

断裂带内介质的软化特性和地震的 非稳定模型*

殷有泉 张宏
(北京大学力学系)

摘要

本文将地震过程看作是一个包含断裂带和围岩的力学系统在外界扰动下的一种失稳现象，用变形体力学方法给出了断层带介质软化的本构方程和地震非稳定模型的一般的数学表述。借助于均匀场的非稳定模型，本文讨论了弹性回跳概念，导出了地震效率公式和论证了能量形式失稳准则的普遍性，并指出了在刚性试验机上研究声发射现象的重要意义。本文还介绍了用于研究非均匀场的地震非稳定性的有限单元法的通用程序以及唐山地震的算例。

地震是一种在触发因素作用下的能量释放过程。从力学的观点来看，这是一个包含断裂带和围岩的力学系统在外界扰动下的一种失稳现象。这一类失稳现象是由于介质本构性质的软化特性引起的，因此它们可称为变形系统的物理非稳定性问题，以区别于颈缩一类的几何因素引起的失稳现象（这类问题可称为变形系统的几何非稳定性问题）。地球物理学家已经提出了一些地震的非稳定模型^[1]，但它们当中的多数还是定性的。我们在本文中用变形体力学的方法，对断裂带介质的软化特性和地震的非稳定模型做比较全面的探讨，澄清了地震力学中的某些概念，给出一些理论的和数值模拟的结果。

一、断裂带介质的本构关系

地球物理学家的断裂本构关系往往是针对具体的断裂提出的。例如 Stuart^[2] 研究冲断层的 San Fernando 地震时，他事先设峰值强度随深度按高斯规律分布，也就是峰值强度是空间位置的函数。从力学观点看，这是有问题的。事实上，峰值强度是随围压和温度而变化的，而围压和温度是由边值问题解出的，不能事先假设它与空间坐标的关系。这就是说，本构性质是断裂带内介质的性质，不应随介质的空间位置而变化（在理性力学中这称之为客观性原理）。花岗岩在 5 千巴围压下的应力应变曲线如图 1 所示^[3]，随温度提高而峰值应力下降，然而软化特性还是明显的。

我们采用热塑性本构模型模拟断裂带介质的性质。在塑性理论中，Prager 考虑了热效应的影响而不涉及不可逆过程的热力学^[4]，他采取的屈服函数包含温度参数 T ，即 $f =$

* 1983年1月24日收到。

$f(\sigma, \kappa, T)$. 于是屈服面可随温度而改变它的形状. 我们采用文献[5]中的方法可将他的理论推广, 得到适用于变形软化和热软化的本构方程

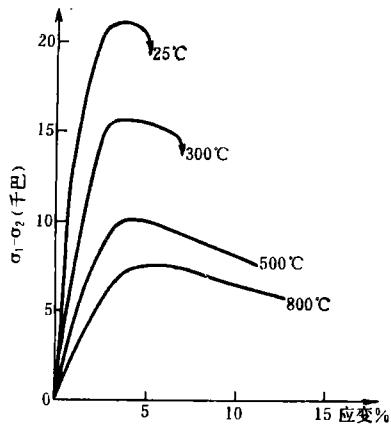


图 1

$$d\sigma = \begin{cases} (\mathbf{D} - \mathbf{D}_p)(d\epsilon - \epsilon \alpha dT) - \mathbf{S}dT, & \text{当 } l > 0 \text{ 时}, \\ \mathbf{D} & \text{当 } l \leq 0 \text{ 时}. \end{cases} \quad (1)$$

其中

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix},$$

对称

λ 和 G 是拉梅弹性系数,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_p &= \frac{1}{A} \mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^t \mathbf{D} \\ \mathbf{S} &= \frac{1}{A} \mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial f}{\partial T}, \end{aligned} \quad (2)$$

σ 是应力矢量, $\sigma = [\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{yz} \tau_{zx} \tau_{xy}]^t$,

ϵ 是应变矢量, $\epsilon = [\epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z \gamma_{yz} \gamma_{zx} \gamma_{xy}]^t$.

