

模糊集理论与灰色系统理论在 地震预报中的综合应用*

冯德益¹⁾ 林命周²⁾ 顾瑾平³⁾ 陈荣华⁴⁾
何建树⁵⁾ 蒋淳¹⁾ 姜长宁³⁾ 杨彩霞³⁾

1) 中国天津 300201 天津市地震局
2) 中国上海 200062 上海市地震局
3) 中国南京 210014 江苏省地震局
4) 中国北京 100036 国家地震局分析预报中心
5) 中国杭州 310007 浙江省地震局

摘要

把研究不确定信息的两种理论方法,即模糊集理论与灰色系统理论的方法综合应用于地震预报当中,在以下三方面取得了初步研究结果:(1)地震预测的灰色模糊模型.在灰色系统理论GM(1,1)模型的基础上,把模糊数学的表达方式和灰色突变预测结合在一起,建立了地震预测的灰色模糊模型,为地震预报实用化提出了一种新的可能的途径,并给出了初步应用实例;(2)地震模糊聚类预测中指标优劣的灰色建模判断.仍以GM(1,1)灰色建模为基础,在模糊聚类分析之前作指标择优处理,减少了指标选择的盲目性.以1975年以来江苏及其邻区的地震活动资料为例,进行了分析计算,结果比较清晰,比一般模糊聚类结果有所改进;(3)关联度和模糊聚类在地震预报中的联合应用.把灰色系统理论中的关联度方法和模糊集理论中的模糊聚类分析方法,联合应用于地震预报研究当中,以华北地区每年地震强度预测为例进行了初步探讨.

本文的初步研究结果表明,地震预报所依据的不少信息和指标都带有灰色模糊的性质,因而,综合使用模糊集理论与灰色系统理论的方法可望取得更为有效的结果.

关键词 灰色模型; 灰色模糊地震预测模型; 关联度; 模糊聚类

一、前言

模糊集理论,在我国简称模糊数学,是用来研究模糊信息,使它们所反映的对象清晰化的一种新的数学工具.在把模糊集理论用来研究模糊系统时,即得出模糊系统理论方法,包括模糊系统的描述、结构、决策、优化和控制等.

60年代模糊集理论的创立(Zadeh, 1965)和80年代初灰色系统理论的提出(Deng, 1982),为地震研究提供了处理模糊的和不完备的信息的新方法.近年来,应用这两类方

* 本研究系地震科学联合基金会资助课题.

1990年9月11日收到本文初稿,1991年5月31日决定采用.

法来进行地震研究,特别是地震预报研究的论文与成果与日俱增,而且日趋走向实用化(冯德益,1989;邓民宪等,1988).经过从基础理论到实际应用的对比分析,便可以发现,这两类方法有不少共同点,同时又各具特色;若把这两类方法综合或联合应用,可望取得更为有效的识别、判断和预报效果.实际上,谭承业(1986a)已作过初步尝试.本文拟开拓这两类方法在地震预报研究中的进一步综合应用.

顺便要指出的是,灰色系统理论本身现在还存在一定的困难,主要是建模方法在理论上还不够严格,有时可能导致明显的误差.王铮等(1990)曾指出其症结所在,并提出了一种改进的算法.本文以原有的灰色系统理论方法为基础进行模糊数学分析,从另一个角度来提高灰色系统理论方法的预测与识别能力.但是,在具体算法上完全可以采用王铮等提出的改进算法与公式,使模糊灰色系统理论方法的预报与识别能力进一步提高.改进的算法与应用实例拟在另文中发表.

二、地震预测的灰色模糊模型

谭承业等(1986b)应用灰色系统理论中的灰色灾变预测模型,建立了对强震发震时间预测的灰色模型.在该模型中,原始数据的编序是按某一给定阈值,例如 $M \geq 6.5$ 来进行的.若能在此模型中引用模糊数学方法来处理,则可期望对预测结果有所改善.相应的模型可称为地震预测的灰色模糊模型.以下讨论两种这样的模型和应用实例.

