

地震活动非线性行为的数学建模^{*}

杨立明 石特临 郭大庆

(中国兰州 730000 国家地震局兰州地震研究所)

摘 要

应用非线性数学模型研究了地震活动的非线性行为：① 探索了门限自回归模型和指数自回归模型的理论和建模方法；② 利用门限自回归模型研究了地震活动的周期性和层次性；③ 利用指数自回归模型给出了震级序列的内在结构，解释了地震活动处于平静期和活跃期震级-频度的不同依赖关系。

主题词 数学模型；地震活动性；非线性演化

引言

事物相互依存的非线性表现为相互约束、相互反馈。有了非线性才有形态的多样性，如定态、周期状态、准周期状态、局部的复杂性等。地震活动具有周期轮回性、强度的强弱起伏性以及发震频度的时空不均匀性等，这些特性是各种内外因素相互依存、共同作用的结果。震级序列则是这些作用综合的、直观的反映，蕴含着所有参与作用的因素的痕迹。因此，本文就从震级序列入手，应用动态时序分析法，建立地震活动非线性时序数学模型，探索地震活动的非线性行为。由于非线性行为及其过程的复杂性，动态时序分析非线性模型的研究及应用尚处于探索阶段。目前所涉及的非线性时序数学模型还只有很少的几种，如门限自回归模型和指数自回归模型等，用以描述具有非线性现象的过程，如突变、准周期、极限环、幅频依赖等现象（项静恬等，1986；杨位钦、顾岚，1988；Priestley, 1982）。

1 非线性时序数学模型的原理

1.1 门限自回归模型的原理

门限自回归模型（项静恬等，1986；Tang, 1980；Tang and Wu, 1982）是利用门限值把非线性模型按状态空间取值，采用若干个线性模型来处理非线性过程。可以有效地描述具有周期规律的过程，同时不同状态之间的突变也可由门限值得到描述。

设 $\{x_t\}$ 是单变量的观察序列，门限自回归模型定义为

* 地震科学联合基金会资助项目。

1993 年 3 月 17 日收到初稿，1993 年 11 月 27 日收到修改稿并决定采用。

$$x_t = \varphi_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{P_j} \varphi_i^{(j)} x_{t-i} + \alpha_t^{(j)} \quad (\gamma_{j-1} < x_{t-d} \leq \gamma_j) \quad (1)$$

其中, $j=1, 2, 3, \dots, l$, d 为延迟参数, γ_j 为门限值, P_j 为模型的阶, $\{\alpha_t\}$ 为独立白噪音序列。模型(1)简记为 SETAR($d, l, P_1, P_2, \dots, P_l$), 表示把观察序列依门限值 γ_j 划分为 l 段。当 x_{t-d} 落入第 j 段, 即落入 $(\gamma_{j-1}, \gamma_j]$ 时就采用第 j 个阶数为 P_j 的自回归模型来描述。

地震活动具有多种不同的周期划分, 且震级序列中不同大小的地震应属于不同的活动层次, 应该采用不同的方程形式, 这相当于一种“状态”的突变。因此, 可应用门限自回归模型揭示地震活动的特点和规律。

1.2 指数自回归模型的原理

指数自回归模型是由 Haggen 和 Ozaki(1980)提出的, 用以复现非线性随机振动的某些特征, 如幅频依赖、极限环和突跳等非线性现象。指数自回归模型的一般定义为

$$x_t = \sum_{i=1}^P (\varphi_i + \pi_i e^{-\gamma x_{t-i}^2}) x_{t-i} + \varepsilon_t$$

其中, $\{\varepsilon_t\}$ 是高斯白噪音序列, γ 是调节因子。在实际应用中, 常采用它的简化形式

$$x_t = \sum_{i=1}^P (\varphi_i + \pi_i e^{-\gamma x_{t-k}^2}) x_{t-i} + \varepsilon_t \quad (2)$$

k 取自然数, 具体取值可依建模结果确定, 也可依相关函数决定。可以看出, 当 $|x_{t-k}|$ 增大时, 系数 $\rightarrow \varphi_i$, 当 $|x_{t-k}|$ 减小时, 系数 $\rightarrow \varphi_i + \pi_i$, 即模型的系数依赖于 x_{t-k} 。因而, 如果有一对特征复根, 模型的准周期振荡频率也将依赖于 x_{t-k} , 此即幅度与频率的相互依赖关系。