α 是热膨胀系数,

$\epsilon = [111000]^t$,

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^t \mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \sigma} - n \frac{\partial f}{\partial \kappa}. \quad (3)$$

κ 是塑性内变量, 它可取为塑性功 $w^p = \int \sigma^t d\epsilon^p$ 或塑性体应变 $\theta^p = \epsilon^t \epsilon^p$, 或等效

塑性应变 $\bar{\epsilon}^p = \int ((d\epsilon^p)^t d\epsilon^p)^{1/2}$.

$$n = \begin{cases} \sigma^t \frac{\partial f}{\partial \sigma}, & \text{当 } \kappa = w^p \text{ 时}, \\ \epsilon^t \frac{\partial f}{\partial \sigma}, & \text{当 } \kappa = \theta^p \text{ 时}, \\ \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^t \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^{1/2}, & \text{当 } \kappa = \bar{\epsilon}^p \text{ 时}, \end{cases}$$

$$l = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^t \mathbf{D} (d\epsilon - \epsilon \alpha dT) + \frac{\partial f}{\partial T} dT. \quad (4)$$

l 称为加载准则函数, $l > 0$ 表示塑性加载, 即有新的塑性变形发生; $l \leq 0$ 对应于塑性卸载和中性变载, 这时无新的塑性变形发生, 反应是纯弹性的. 在(1)式中 \mathbf{S} 反映了热和塑性相耦合的性质. 以下我们仅讨论稳态的温度场, 即温度场不随时间变化, 这时(1)和(4)式可以分别写做

$$d\sigma = D_{ep} d\epsilon = (D - H(l)D_p)d\epsilon \quad (5)$$

$$l = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)' D d\epsilon \quad (6)$$

$$H(l) = \begin{cases} 0, & l \leq 0 \\ 1, & l > 0 \end{cases} \quad (7)$$

根据断裂带的破裂方式，在主坐标系（z轴垂直于断层面）内，取屈服函数的形式为

$$f = (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 + a^2 c^2)^{1/2} + \mu \sigma_z - c \quad (8)$$

当小参数 $a \rightarrow 0$ 时，它相当于广义的 Mises 屈服函数。 μ 和 c 分别是内摩擦系数和粘聚力，它们都是内变量 x 的函数。这样可由式 (2) 和 (3) 得到 D_p 的具体表达式，见文献 [6] 的附录。

相对于所研究的区域尺度 L 来说，断层带的厚度 h 往往很小。为了在数学上处理方便，可将断裂带看做一张几何曲面。实际上，这张曲面是一层物质在厚度趋于零时的极限，它含有物质属性。可以按文献 [6] 中的办法，给出通过层面上一点的位移间断值 \bar{u} 与层面上相应点的应力矢量 $\bar{\sigma}$ 之间的本构关系

$$d\bar{\sigma} = \bar{D}_{ep} d\bar{u} = (\bar{D} - H(l)\bar{D}_p)d\bar{u} \quad (9)$$

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} k_t & 0 & 0 \\ 0 & k_t & 0 \\ 0 & 0 & k_n \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\bar{D}_p = \frac{k_t^2}{A} \begin{bmatrix} \frac{\tau_{xz}^2}{b^2} & \frac{\tau_{xz}\tau_{yz}}{b^2} & \mu \frac{\tau_{xz}}{mb} \\ \frac{\tau_{yz}^2}{b^2} & \mu \frac{\tau_{yz}}{mb} & \text{对称} \\ \mu^2 & m^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\bar{u} = [u^+ - u^- \ v^+ - v^- \ w^+ - w^-]^t$$

$$\bar{\sigma} = [\tau_{xz}\tau_{yz}\sigma_z]^t$$

$$b^2 = \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 + a^2 c^2, \quad m = k_t/k_n$$

$$A = \mu^2 k_n + k_t \left(1 - \frac{a^2 c^2}{b^2} \right) + n c' \left(1 - \frac{a^2 c}{b} \right) - n \mu' \sigma_z$$

$$n = \begin{cases} \mu \sigma_z + \frac{1}{b} (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \approx c & \text{当 } x = w^p, \\ \mu & \text{当 } x = \theta^p, \\ \mu^2 + \frac{1}{b^2} (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \approx 1 + \mu^2 & \text{当 } x = \varepsilon^p. \end{cases}$$

$$l = k_t [\tau_{xz}/b \ \tau_{yz}/b \ \mu/m] d\bar{u} \quad (12)$$

其中 $k_t = G/h$ 和 $k_n = (\lambda + 2G)/h$ ，分别是断层面内一点的切向和法向弹性刚度。

$$c' \equiv \frac{\partial c}{\partial x}, \quad \mu' \equiv \frac{\partial \mu}{\partial x}.$$

