透射衰减波的反射系数为

$$R = \left| 1 - \exp\left[i2\pi\left(\frac{\Delta t}{T}\right)\left(\frac{c_a}{c}\right)(\cos\theta - 1) + \beta_a \Delta t \cos\theta - \beta_a c_a \Delta t\right] \right|^N \quad (35)$$

取 $c_a = c, \beta_a = \beta$, 则式(34)、(35)可分别写为

$$R = \left| 1 - \exp\left[i2\pi\left(\frac{\Delta t}{T}\right)(\cos\theta - 1) + \beta\left(\frac{\Delta t}{T}\right)\cos\theta\right] \right|^N \quad (36)$$

和

$$R = \left| 1 - \exp\left[i2\pi\left(\frac{\Delta t}{T}\right)(\cos\theta - 1) + \beta\left(\frac{\Delta t}{T}\right)(\cos\theta - 1)\right] \right|^N \quad (37)$$

为了更直观地表明加衰减系数的 MTF 透射衰减波时对反射系数的影响, 给出 $\Delta t/T = 1/20$, 以及 $\beta\lambda$ 分别为 0.2, 2.0 时两种情形下加衰减系数的 MTF 和 MTF 透射衰减波的反射系数与入射角 θ 的关系曲线(图 2). 从图中可以看出, MTF 和加衰减系数的 MTF 对弱衰减波($\beta\lambda$ 较小时)的透射能力相当, 即 MTF 对弱衰减的透射具有很好的精度. 但透射强衰减波时($\beta\lambda$ 较大), 加衰减系数的 MTF 较 MTF 具有明显的优势, 而且, 对于不加衰减系数的 MTF, 在入射角为 0 时其反射系数也不为 0, 即不能完全透射外行强衰减波.

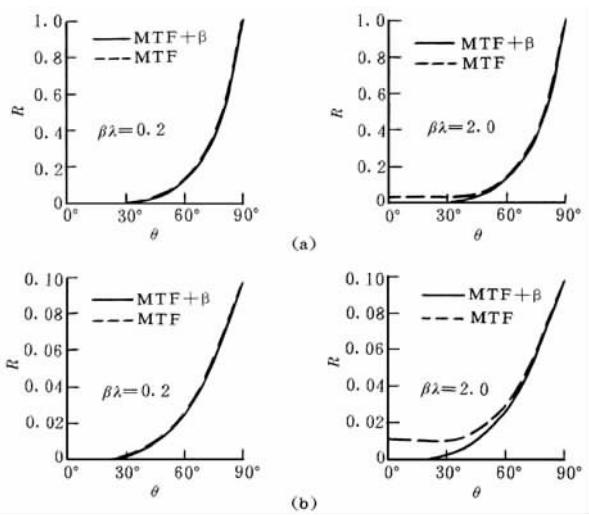


图 2 频域内的反射系数
(a) 理想稳态情形; (b) 理想暂态情形

3 算例

为了检验我们所提出的边界的精度，设计了两相介质土力学模型的两个算例.

3.1 一维问题

考虑两相介质一维问题，计算模型如图 3 所示. $F(t)$ 为一脉冲荷载，计算所用的物理参数见表 1. 其中， ρ_s 和 ρ_w 分别为固相和液相的质量密度， K_s 和 K_w 分别为固相骨架和液相流体的压缩模量， n 为孔隙率， k 为渗透系数. β 值和波速 c 可根据表中的参数给出. 根据荷载的频谱、 β 值和波速 c 可得 $\beta\lambda_{\min}=2.3$ (陈少林, 2002). 数值计算采用集中质量有限元模型，时域积分采用中心差分结合单边差分的显式积分格式. 在 $x=40\text{ m}$ 处设置人工边界，将模型划分为 400 个两节点的柱单元，离散步距 $\Delta x=0.1\text{ m}$ ， $\Delta t=0.01\text{ s}$ ，人

表 1 物理参数

参 数	数 值
ρ_s	$2.0\times10^3\text{ kg/m}^3$
ρ_w	$1.0\times10^3\text{ kg/m}^3$
E_s	$0.7\times10^7\text{ N/m}^2$
E_w	$0.3\times10^7\text{ N/m}^2$
n	0.3
k	$1.0\times10^{-4}\text{ sm}^3/\text{kg}$

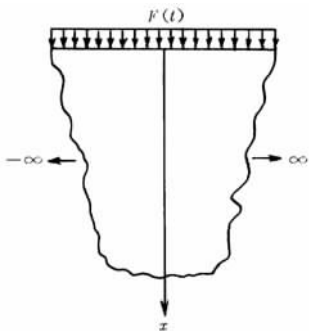


图 3 一维半无限土层模型

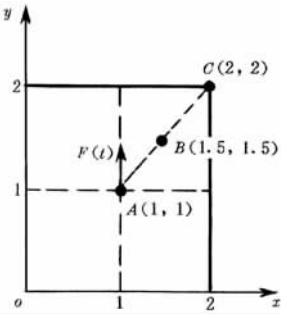


图 4 二维全空间内一点源的计算模型

工衰减系数 β_a 大约取衰减系数 β 的 0.7 倍左右. 分别采用多次透射公式(MTF)和本研究所介绍的加衰减系数的多次透射公式(MTF+ β)进行计算.