1. 模型 1. 给定地区、给定时段内最大震级的预测模型

在原始数据编序中,取 $x \geq x_0$ 者为 $\mu = 1$, $x < x_0$ 者计算正态模糊集的 μ 值,并选 λ 与从属度 $\mu \geq \mu$,相对应的数据来组成数列,加以编号,然后对所得数列进行灾变预测.与谭承业等(1986b)相对应的具体步骤如下:

(1) 取某一时段(例如 1 年)作为时间单元,由地震目录得出所研究地区每一时段最大震级按时间组成的数列

$$\{x_0\} = \{x_0(1), x_0(2), \dots, x_0(n)\} \quad (1)$$

(2) 应用灰色灾变理论方法(邓聚龙,1985)进行灾变映射,得到地震震级 $M_s \geq M$ 的发震时段的数列

$$\{x_{0i}\} = \{x_{0i}(1'), x_{0i}(2'), \dots, x_{0i}(n')\} \quad (2)$$

此处震级下限 M 是一个模糊数,其从属度为

$$\mu = \begin{cases} 1 & M_s \geq M, \\ e^{-(\frac{M_s - M}{\sigma})} & M_s < M, \end{cases} \quad (3)$$

M 和 σ 分别表示下限震级的均值和确定该震级的均方差.序列(2)中选取的是 $\mu \geq \mu$,的震级构成的数列, μ 是应由经验途径确定的阈值.若原始数列编序(1)与灾变数列编序(2)之间存在关系 $x_{0i}(i') = x_0(q)$, 即有映射 $P: \{i\} \rightarrow \{q\}$, 则发震时段数列集合可表示为

$$P(k) = \{P(1'), P(2'), \dots, P(n')\} \quad k \in \{1', 2', \dots, n'\}$$

(3) 根据只含一个变量的一阶灰色微分方程模型, 即 GM(1,1) 模型(邓聚龙, 1985) 建模, 可以得出

$$\hat{P}(1)(k+1) = (P^{(1)}(0) - \frac{u}{a}) e^{-ak} + \frac{u}{a} \quad (4)$$

式中, $P^{(1)}(k) = \sum_{m=1}^k P(m)$ 为 $P(k)$ 的一次累加生成, $\hat{P}^{(1)}(k)$ 为其估值, a, u 为由以下关系式确定的两个参数:

$$\hat{a} = [a, u]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y_N \quad (5)$$

$$B = \begin{bmatrix} -Z^{(1)}(2') & 1 \\ -Z^{(1)}(3') & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -Z^{(1)}(n') & 1 \end{bmatrix} \quad Y_N = \begin{bmatrix} P(2') \\ P(3') \\ \vdots \\ P(n') \end{bmatrix}$$

$$Z^{(1)}(k) = 0.5 P^{(1)}(k-1) + 0.5 P^{(1)}(k) \quad (6)$$

$Z^{(1)}(k)$ 为 $P^{(1)}(k)$ 的均值生成函数.

(4) 进行灰色预测: 当 k 代表最近发生的一次地震时, $(k+1)$ 即为所预测的下一次地震的相应数值; 对 $\hat{P}^{(1)}(k+1)$ 数列进行累减生成运算, 得到 $\hat{P}(k+1)$, 即可求得下一次 $M_s \geq M_z$ 或 $M_s \geq M_z$ 地震的时段, 符号 \geq 表示“约大于等于”.

应注意的是, GM(1,1) 模型要求数列 $\{P\}$ 满足一定的光滑条件, 即 $\{P\}$ 应为关联次子空间 $\{P, F_{-1}\}$ 上的光滑离散函数(邓聚龙, 1985).

若 $P(k+1)$ 表示序号为 $k+1$ 的 $M_s \geq M_z$ 地震的实际发生时间(年·月), $\hat{P}(k+1)$ 为用该次地震以前的地震数据作灰色模糊预测所得的下一次 $M_s \geq M_z$ 或 $M_s \geq M_z$ 地震的发生时间, 则预测误差为

$$e_{k+1} = P(k+1) - \hat{P}(k+1) \quad (7)$$

选取序列(2)所用的阈值 μ_z 应考虑两个因素: 第一, 震级 M 的模糊度. 例如, 若取 $\sigma = 0.3$, $M_z = 6.5$, 则当 $\mu_z = 0.6$ 时, 所有 $M_s \geq 6.3$ 的地震均可看成 $M_s \geq 6.5$ 或 $M_s \geq 6.5$ 的地震; 当 $\mu_z = 0.3$ 时, 所有 $M_s \geq 6.2$ 的地震均可看成 $M_s \geq 6.5$ 的地震; 第二, 预报的准确度. 调节参数 μ_z , 可以使预报的均方差 $e_s = \sqrt{\sum_{k=1}^n e_{k+1}^2 / (n-1)}$ 减小到一定的数值或者达到极小值.