朱照宣教授曾提议, 可以从非线性随机振动的角度探究地震活动的规律。具有随机白噪音扰动的非线性随机振动方程为

$$\ddot{x}(t) + f[\dot{x}(t)] + g[x(t)] = \eta \quad (3)$$

其中, $f(\cdot)$ 为“阻尼力”, $g(\cdot)$ 为“恢复力”。倘若归结促发地震的因素为“驱动因素”, 阻尼地震发生的因素为“阻尼因素”, 同时还有随机扰动作用于孕震系统, 则可以写出与式(3)同一形式的方程。实际上, 有关探索不同断层区动力行为的滑块模型已经得出了满足这一形式的方程。该模型如图 1 所示。

在一定的假设及引入无量纲量的条件下, 运动方程为

$$\ddot{Y} + Y + 2\alpha Y = \frac{(\beta - 1)}{\varphi} \quad (4)$$

其中, α, β, φ 是参量, 跟系统的状态有关。 $Y = Y_2 - Y_1$ 为两滑块的相对位移。可见, 式(3)是式(4)的一般形式, 从而为从非线性随机振动的角度探索地震活动的非线性机制提供了证据(Huang and Turcotte, 1990)。另外, 在地震活动中也可以得到幅度和频度的定性依赖关系, 即在地震活动的平静期, 发震震级小, 发震频度亦

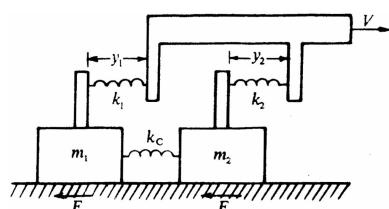


图 1 两滑块断层模型。 y_1, y_2 为滑块相对驱动器的坐标位置; k_1, k_2, k_c 分别为弹簧的弹性系数

小；相反在活跃期，震级大，发震频度也大。因此，在处理震级资料时，虽然对过程采取等距采样，但可用包络的模拟反映幅度的大小，而用幅度的大小定性说明频度的大小。

2 中国大陆主要地震活动区地震 活动的非线性数学建模

地震按一定构造分布的事实反映了地震活动对构造的依赖性。因此，可以按一定的活动构造划分研究区域，以便把与一定的构造相关的地震作为一个整体置于同一活动背景上来研究。对中国大陆及邻区，按构造和地震活动进行分区，总体上可分为三个区，其空间位置如图 2 所示：I. 青藏高原地震区，II. 新疆地震区，III. 华北地震区（陈荣华，1990）。本文主要研究前两个区。

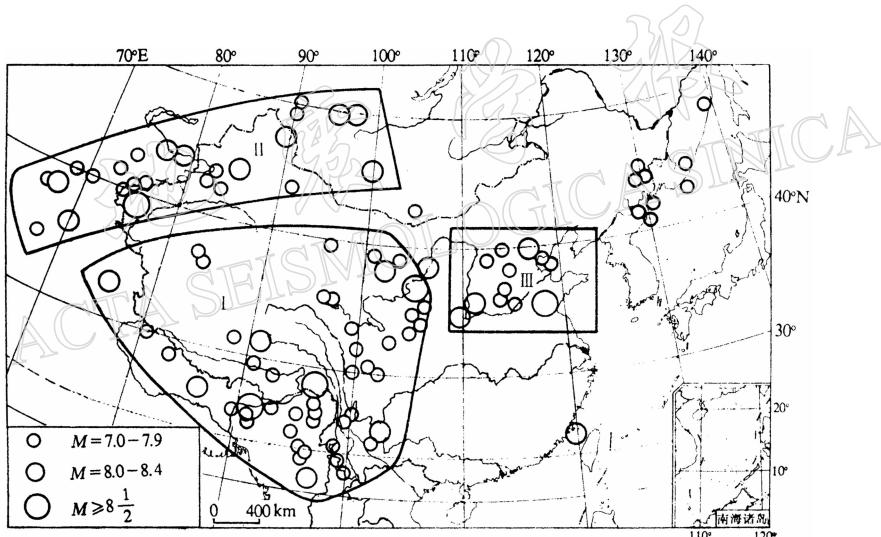


图 2 中国大陆及邻区三个主要地震活动区空间分布示意图

I. 青藏高原地震区，II. 新疆地震区，III. 华北地震区

在震级序列的采样中，遵循在主震目录的大背景下进行自然筛选，保证合理的采样间隔，如时段太小，据极值理论，选取合理时段内的最大地震；如时段太大，依震级-频度关系进行插值，保证采样序列能代表自然的地震过程。另外，建模中采用 AIC 准则。