我们最后指出，本构关系(1)或(5)式是应变软化型的，而 (9) 式是位移软化型的。我

们是将后者做为前者的极限情况导出的,因此它们在本质上是相同的。此外,我们这里的 f 函数采用(8)式的形式,这主要是为了与断层面的摩擦概念建立联系。如果 f 不是(8)式而取另外的形式,当然也能得到相应的(9)式。

二、地震非稳定模型的准静态表述

地震的孕育(能量积累)过程可以认为是准静态的。而地震从爆发到震后静止前的期间,应该考虑断层和围岩的惯性运动。实质上,地震的爆发是一个动力失稳问题。由于处理动力稳定性问题在数学上会遇到很大困难,不得不采用准静态的研究方法。这就是,将临震时的平衡状态看做是非稳定的,在外界扰动(触发作用)下准静态地过渡到另一个稳定的平衡状态(即震后静止状态),比较这两个状态可以估计出地震的各种参数。由于震前状态基本上是准静态的,对于前兆的分析和预测地震(失稳)的到来,使用这种准静态的方法是完全合理的。

地震过程是一个非线性的力学过程,需要采用增量的方法进行研究。对于一个典型的载荷增量(边界力 $d\mathbf{p}$,体力 $d\mathbf{q}$,边界上已知位移 $d\mathbf{u}_0$),所得的增量的位移场 $d\mathbf{u}$,应变场 $d\boldsymbol{\epsilon}$ 和应力场 $d\boldsymbol{\sigma}$,应满足三方面要求:一,连续性;二,平衡;三,介质的物理性质。连续性是指在所研究的区域内,除了个别的间断面之外,位移处处是连续的,并且在区域边界上满足位移边条件。地震研究可采用小变形假设,这时

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \mathbf{L} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{u} \quad (13)$$

物理条件就是断裂带介质要满足本构方程式(5)或(9),弹性围岩满足增量形式的胡克定律 $d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}d\boldsymbol{\epsilon}$ 。平衡条件可用变分方程形式给出

$$\delta\Pi = \int_{V_s} \delta(d\boldsymbol{\epsilon})^t \mathbf{D} d\boldsymbol{\epsilon} dV + \int_{V_i} \delta(d\boldsymbol{\epsilon})^t \mathbf{D}_{ep} d\boldsymbol{\epsilon} dV - \int_V \delta(d\mathbf{u})^t d\mathbf{p} dV - \int_F \delta(d\mathbf{u})^t d\mathbf{q} dF = 0 \quad (14)$$

其中 V_s 表示弹性的围岩区(surroundings), V_i 表示会软化的断裂带区,在地震力学中也称 V_i 区为包体(inclusion),见图2(a)。 $V = V_i + V_s$, F 是作用以力的区域边界, $d\mathbf{p}$ 是体力载荷增量(重力、引潮力等)。

在地震的非稳定模型的数学模拟过程中，需要识别每一个平衡状态是稳定的还是非稳定的，这要讨论二次变分

$$\begin{aligned}\delta^2\Pi = & \int_{V_s} \delta(d\boldsymbol{\epsilon})' \mathbf{D} \delta(d\boldsymbol{\epsilon}) dV \\ & + \int_{V_i} \delta(d\boldsymbol{\epsilon})' \mathbf{D}_{ep} \delta(d\boldsymbol{\epsilon}) dV\end{aligned}\quad (15)$$

对于任何应变变化场 $\delta\boldsymbol{\epsilon}$ ，如果 $\delta^2\Pi > 0$ ，系统为稳定平衡；如果 $\delta^2\Pi = 0$ 是一种随遇平衡，在地震力学研究中它对应于稳定蠕动，也看做是稳定的。如果至少存在一种应变场，使 $\delta^2\Pi <$