与纯灰色预测相比, 灰色模糊预测有以下优点: 第一, 考虑了事实上存在的震级确定中的模糊性, 选用 M_z 作为震级下限, 预报 $M \geq M_z$ 的地震; 第二, 引进了一个可以描述震级模糊度并调节预报效能的阈值参数 μ_z ; 第三, 考虑了各次地震的震级测定误差, 即式(3)

中的 σ ;参数 σ 也可以对预报效能起一定调节作用.显然,纯灰色预测是取 $\mu_s = 1$ 时的特殊情况.

2. 模型Ⅱ. 给定地区、给定时段内某一震级范围的地震的预测模型

在模糊化的过程中,把式(3)换为全正态模糊集关系式

$$\mu = e^{-\left(\frac{M - M_s}{\sigma}\right)^2} \quad (8)$$

从而把原始数列 $\{x_0\}$ 各时段的震级模糊化在 M_s 左右,预测数列 $\hat{P}(k+1)$ 也就直接化为预测震级在 M_s 左右的地震时段.

3. 应用实例

(1) 川、滇地区 取谭承业等(1986b)选用的川、滇地区 1956—1985 年的历年最大地震震级构成的数列 $\{x_0\}$, 分别预报 1986—1989 年间不同震级下限的强震发生时段, 所得结果及其与实际发震情况的对比见表 1.

表 1 预报震级与发震时段的结果对比

预报震级 M_s	不同 μ_s 的模糊灰色预报时段			实际发震情况			e_{k+1} (年)
	μ_s 值	预报时段 (年·月)	e_s	时间 (年·月)	地点	震级 M_s	
$M_s \geq 6.0$	0.7—1.0	1989.12	0.11	1988.11	澜沧	7.6	-1.1
	0.4—0.6	1989.3	0.13	1989.4	巴塘	6.8	-0.7 -0.3 +0.1
	0.1—0.3	1989.6	0.14				-0.5 -0.1
$M_s \geq 6.5$	0.7—1.0						
	0.4—0.6	1987.9	0.03	1988.11	澜沧	7.6	+1.1 +1.5
	0.2—0.3	1989.3	0.14	1989.4	巴塘	6.8	-0.3 +0.1 +0.1 +0.5
	0.1	1988.9	0.10				
$M_s = 7.0$	0.4—1.0						
	0.2—0.3	1987.4	0.04	1988.11	澜沧	7.6	+1.5
	0.1			1989.4	巴塘	6.8	+2.0

由表 1 可以看出,若使用灰色模糊预测模型Ⅰ,并取不同的 μ_s 值,则可预测出 1987 年 9 月至 1989 年 12 月间将要发生 $M_s \geq 6.5$ 地震;结果于 1988 年 11 月和 1989 年 4 月分别发生了澜沧 7.6 级地震和巴塘 6.8 级地震,取 $\mu_s = 0.1—0.3$ 得出的预报结果符合最好.若使用模型Ⅱ预报 $M_s = 7.0$ 地震的时段,则为 1987 年 4 月,误差达 1.5 年以上,这是由于原始数据太少的缘故.

(2) 首都圈地区 取以北京为中心,范围在 $38.5—41.0^\circ\text{N}$ 和 $114—120^\circ\text{E}$ 内的地区为首都圈地区,时间以季度为单位.利用 1980 年第 1 季度以来的地震活动性资料,要求最大震级数列(1)至少包含三个数,对 $M_s \geq 5.0$ 地震进行灰色模糊预测,所得结果见表 2.

由表 2 可以看出, $\mu_s = 0.8$ 对应的灰色模糊预测结果与实际发震情况符合最好.

表2 用1980年第1季度-1988年第4季度的地震数列 $\{x_i\}$ 预报首都圈M_i ≥ 5.0 地震发震时段的结果及其与实际发震时段的对比

不同 μ_i 的灰色模糊预报时段						实际发震时段			c_{i+1} (季) $\mu = 0.8$	
$\mu_i = 1$		$\mu_i = 0.8$		$\mu_i = 0.6$		年份	季度	震级 (M)		
年份	季度	年份	季度	年份	季度					
1982	3	1983	1	1982	4	5.3	+1			
1983	3	1983	4	1983	2	5.1	-1			
1984	3	1984	1	1984	2	5.2	0			
1985	2	1985	1	1985	2	5.0	+1			
1986	4	1986	2	1986	3	5.0	-2			
1987	2	1987	2	1987	4	1988	3	5.0	+5	
1989	1	1989	3	1990	1	1989	2	5.0	-1	

三、地震模糊聚类预测中指标优劣的灰色建模判断

模糊聚类分析已在地震预测工作中推广应用,但其实际效果依赖于选用的指标. 采用灰色系统理论方法作模糊聚类分析之前的指标优劣分析,可以改进模糊聚类分析的结果.