2.1 华北地震区($33^{\circ}\text{--}43^{\circ}\text{N}$, $106^{\circ}\text{--}126^{\circ}\text{E}$)

据前述采样原则，本区 1921 年 10 月到 1990 年 3 月 $M_s \geq 4.5$ 地震的采样序列如表 1 所示。其中，平均采样间隔为 $\Delta t = 12.8$ 月，采样频率 $f = 0.078 \text{ 月}^{-1}$ ，其相关函数如图 3 所示。可以看出，相关图中延迟 10, 20 等对应较大的局域正相关，表明存在延迟约为 10 的周期性，即 $10 \times 12.8 = 128$ 月的准周期。同时，相关图上“正”，“负”相间，表明该序列的振荡性，且总有几个“正”或“负”同时出现，表明序列具有短期相关性。

为了提高建模精度，先对原始震级序列进行适当的预处理，同时分析序列的经验分布，以指导建模工作。

表 1 华北地震区 $M_S \geq 4.5$ 地震的采样震级序列(1921 年 10 月—1990 年 3 月)

5.0	6.5	5.5	4.6	4.8	6.5	5.4	6.0	4.9	4.7
6.2	6.2	5.0	4.7	7.0	6.5	6.0	5.7	4.8	6.0
4.9	6.7	6.2	4.8	6.0	5.7	4.8	4.6	5.5	4.5
4.7	5.0	5.0	5.2	5.4	4.7	4.5	4.5	5.4	5.5
7.2	6.3	5.7	4.5	7.4	4.7	4.7	4.8	4.5	4.5
7.3	7.8	6.2	5.9	4.9	5.2	5.6	4.9	5.8	4.6
5.1	4.8	5.8	4.5						

2.1.1 震级序列的经验分布

对由 n 个数据构成的序列 $\{x_n\}$, 作出它的一个分割 $(x_{l_1}, x_{l_2}, \dots, x_{l_k})$, 称 $x_j < x_{l_i} (i=1, 2, \dots, k) (j=1, 2, 3, \dots, n)$ 的数据个数与 n 之比为该序列的经验分布. 其中, 分割数 k 的选取, 以能反应出数据序列的精度为原则决定. 由此定义可以看出, 经验分布同归一化的震级频度分布对应和为 1. 因此, 经验分布从另一角度反映了归一化的震级-频度分布.

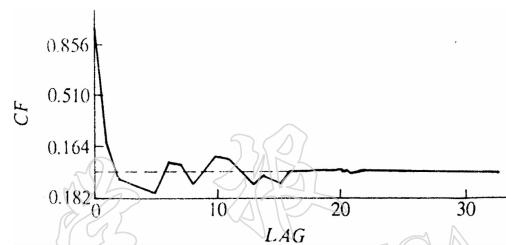
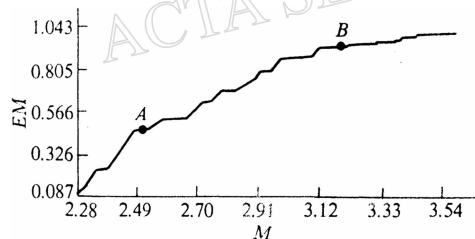


图 3 华北地震震级序列相关图

图 4 华北地区经 $\gamma=0.5$ 的 Box-Cox 变换震级序列经验分布图

分别为 2.3 和 2.5, 故取 2.3, 2.5 作为开方预处理门限值进行建模.

2.1.2 震级序列的门限自回归建模(黎令仪、刘德富, 1985)

通过对几种不同预处理序列建模结果, 从 AIC 最小准则、残差平方和最小及内符趋势检验较好等角度的分析比较, 得出本区最佳符合原始序列的有效模型为开方预处理序列的门限自回归模型

$$x_n = \begin{cases} 2.081 + 0.106x_{n-1} & (x_{n-14} \leq 2.3) \\ 1.220 + 0.262x_{n-1} + 0.214x_{n-2} & (2.3 < x_{n-14} \leq 2.5) \\ 3.396 - 1.448x_{n-1} + 0.938x_{n-2} & (x_{n-14} > 2.5) \end{cases} \quad (5)$$

2.1.3 震级序列的指数自回归建模

这里采用指数自回归模型的简化形式式(2)进行建模. 此时 x_{n-k} 的选择变得很重要.

