

文章编号: 0253-3782(2005)02-0225-05

# 求解运动方程的一种不等时间步长的显式数值积分方法<sup>\*</sup>

周正华<sup>1, 2)</sup> 王宇欢<sup>1)</sup> 刘 泉<sup>1)</sup> 尹晓涛<sup>1)</sup> 杨 程<sup>1)</sup>

1) 中国哈尔滨 150080 中国地震局工程力学研究所

2) 中国北京 100080 中国科学院力学研究所

**摘要** 在波动有限元模拟中, 若采用传统的显式数值积分方法求解运动方程, 计算时间步长需采用计算区内满足稳定条件要求的最小时间步长。然而, 对于大部分计算区域, 这一时间步长过小, 是不必要的。本文提出了一种不等时间步长的显式数值积分方法, 其基本思想是不同的计算区域采用满足各自稳定条件的计算时间步长。最后, 本文通过数值试验检验了这一方法的可行性及其对数值计算精度的影响。

**关键词** 波动有限元模拟 运动方程 显式数值积分方法 时间步长 数值试验

**中图分类号:** P315.3<sup>+1</sup>

**文献标识码:** A

## 引言

在线弹性介质中, 波动的集中质量有限元模拟运动方程可表示成如下形式(廖振鹏, 2002):

$$M_i \ddot{\mathbf{U}}_i(t) + \sum_l G_{il} \mathbf{U}_l(t) = \mathbf{F}_i(t) \quad (1)$$

式中,  $M_i$  为集中于节点  $i$  的质量,  $G_{il}$  为节点  $i$  与其相邻节点  $l$  之间弹性恢复力大小的刚度系数,  $\ddot{\mathbf{U}}_i(t)$  为节点  $i$  的加速度向量,  $\mathbf{U}_l(t)$  为节点  $l$  的位移向量,  $\mathbf{F}_i(t)$  为作用于节点  $i$  的外荷载向量。

对式(1)采用中心差分离散, 即将加速度向量离散化为

$$\ddot{\mathbf{U}}_i^p = \frac{\mathbf{U}_i^{p+1} - 2\mathbf{U}_i^p + \mathbf{U}_i^{p-1}}{\Delta t^2} \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)可得

$$\mathbf{U}_i^{p+1} = 2\mathbf{U}_i^p - \mathbf{U}_i^{p-1} - \frac{\Delta t^2}{M_i} \left[ \sum_l G_{il} \mathbf{U}_l^p - \mathbf{F}_i^p \right] \quad (3)$$

式中,  $\mathbf{U}_i^p$ 、 $\ddot{\mathbf{U}}_i^p$  分别表示节点  $i$  在  $t = p\Delta t$  时刻的位移向量和加速度向量,  $\mathbf{F}_i^p$  表示为作用于节点  $i$  的  $t = p\Delta t$  时刻的外荷载向量,  $\Delta t$  为时间步长,  $p$  为非负整数。

式(3)为求解波动方程式(1)的中心差分逐步积分格式, 这一积分格式是显式的、条件稳定的(Dokainish, Subbaraj, 1989; Park, 1977; 周正华, 周扣华, 2001), 稳定条件要求

\* 国家自然科学基金(50178065)、973 项目(2002CB412706)、国家社会公益研究专项(2002DIB30076)和地震科学联合基金(101066)共同资助。

2003-12-30 收到初稿, 2004-07-23 收到修改稿, 2004-09-17 决定采用。

时间步长  $\Delta t$  满足(廖振鹏, 2002)

$$\Delta t \leq \min\left(\frac{\Delta}{v_0}\right) \quad (4)$$

式中,  $\Delta$  为单元的最小尺寸,  $v_0$  为波在连续固体介质中的传播速度.

由式(4)可知, 为了保证式(3)数值积分的稳定, 计算时间步长由整个计算区域内最小的  $\Delta t$  确定. 这表明即使由局部稳定条件要求过小的时间步长对于大部分区域是不必要的, 但最终采用的积分时间步长却是由局部确定的, 这将大大增加计算量、降低计算效率. 本文将介绍一种基于中心差分法的不等时间步长的数值积分方法, 即不同的区域采用满足各自稳定条件的计算时间步长, 这一方法克服了计算时间步长由局部决定整体的弊端, 将大大减少计算量, 提高计算效率.