1. 指标变化趋势的灰色建模判断方法

为了通过模糊聚类分析对较大地震进行预测,最好能选用那些随地震孕育过程而同步变化的地震活动性指标或前兆指标. 这种同步性一般难于直观识别,而通过灰色系统理论GM(1,1)的建模分析之后,却可以较清楚地看出各指标随时间的变化趋势是否一致,从而决定指标的取舍. 淘汰那些随时间变化趋势不一致的指标,就能提高模糊聚类分析的质量.

邓聚龙(1985)指出,离乱数列即灰色数列或灰色过程,对灰色过程建立的微分方程型的动态模型,称为灰色模型,记为GM.

设在模糊聚类分析中拟选用的指标有随时间变化的序列 $x_i^{(0)} = (x_i^{(0)}(1), x_i^{(0)}(2), \dots, x_i^{(0)}(n))$, $i=1, 2, \dots, m$, 则可按以下步骤来作灰色建模处理并对其变化趋势作出判断:

(1) 求 $x_i^{(0)}$ 的一次累加生成

$$\text{AGO } x_i^{(0)} = x_i^{(1)} \quad x_i^{(1)}(k) = \sum_{j=1}^k x_i^{(0)}(j) \quad (9)$$

(2) 根据已知的数列 $x_i^{(1)}$, 按 GM(1,1) 建模, 即可由式(5)计算出常数 a_i, b_i .

(3) 根据给定的初值 $x_i^{(0)}(1) = x_i^{(1)}(0)$ 及计算出的常数 a_i, b_i , 由式(4)可计算出估计值 $\hat{x}_i^{(1)}(k+1)$, $k=1, 2, \dots$, 其中 b 代替 u , 参数 a, b 可用式(5)来确定, $x^{(1)}$ 代替 P .

(4) 根据各指标的 $\hat{x}_i^{(1)}(k+1)$ 随时段 k 的变化趋势, 可以判断出一些变化趋势基本相同的指标, 淘汰变化趋势相差较大的指标, 然后进行模糊聚类分析, 便可以取得更好的效果.

2. 应用实例

现以江苏及其邻区($31-35^{\circ}\text{N}, 118-122^{\circ}\text{E}$)1975年以来的地震活动性为例, 进行具体分析. 为了使用模糊聚类分析方法对较大地震进行预测, 我们先初选以下11项地震活动性指标:(1)一年中发生次数最多的地震震级; (2) $b=0.4343$ ($M-0.5$); (3)一年中的

平均震级; (4)平均纬度偏差; (5)平均经度偏差; (6)平均纬度; (7)平均经度; (8)每年的最大震级; (9)每年 $M_L \geq 1.5$ 地震次数; (10)逐年地震次数差 ($M_L \geq 1.5$); (11)逐年最大震级差. 为避免过大的数值差, 凡总次数超过 150 时都按 150 计算. 此外, 为了运算方便, 当指标取负值时, 把它们安排到十分位和百分位的间隔上. 各指标的原始数据见表 3. 由表 3 的数据作出的各指标随时间变化曲线, 很难分辨出变化一致的那些指标, 因而难于作出取舍的选择.

表 3 江苏及其邻区地震活动性指标的原始值

年份	指 标										年份
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1975	2.6	0.391	2.611	1.01	1.105	32.900	121.800	5.7	91	0.6	0.01
1976	1.8	0.641	2.436	1.225	1.095	34.011	121.101	4.3	67	0.24	0.01
1977	1.8	0.608	2.214	0.910	0.744	33.060	119.300	5.0	115	48	0.07
1978	2.3	0.452	2.461	1.014	0.934	32.27	120.300	3.9	59	0.56	0.01
1979	2.1	0.498	2.372	1.118	0.608	31.161	119.101	6.3	150	100	2.4
1980	1.8	0.657	2.161	1.181	0.957	33.022	121.172	3.5	84	0.66	0.028
1981	1.8	0.600	2.224	1.099	0.937	31.150	119.101	3.9	68	0.16	0.4
1982	2.1	0.498	2.373	0.891	0.804	32.303	120.243	5.0	73	5	1.1
1983	1.8	0.615	2.206	1.052	0.957	32.303	120.041	3.5	52	0.21	0.015
1984	3.4	0.357	2.718	0.459	0.527	32.303	121.221	6.3	150	98	2.8
1985	2.6	0.435	2.499	0.587	0.727	32.273	120.254	4.1	150	0	0.022
1986	2.3	0.449	2.468	1.056	1.063	32.172	121.194	5.1	60	0.70	1
1987	2.3	0.432	2.504	0.491	1.055	33.210	120.172	5.4	89	9	0.3
1988	2.3	0.440	2.486	0.986	0.884	32.183	121.251	3.6	58	0.31	0.018
1989	2.6	0.547	2.294	1.047	1.249	32.65	119.963	4.0	93	35	0.4