图 5 为 $x=30\text{ m}$ (第 301 号节点)和 $x=40\text{ m}$ (第 401 号节点, 也为人工边界点)处的位移时程, 所示位移均为无量纲化的位移. 图中短划线和短划点线分别表示采用加衰减系数的 MTF 和 MTF 所得的数值结果, 解析解(Simon, 1984)则用实线示出. 可以看出, 加衰减系数的 MTF 在模拟两相介质中的衰减波时具有较好的精度.

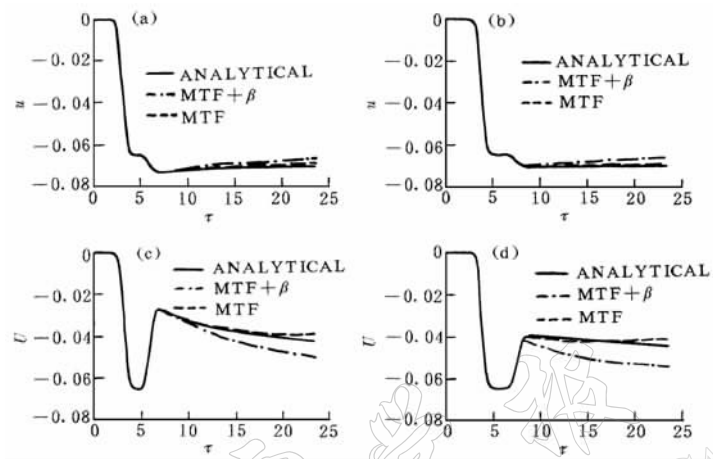


图 5 一维情形的饱和多孔介质的位移过程

(a) $x=30\text{ m}$ 处的固相位移; (b) $x=40\text{ m}$ 处的固相位移; (c) $x=30\text{ m}$ 处的液相位移;
(d) $x=40\text{ m}$ 处的液固相位移

3.2 二维问题

考虑两相介质二维无限空间内一点源问题, 计算模型如图 4 所示, 在中点(1,1)处的固相上作用一沿 y 方向的半正弦荷载.

计算所采用的无量纲化物理参数见表 2, 表中 λ 和 μ 为固相骨架的拉梅常数, 其它参数意义同前. 根据表中参数, 可得 P_1 (快压缩波)、 P_2 (慢压缩波) 和 S 波的波速分别为 1.0, 0.54 和 0.36 m/s; 衰减系数 β 分别为 0.0, 0.22 和 0.04(Chen,1994). 结合荷载的频谱, 则对于 P_2 波, $\beta_{\min}\approx 0.75$; 对于 S 波, $\beta_{\min}\approx 0.08$ (陈少林, 2002). 同样, 采用集中质量有限元模型, 在计算区域的四周(分别 $x=0, 2$ 和 $y=0, 2$)设置人工边界, 将计算区域离散为 20×20 个四节点正方形单元, 无量纲空间离散步距 $\Delta=0.1$. 采用中心差分结合单边差分进行时域数值积分, 无量纲时间步距 $\Delta t=0.01$. 边界上分别采用 MTF 和加衰减系数的 MTF 进行透射. 采用两个人工波速和人工衰减系数的二阶透射公式, 人工波速 $c_{a1}=0.7$, $c_{a2}=0.3$. 由于 P_2 波为强衰减波, P_1 波和 S 波为弱衰减波, 取人工衰减系数 $\beta_{a1}=0.0$, $\beta_{a2}=0.15$.

图 6 分别示出 $B(1.5, 1.5)$ 、 $C(2,2)$ 两点处的无量纲固相位移时程. 图中短划线为采用加衰减系数的 MTF 所得的计算结果, 短划点线为采用 MTF 的计算结果, 实线表示数值精确解——人工边界距离所感兴趣的区域足够远, 以致在计算时段内这一区域的数值解未受人工边界的影响. 从上述数值实验可以看出, 本研究所介绍的多次透射公式在模拟衰减

表 2 无量纲物理参数

λ	μ	ρ_s	ρ_w	E_w	k	n
0.12	0.24	1.176 5	0.588 2	0.12	1.0	0.3

波时具有较好的精度.