由于模型要描述幅频依赖特性, 处于指数位置的 x_{n-k} 应能反映出 x_n 的这种特性, 否则模型变成了常系数 AR 模型. 故 x_n 与 x_{n-k} 应存在大的正相关. 由相关函数图 3 可以看出, 序列在延迟 1, 2, 6, 10 等位置上是大的正相关, 故取 $k=1, 2, 6, 10$ 进行试建模.

经分析比较, 最后得到符合本区震级序列的有效指数自回归模型为

$$\begin{aligned} x_n = & 1.683 + (0.513 - 0.332e^{-\gamma x_{n-6}^2})x_{n-1} + \\ & (-0.740 + 0.742e^{-\gamma x_{n-6}^2})x_{n-2} + \\ & (0.267 - 0.329e^{-\gamma x_{n-6}^2})x_{n-3} \end{aligned} \quad (6)$$

其中, $\gamma=0.5$, 且震级序列作了对数预处理.

2.2 青藏高原地震区

本区的空间位置如图 2 所示, 1920 年 5 月到 1990 年 10 月间, $M_s \geq 6.0$ 地震的采样序列如表 2 所示. 其中, 采样间隔 $\Delta t = 7.635$ 月, 采样频率 $f = 0.131$ 月⁻¹. 本区震级序列的相关图如图 5 所示. 可以看出, 相关图上延迟 4, 8, 12 等处对应局部

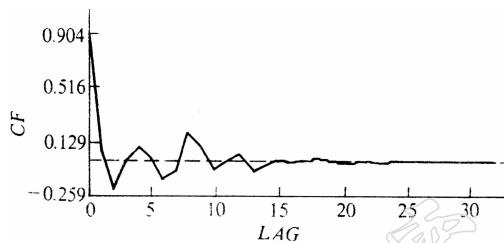


图 5 青藏高原地震区震级序列相关图

大的正相关, 表明存在有延迟为 4 的准周期.

表 2 青藏高原地震区 $M_s \geq 6.0$ 地震采样震级序列(1920 年 5 月—1990 年 10 月)

6.0	8.5	6.2	6.0	7.3	6.5	6.0	7.0	6.7	6.2
8.0	6.0	6.3	6.5	6.5	6.0	6.0	6.0	7.6	7.5
6.0	6.0	7.0	6.0	6.0	6.7	7.5	6.5	6.0	6.0
6.0	6.0	6.0	6.2	6.7	7.0	6.2	6.7	6.3	6.1
6.7	6.3	6.0	6.2	7.7	6.2	6.2	6.4	7.0	8.6
6.0	6.5	8.0	6.5	6.0	6.2	7.2	7.0	7.5	6.7
6.3	6.5	6.2	6.5	6.0	6.2	7.2	7.0	7.5	6.7
6.0	6.6	6.1	6.5	6.4	6.2	6.8	6.4	6.5	7.8
6.3	6.2	6.0	7.6	7.3	7.1	6.1	7.4	6.4	6.6
6.4	6.8	6.6	6.1	6.9	6.5	6.6	6.0	6.0	6.0
6.2	6.3	6.5	6.3	6.2	6.4	7.6	6.7	6.6	6.9
6.2									

同华北地震区一样, 得本区取对数($\ln m_i$)预处理门限自回归模型为

$$x_n = \begin{cases} 2.283 + 0.039x_{n-1} - 0.256x_{n-2} & (x_{n-6} \leq 1.9) \\ -1.787 - 0.202x_{n-1} + 0.831x_{n-2} - 0.021x_{n-3} + \\ 0.621x_{n-4} + 0.238x_{n-5} + 0.287x_{n-6} + \\ 1.149x_{n-7} - 0.478x_{n-8} + 0.462x_{n-9} - \\ 0.260x_{n-10} - 0.651x_{n-11} - 0.071x_{n-12} & (x_{n-6} > 1.9) \end{cases} \quad (7)$$

对数($\ln m_i$)预处理指数自回归模型为

$$x_n = 1.877 + (0.315 - 0.254e^{-\gamma x_{n-4}^2})x_{n-1} + (-0.448 + 0.259e^{-\gamma x_{n-4}^2})x_{n-2} + (0.138 - 0.005e^{-rx_{n-4}^2})x_{n-3} \quad (8)$$

其中, $\gamma=0.3$.