表 4 各指标灰色建模的参数

指标	$x^{(0)}(1)$	a	b	指标	$x^{(0)}(1)$	a	b
1	2.6	-1.947×10^{-2}	1.801	7	121.8	-8.806×10^{-3}	120.215
2	+0.445	-2.945×10^{-2}	0.644	8	5.7	9.102×10^{-4}	4.706
3	2.476	-7.452×10^{-1}	2.240	9	150	-4.375×10^{-3}	103.934
4	1.914	-7.6070×10^{-1}	1.540	10	0	7.525×10^{-2}	-6.883
5	1.168	-1.688×10^{-1}	0.851	11	0.01	-4.316×10^{-2}	0.167
6	32.9	3.59×10^{-1}	33.943				

将表 3 中的各指标作 GM(1, 1) 建模处理, 可计算出它们的灰色建模参数 $x^{(0)}(1)$, a 和 b , 如表 4 所示. 然后按(4)式计算出各指标的 $\hat{x}^{(0)}(k+1)$, 并作出其随时间序号 k 的变化曲线(见图 1). 由图 1 容易看出, 指标 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9 的变化趋势比较一致, 可能受同一孕震过程中的某一同因素的控制, 因而可作为地震模糊聚类预测的指标.

利用灰色建模优选后的指标进行模糊聚类分析, 可得出比未作指标选择时更好的分类结果, 主要是能把该区的两次 6 级以上大地震的年份(1979, 1984)都分到一类; 而另一类中包括的是 5 个 $M=5.0-5.7$ 地震年份和 5 个 $M=3.5-4.1$ 地震年份; 至于处在中间状态的 1977 年($M=4.6$), 则它再另外单独成类.

四、关联度和模糊聚类在地震预报中的联合应用

如前所述, 谭承业(1986a)曾把灰色系统理论中的关联度方法与模糊聚类分析方法同时用来分析强震前兆, 效果较为满意。本文进一步讨论这两种方法的联合应用问题, 主要方向有两个: 一是可以用关联度来代替基于模糊等价关系的聚类分析方法中的相似系数(冯德益等, 1983); 二是同时利用模糊聚类分析结果与关联度分析结果进行综合对比分析。

1. 方法

设有 n 个样本, 每个样本有 m 个指标, 即

$$x_i = x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}, \dots, x_{im} \\ i = 1, 2, \dots, n$$

根据邓聚龙的定义, 关联系数可表示为:

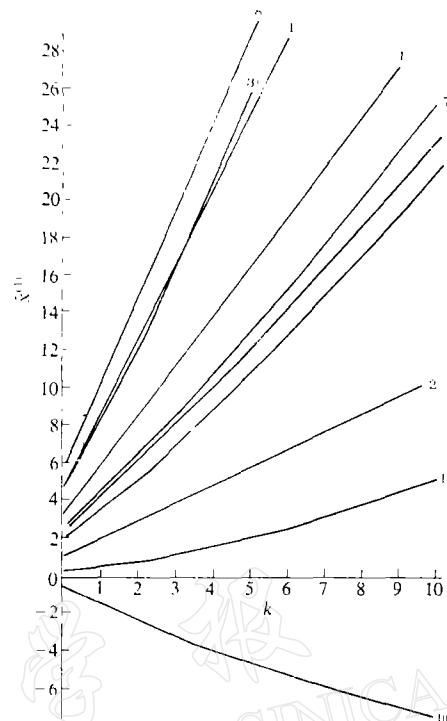


图 1 灰色建模后各指标的取值随时间段序号的变化曲线

$$\xi_{kji} = \frac{\Delta_{\min} + \zeta \Delta_{\max}}{|x_{jk} - x_{ik}| + \zeta \Delta_{\max}} \quad (10)$$

$$\Delta_{\min} = \min_k \min_j \min_i |x_{jk} - x_{ik}|$$

$$\Delta_{\max} = \max_k \max_j \max_i |x_{jk} - x_{ik}|$$

$k = 1, 2, \dots, m$; $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$; $i \neq j$ 。式中 $\zeta = (0, 1)$ 为某一给定常数, 通常可取 $\zeta = 0.5$ 。