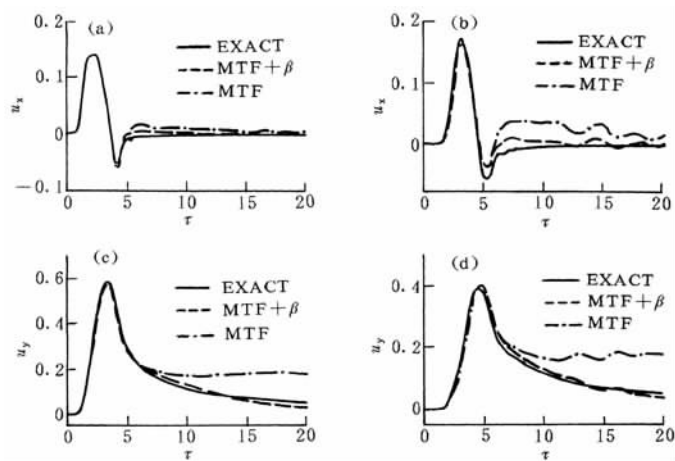


图 6 二维情形时饱和多孔介质的位移时程

(a) 点(1.5, 1.5)处 x 方向的固相位移; (b) 点(2.0, 2.0)处 x 方向的固相位移;
(c) 点(1.5, 1.5)处 y 方向的固相位移; (d) 点(2.0, 2.0)处 y 方向的固相位移

4 结语

本研究在多次透射公式的基础上,引入一衰减系数,得到了能够透射衰减波的多次透射公式(加衰减系数的 MTF). 当衰减系数为 0 时,即为 MTF. 通过分析衰减波入射时的反射系数,可以看出,对于弱衰减波(即 $\beta\lambda$ 较小时),MTF 具有较好的精度,进一步验证了多次透射公式可适用于弱衰减波情形;对于强衰减波,MTF 具有较大误差,且入射角为 0 时其反射系数也不为 0,而加衰减系数的 MTF 则具有较好的精度. 最后,通过饱和多孔连通介质的数值算例,进一步验证了加衰减系数的多次透射公式在模拟强衰减波时具有较高的精度.

参 考 文 献

- 陈少林. 2002. 两相介质近场波动中的数值模拟[D]. [学位论文]: 中国地震局工程力学研究所, 146~147
- 廖振鹏. 2001. 工程波动理论导论(第二版)[M]. 北京: 科学出版社, 233~235
- 廖振鹏, 黄孔亮, 杨柏坡, 等. 1984. 暂态波透射边界[J]. 中国科学(A 辑), **27**(6): 556~564
- Chen J. 1994. Time domain fundamental solution to Biot's complete equations of dynamic poroelasticity part I: Two-dimensional solution[J]. *Int J Solids Struct*, **31**(10): 1 447~1 490
- Clayton R, Engquist B. 1977. Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations[J]. *Bull Seism Soc Amer*, **67**: 1 529~1 540
- Givoli D, Keller J B. 1990. Non-reflecting boundary conditions for elastic waves[J]. *Wave Motion*, **12**: 261~279
- Higdon R L. 1987. Numerical absorbing boundary conditions for the wave equation[J]. *Math Comput*, **49**: 65~90
- Liao Z P. 1996. Extrapolation nonreflecting boundary conditions[J]. *Wave Motion*, **24**: 117~138
- Liao Zhenpeng. 2001. Transmitting boundary and radiation condition at infinity[J]. *SCIENCE IN CHINA (Series E)*, **44**(2): 177~186
- Simon B R, Zienkiewicz O C, Paul D K. 1984. An analytical solution for the transient response of saturated porous elastic solids[J]. *Int J Numer Anal Methods Geomech*, **8**: 381~398

Wolf J P, Song C. 1996. *Finite-Element Modelling of Unbounded Media*[M]. John WILEY, SONS, Chi Chesper,

MULTI-TRANSMITTING FORMULA FOR ATTENUATING WAVES

Chen Shaolin¹⁾ Liao Zhenpeng²⁾

1) *The State Key Laboratory of Vibration, Shock & Noise, SJTU, Shanghai 200030, China*

2) *Institute of Engineering Mechanics, China Seismological Bureau, Harbin 150080, China*

Abstract: The MTF is extended to case of attenuating incident wave by introducing an attenuation coefficient. The reflection coefficients of this modified MTF and MTF are evaluated and compared when an attenuating wave impinges on the boundary, and results demonstrate that MTF can be used to absorb slightly attenuating waves and the modified MTF is more capable of absorbing heavily attenuating waves than MTF. The accuracy of modified MTF is also tested by numerical examples of two-phase media.

Key words: MTF; attenuating wave; two-phase media

地震学报
ACTA SEISMOLOGICA SINICA