## 1 不等时间步长数值积分方法

不等时间步长数值积分方法的基本思想是, 首先将整个计算区域依据满足稳定条件要求的不同时间步长划分成若干个子计算区域, 对于不同的计算区域在数值积分时分别采用各自要求的计算步长. 为了便于讨论, 本文将借助一维匀质非均匀网格模型, 介绍不等时间步长数值积分方法的实施方法. 一维匀质非均匀网格模型如图1所示, 由图可见, 左半

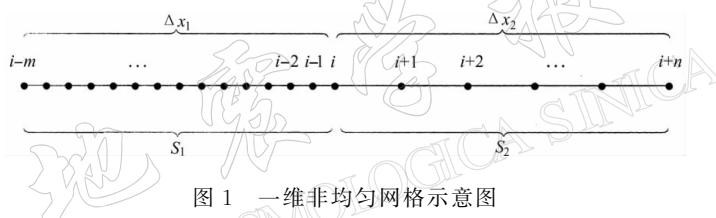


图 1 一维非均匀网格示意图

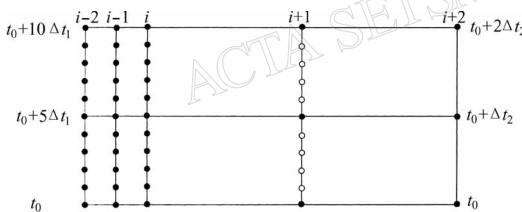


图 2 时空网格示意图 ( $\Delta t_2 = 5\Delta t_1$ )

部分  $S_1$  网格节点较右半部分  $S_2$  网格节点密, 空间步距分别为  $\Delta x_1 = 0.02$ ,  $\Delta x_2 = 0.1$ . 1. 假设介质波速为  $v_0 = 1$ , 由式(4)可知,  $S_1$  区间和  $S_2$  区间的时间步长  $\Delta t_1$ ,  $\Delta t_2$  可分别取为 0.02 和 0.1, 即  $\Delta t_2 = 5\Delta t_1$ . 对于这一问题, 若采用传统的显式积分格式, 实际用于分析计算的时间步长  $\Delta t$  由  $S_1$  区

间的时间步长  $\Delta t_1$  确定, 即取  $\Delta t = \Delta t_1$ . 然而, 不等时间步长数值积分方法将针对不同的区域采用满足各自稳定条件要求的计算时间步长进行分析计算. 对于图 2 所示的时空网格,  $S_1$  和  $S_2$  区内各节点的位移反应可直接由式(3)求得, 其计算时间步长分别取  $\Delta t_1$ ,  $\Delta t_2$ . 同样, 节点  $i$  的位移反应亦由式(3)求得, 依据稳定条件其计算时间步长取  $\Delta t_1$ , 则有

$$U_i^{p+1} = 2U_i^p - U_i^{p-1} - \frac{\Delta t_1^2}{M_i} [G_{i, i-1}U_{i-1}^p + G_{i, i}U_i^p + G_{i, i+1}U_{i+1}^p - F_i^p] \quad (5)$$

由式(5)不难发现, 除  $U_{i+1}^p$  不能确定外, 式(5)右边各项均已知, 本文称此为辅助时间点(图 2 中的空心圆)的位移. 设

$$n = \text{int}\left(\frac{p\Delta t_1}{\Delta t_2}\right) \quad (6)$$

其中, int 表示取整. 若节点  $i+1$  在  $t_0 + (n-1)\Delta t_2$ ,  $t_0 + n\Delta t_2$  及  $t_0 + (n+1)\Delta t_2$  三个时刻

的位移分别为  $U_{i+1}^{n-1}$ ,  $U_{i+1}^n$  和  $U_{i+1}^{n+1}$ , 则由二次插值公式可得辅助时间点的位移为

$$U_{i+1}^p = \frac{[p\lambda - n][p\lambda - (n+1)]}{2} U_{i+1}^{n-1} - [p\lambda - (n-1)][p\lambda - (n+1)] U_{i+1}^n + \frac{[p\lambda - (n-1)][p\lambda - n]}{2} U_{i+1}^{n+1} \quad (7)$$

若采用线性插值, 则有

$$U_{i+1}^p = [p\lambda - n] U_{i+1}^{n+1} - [p\lambda - (n+1)] U_{i+1}^n \quad (8)$$

其中,  $\lambda = \Delta t_1 / \Delta t_2$ .

综上所述, 不等时间步长数值积分方法的基本步骤可归纳为: ① 依据稳定条件式(4), 确定各区间的积分时间步长  $\Delta t_i$ ; ② 由各区间积分时间步长  $\Delta t_i$  确定出最大积分时间步长, 取  $\Delta t_{\max} = \max(\Delta t_i)$ . 同时, 对  $\Delta t_i$  作适当调整, 使  $\Delta t_{\max} = m \Delta t_i$  ( $m$  为正整数) 成立, 并满足稳定条件式(4); ③ 依据  $\Delta t_i$  确定各区间的积分次序, 其积分时间步长由大到小; ④ 采用式(3)对各区间进行逐步积分, 同时, 用式(7)或式(8)计算辅助时间点的位移; ⑤ 重复步骤④, 直至求解完毕.