各样本相互之间的关联度为

$$\gamma_{ji} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \xi_{kji} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad i \neq j \quad (11)$$

对于固定样本 j , γ_{ji} 即为不同样本 i 对第 j 个样本的关联度。关联度 γ_{ji} 越大, 样本 i 与 j 越接近。

关联度 γ_{ji} 具有自反性、对称性和传递性, 可以直接用来聚类。但是, 为了减少阈值 λ 的选择次数, 最好先对 γ_{ji} 求传递闭包(冯德益等, 1983), 再用 γ_{ji} 的传递闭包进行模糊聚类分析。

联合利用其它样本对某一待判样本的关联度及这一待判样本在模糊聚类分析中所归

属的类别,便可以判定该待判样本的性质.

2. 实例

作为例子,把上述方法应用于华北地区($110 - 126^\circ E, 32 - 44^\circ N$)每年地震强度的预测. 所用指标包括前三年的每年折合成 $M_s = 4.0 - 4.4$ 的地震总数 N 、地震能量 E 、地震分布所占平方度数 n 、各平方度之间的平均距离 L 以及这些指标相邻两年差的绝对值 $|\Delta N|$ 、 $|\Delta E|$ 、 $|\Delta n|$ 和 $|\Delta L|$, 共 24 个指标. 把 1961-1975 年, 1977-1984 年共 23 个样本作为已知样本. 把发生唐山大地震的 1976 年和 1985-1990 年作为待预报样本. 每一年度的起算时间是前一年 10 月, 终止时间是同年 9 月. 用两种方法的判别结果及综合判别结果与实际发震情况的对比见表 5. 由表 5 可以看出, 各年度的综合判别结果都与实际发震情况相符, 其中 1990 年大同地震的震级最初定为 6.1, 以后有人修定为 5.8.

表 5 不同方法判别结果与实际情况对比分析

待判年度	模糊聚类结果	关联度分析结果	实际最大震级	综合评判结果	符合情况
1976	不确定	> 6	7.6	> 6	✓
1985	< 6	不确定	4.6	< 6	✓
1986	< 6	< 6	5.0	< 6	✓
1987	< 6	< 6	4.6	< 6	✓
1988	< 6	< 6	4.6	< 6	✓
1989	不确定	< 6	4.3	< 6	✗
1990	< 6	< 6	6.1(5.8)	< 6	✓

五、结束语

本文的初步研究成果表明, 地震预报依据的不少信息和指标, 包括地震活动性指标, 都带有灰色模糊的性质, 因而综合使用模糊集理论与灰色系统理论的方法可望取得更为有效的结果. 这样, 至少比每一种方法单独使用更为优越, 因而可在各地区进一步试用与检验. 当然, 选用的原始数据的质量及地区范围的确定是否合理等都可能对地震预报效果有所影响, 实际应用时还需要具体分析与发展.

参 考 文 献

- 邓民宪, 宋龙伯, 1988. 灰色系统理论在地震研究中的应用综述. 国际地震动态, 3: 1-4.
- 邓聚龙, 1985. 灰色系统理论的 GM 模型. 模糊数学, 2: 23-32.
- 冯德益, 楼世博, 林命周, 陈化成, 顾瑾平, 钟廷姣编著, 1983. 模糊数学方法与应用, 58-68. 地震出版社, 北京.
- 冯德益, 1989. 模糊数学方法在中日两国地震预报研究中的应用. 国际地震动态, 6: 1-6.
- 谭承业, 1986 a. 强震前兆的关联度及模糊聚类分析. 地震研究, 9, 409-418.
- 谭承业, 阮圣娜, 杨桂芬, 1986 b. 地震灰色模型的建立及讨论. 地震研究, 9, 685-692.
- 王铮, 和莹, 1990. 灰色系统建模方法的理论困难及其克服. 系统工程理论与实践, 10, 5, 17-20.
- Deng, J. L., 1982. Control problems of grey systems. *Systems and Control Letters*, 1, 5, 288-294.
- Zadeh, L. A., 1965. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8, 338-353.