3 震级序列非线性时序数学模型的分析

3.1 门限自回归模型的分析

门限值的存在及其意义 门限值的存在对应于数据的性态或相应的物理过程. 其遵循的规律发生变化的特定位置, 从此位置分开, 过程应该采用不同的方程形式来描述. 在地震活动中, 震级序列门限值的存在说明从某一震级分开, 大于及小于该震级的地震应该采用不同的方程描述. 因此, 门限值的存在及其量化, 对应采用不同形式, 属于不同层次的震级序列的分界点给出了一种数学上的求法.

极限环和振荡 这里以华北地区震级序列的门限自回归模型为例, 该模型见式(5). 可以看到, 模型式(5)实际上是分属于不同区间的 3 个差分方程. 为分析方便, 作如下规定:

记

$$x_n = 2.081 + 0.106x_{n-1} \quad (1')$$

$$x_n = 1.220 + 0.262x_{n-1} + 0.214x_{n-2} \quad (2')$$

$$x_n = 3.396 - 1.448x_{n-1} + 0.934x_{n-2} \quad (3')$$

相应的区间记为 I, II, III, 即 $(2.1, 2.3]$ 为 I 区间, $(2.3, 2.5]$ 为 II 区间, $(2.5, 2.8)$ 为 III 区间. 方程(1')的非齐次通解为

$$x_n = 0.106^n c_1 + c_2 \quad (a)$$

方程(2')的非齐次通解为

$$x_n = 0.612^n D_1 + (-0.350)^n \cdot D_2 + D_3 \quad (b)$$

方程(3')的非齐次通解为

$$x_n = 0.483^n E_1 + (-1.933)^n \cdot E_2 + E_3 \quad (c)$$

可以看出, 解(a)、(b)是指数收敛的, 但由于方程(1')的非齐次参数较大, 在某一时刻 n , x_n 有可能由属于 I, 超越区间的限制直接进入 II 或 III. 式(c)由二项构成, 第二项发散, 且存在向大、小两个不同的发展方向.

假设从某个 n 为奇数的 x_n 开始, x_n 落入区间 III, 则其满足解(c), 随后的第($n+1$)个地震, 由于序号($n+1$)为偶, 由解(c)可知, x_{n+1} 仍增加, 处于区间 III, 接着第($n+2$)个地震其序号为奇, 解(c)很快收敛, 基震级落入区间 II 或 I. 假设落入区间 II, 则满足(b), 而(b)是缓慢收敛的. 随着收敛, 震级进入区间 I, 满足(a). 但由于此时非齐次参数的调节, 其震级可以很快反跳回区间 II 或 III. 进入 II 时, 又会缓慢地衰减回到 I. 而进入 III 时, 则会重复上述过程. 如此反复, 构成准周期性的循环, 体现为极限环. 若用区间号来标记, 则上述过程大致为

$$\text{III} \rightarrow \text{III} \rightarrow \text{II} \rightarrow \text{I} \rightarrow \text{III} \quad \text{或} \quad \text{III} \rightarrow \text{III} \rightarrow \text{I} \rightarrow \text{III}$$

延迟 d 的可能解释 在门限建模中, 延迟 d 是一个很重要的量. 将华北地震区及青

藏高原地震区建模过程中的局部极小 AIC 所对应的延迟, 根据这两区的准周期转换成相当的周期对应, 如表 3 所示。可见, 这些局部极小 AIC 所对应的延迟都是半周期的整数倍。所以, 延迟 d 是和地震活动周期相关的量。模型的最佳延迟是地震周期活动的必然选择, 反映了地震活动的周期相关性。

3.2 指数自回归模型的分析

这里以青藏高原地震区指数自回归模型为例。由模型式(8)可以看出, 这是含参变量的非齐次差分方程, 可以进行求解。由于 $x_n \in (1.7, 2.2)$, 同时, 模型系数中含参变量 x_{n-4} , 不利于直接求解, 故