## 2 数值试验

为了检验上述不等时间步长数值积分方法的可行性及计算精度, 下面将通过一维土层地震反应数值模拟算例予以证明, 同时亦就辅助时间点插值方法进行比较, 了解插值方法对计算精度的影响.

数值试验模型为一成层覆盖土层覆盖于半空间刚性基底之上的一维模型(图3), 覆盖土层总厚度为  $H$ , 坐标原点设置在自由表面, 坐标轴垂直向下, 覆盖土层介质的密度、剪切波速等力学参数均为深度  $z$  的函数. 表1列出了数值试验模型土层介质密度  $\rho$ 、剪切波速  $v_s$  及土层厚度  $h$ 、空间步长  $\Delta$  和时间步长  $\Delta t$  等参数.

首先依据有限单元离散化准则(廖振鹏, 2002)对各土层进行离散; 继而, 建立

节点集中质量有限元运动方程, 即式(1). 算例将采用本文提出的不等时间步长数值积分方法完成节点运动方程的数值积分, 求解在刚性基底垂直入射波作用下的土层反应, 入射波为一近似  $\delta$ -脉冲(廖振鹏等, 1981)(图4), 时间步长  $\Delta t$  按数值积分的稳定性准则确定, 分别取  $\Delta t_1 = 0.002$  s,  $\Delta t_2 = 0.01$  s,  $\Delta t_3 = 0.005$  s.

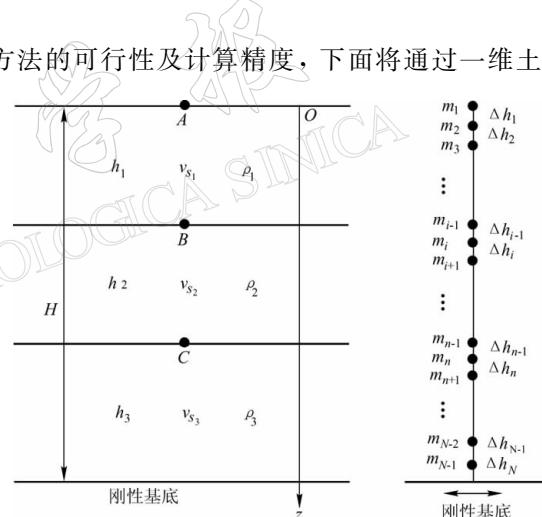


图3 数值试验分析模型

表1 数值试验模型参数

序号	岩土类型	$v_s / \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	$\rho / \text{t} \cdot \text{m}^{-3}$	$h / \text{m}$	$\Delta / \text{m}$	$\Delta t / \text{s}$
1	粘土	120.0	1.80	15.0	0.6	0.002
2	粗砂	400.0	2.0	50.0	5.0	0.010
3	基岩	800.0	2.20	60.0	6.0	0.005

有关数值试验结果如图 5、图 6 和图 7 所示, 其中图 5, 6, 7 分别示出了观测点 A, B, C 的位移反应。图中实线为传统显式积分方法的结果,  $\Delta t=0.005$  s; 点划线为不等时间步长二次插值数值积分方法的结果; 点线为不等时间步长线性插值数值积分方法的结果。由图可以看出, 不等时间步长二次插值数值积分方法及线性插值数值积分方法计算结果与传统显式积分方法数值计算结果相近, 且不等时间步长二次插值数值积分方法的精度较不等时间步长线性插值数值积分方法的精度高。