取 $x_{n-4} = 1.7, 1.9, 2.1$ 分别进行数值计算: ① 当 $x_{n-4} = 1.7$ 时, 模型的齐次通解为 $x_n = 0.349^n c_1 + 0.623^n [c_2 \cos w_1 n + c_3 \sin w_1 n]$ 。其中, $w_1 = -1.457$; ② 当 $x_{n-4} = 1.9$ 时, 模型的齐次通解为 $x_n = 0.34^n D_1 + 0.631^n [D_2 \cos w_2 n + D_3 \sin w_2 n]$ 。其中, $w_2 = -1.482$; ③ 当 $x_{n-4} = 2.1$ 时, 模型的齐次通解为 $x_n = 0.335^n E_1 + 0.640^n [E_2 \cos w_3 n + E_3 \sin w_3 n]$ 。其中, $w_3 = -1.50$ 。分析这三种解的形式可以看出, 齐次通解由两部分构成, 且都随 x_{n-4} 变化, 可以写出统一的一般形式为

$$x_n^* = \lambda^n(x_{n-4}) \cdot a_1 + R^n(x_{n-4}) [a_2 \cos w(x_{n-4}) + a_3 \sin w(x_{n-4})]$$

其中, $\lambda(x_{n-4})$ 、 $R(x_{n-4})$ 、 $w(x_{n-4})$ 表示这三项都随 x_{n-4} 变化。故模型的非齐次通解为

$$x_n = a_0 + x_n^*$$

此即震级序列的内部结构或内部构成。在这个结构中, 齐次部分 x^* 中的第一项 $\lambda^n(x_{n-4})$ 是衰减的, 也许对应于本世纪以来地震活动的衰减趋势; 第二项是振荡的, 对应于地震活动的随机起伏。因此, 本世纪以来本区地震活动是在衰减的趋势上叠加有准周期的起伏振荡。

表 4 震级-频度的对应关系

x_{n-4}	1.7	1.9	2.1
w_i	1.457	1.482	1.50

4 所示。

可以看出, 当 x_{n-4} 大时, 振荡频率 w 大; 当 x_{n-4} 小时, w 小。表现出幅频依赖特性。

4 主要结论

(1) 作为揭示地震活动非线性行为的一条途径, 非线性时序建模有一定的推广应用前景。

(2) 量化的门限值及震级序列经验分布表明, 对于不同的地震活动区, 其震级序列存在不同的活动层次。经验分布展示了这种层次性, 且对不同层次的分界点, 即门限点给出了一种统计意义上的求法。

(3) 极限环体现了地震活动的周期性, 门限自回归模型的建立为揭示这种周期性提供了一种定量半定量的方法。

(4) 幅频依赖现象反映了震级-频度的相互依赖关系。指数自回归模型反映了这种关

表 3 局部延迟 d 与地震活动周期对应关系

地震区	华北地震区			青藏高原地震区		
周期(延迟)	10			4		
局部延迟	0	5	9	15	0	2
相当的周期	0	0.5	1	1.5	0	0.5

系，给出了震级序列的内在结构，用以解释地震活动处于平静期和高潮期震级-频度的不同依赖关系。

参 考 文 献

- 陈荣华, 1990. 中国地震大形势预测研究, 149—156. 地震出版社, 北京.
- 黎令仪、刘德富, 1985. 震级序列的门限建模. 地球物理学报, **28**, 3, 303—310.
- 项静恬、杜念观、史久恩(编), 1986. 动态数据处理——时间序列分析, 341—398. 气象出版社, 北京.
- 杨位钦、顾岚, 1988. 时间序列分析与动态数据建模, 375—394. 北京理工大学出版社, 北京.
- Haggen, V. and Ozaki, T., 1980. *Time Series*, 57—71. North-Holland Publishing Company, Holland.
- Huang, J. and Turcotte, D. L., 1990. Are earthquake an example of deterministic chaos? *Geophys. Res. lett.*, **17**, 3, 223—226.
- Priestley, M. B., 1982. *Time Series Analysis: Theory and Practice*, 1, 717—731. North-Holland Publishing Company, Holland.
- Tang, H., 1980. *Time Series*, 41—56. North-Holland Publishing Company, Holland.
- Tang, H. and Wu, Z. M., 1982. *Time Series Analysis: Theory and Practice*, 1, 733—753. North-Holland Publishing Company, Holland.