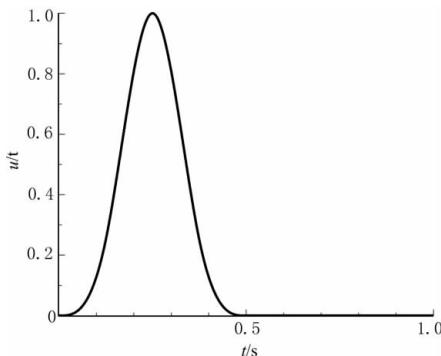


图 4 入射波时程

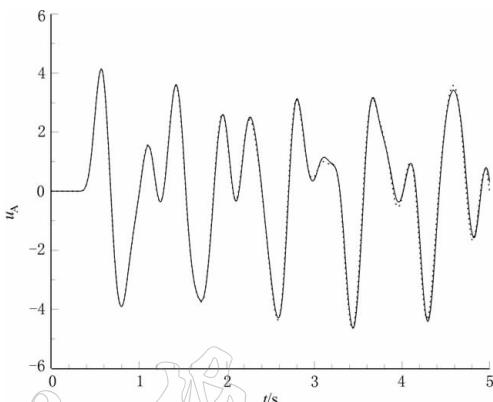


图 5 观测点 A 位移反应

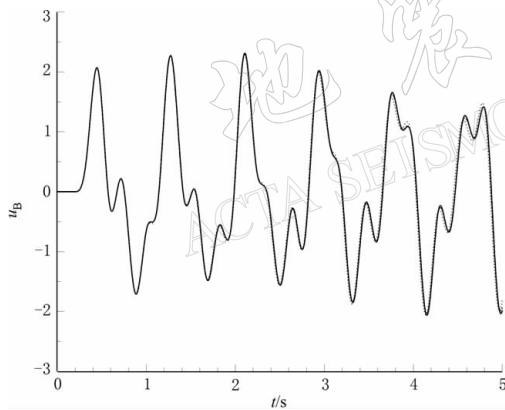


图 6 观测点 B 位移反应

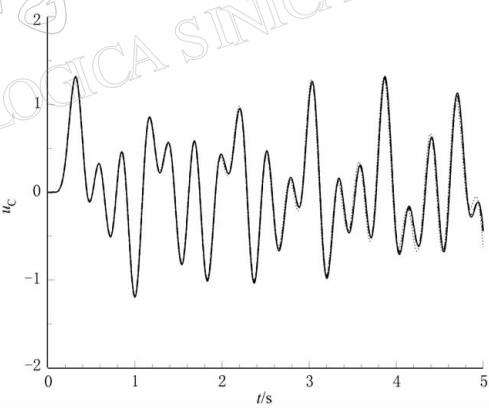


图 7 观测点 C 位移反应

### 3 结语

与传统显式积分方法相比, 不等时间步长数值积分方法对不同的计算区域分别采用各自满足稳定要求的计算步长进行数值积分, 不仅有利于减少计算量、提高计算效率, 而且还有助于提高数值模拟的精度。同时, 不等时间步长数值积分方法与集中质量有限单元法结合, 其积分格式亦为显式的, 至于稳定性问题, 由于分区间满足稳定条件, 不难得出在整个计算区间稳定条件亦满足。

最后值得指出的是, 尽管本文仅就一维问题对不等时间步长数值积分方法的基本思想及其应用进行了介绍, 但这一方法同样适用于二、三维问题。将这一方法应用于求解复杂

的高维问题，能极大地减少计算量，提高计算效率。

## 参 考 文 献

- 廖振鹏. 2002. 工程波动理论导引[M]. 北京：科学出版社，189~243  
廖振鹏, 杨柏坡, 袁一凡. 1981. 三维地形对地震地面运动的影响[J]. 地震工程与工程振动, 1(1): 56~77  
周正华, 周扣华. 2001. 有阻尼振动方程常用显式积分格式稳定性分析[J]. 地震工程与工程振动, 21(3): 22~28  
Dokainish M A, Subbaraj K. 1989. A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics—I  
Explicit methods[J]. *Computers & Structures*, 32(6): 1 371~1 386  
Park K C. 1977. Practical aspects of numerical time integration[J]. *Computers & Structures*, 7: 343~353

# A VARYING TIME-STEP EXPLICIT NUMERICAL INTEGRATION ALGORITHM FOR SOLVING MOTION EQUATION

Zhou Zhenghua<sup>1, 2)</sup> Wang Yuhuan<sup>1)</sup> Liu Quan<sup>1)</sup> Yin Xiaotao<sup>1)</sup> Yang Cheng<sup>1)</sup>

1) Institute of Engineering Mechanics, China Earthquake Administration, Harbin 150080, China

2) Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China

**Abstract:** If a traditional explicit numerical integration algorithm is used to solve motion equation in the finite element simulation of wave motion, the time-step used by numerical integration is the smallest time-step restricted by the stability criterion in computational region. However, the excessively small time-step is usually unnecessary for a large portion of computational region. In this paper, a varying time-step explicit numerical integration algorithm is introduced, and its basic idea is to use different time-step restricted by the stability criterion in different computational region. Finally, the feasibility of the algorithm and its effect on calculating precision are verified by numerical test.

**Key words:** finite element simulation of wave motion; motion equation; explicit numerical integration algorithm; time-step; numerical test