0，则系统是处于非稳定平衡状态，这就是临震状态。因此我们得到的失稳准则是

$$\delta^2\Pi < 0 \quad (16)$$

在断裂带或包体很窄，它退化为一个间断面时 [图 2(b)]，相应的平衡条件和失稳准则分别是

$$\begin{aligned}\delta\Pi = & \int_{V_s} \delta(d\boldsymbol{\epsilon})' \mathbf{D} d\boldsymbol{\epsilon} dV + \int_{\Gamma} \delta(d\bar{\mathbf{u}}) \bar{\mathbf{D}}_{ep} d\bar{\mathbf{u}} d\Gamma \\ & - \int_{V_s} \delta(d\mathbf{u})' d\mathbf{p} dV - \int_F \delta(d\mathbf{u})' d\mathbf{q} dF = 0\end{aligned}\quad (17)$$

和

$$\delta^2\Pi = \int_{V_s} \delta(d\boldsymbol{\epsilon})' \mathbf{D} \delta(d\boldsymbol{\epsilon}) dV + \int_{\Gamma} \delta(d\bar{\mathbf{u}})' \bar{\mathbf{D}}_{ep} \delta(d\bar{\mathbf{u}}) d\Gamma < 0 \quad (18)$$

其中 Γ 是断裂面面积。

从失稳准则可看出，包体或断层介质的软化性质是地震失稳的必要条件。因为如果包体和断层介质不是软化的，由于 \mathbf{D} 的正定性和 \mathbf{D}_{ep} （或 $\bar{\mathbf{D}}_{ep}$ ）的半正定性，恒有 $\delta^2\Pi > 0$ ，状态是稳定的。此外，对于会软化的断层介质，只有在塑性加载 $l > 0$ 时， \mathbf{D}_{ep} 或 $\bar{\mathbf{D}}_{ep}$ 才会是负定的（在 $l \leq 0$ 时 $\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D}$ ，等等）。如果将 $d\mathbf{q}$ 看做月球的引潮力变化，由它计算出的地壳变形场，仅当 $l > 0$ 时才可能触发地震， $l \leq 0$ 不会触发地震。这样，本文的非稳定模型可以作为研究引潮力对地震的触发作用的基础^[7]。

三、均匀变形场的地震模型

将围岩内的应变以及沿断层各点的错动分别看做是均匀的地震模型，是一种最简单的模型，然而它可以用来直观地得到非稳定模型的某些概念和有用的结论。现在考虑由均匀介质围岩和一个直立的走滑断层所构成的模型。断层面面积为 Γ ，它到远场边界的距离为 L ，围岩的弹性模量为 G （图 3），在远场给位移条件 $u = U$ 。设断层的相对滑动为 $2\bar{u}$ ，我们略去它的弹性变形， $2\bar{u}$ 就代表错动量（错距）。不考虑断层的扩容性质时，在屈服函数中取 $\mu = 0$ ，相应的内变量取 $x = \bar{\varepsilon}^p = \bar{u}$ ，当 $k_t \gg c'$ 时，由(9)和(10)式得断层介质的本构方程是（图 4）

$$d\tau = \left(k_t - \frac{k_t^2}{k_t + c'} \right) d\bar{u} \approx c' d\bar{u} \equiv \bar{k} d\bar{u} \quad (19)$$

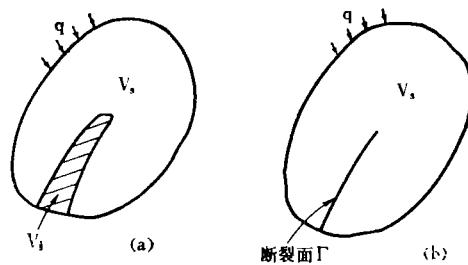
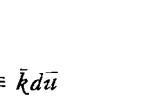
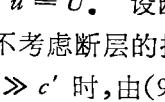
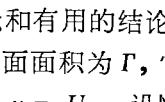
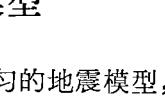
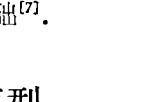
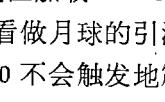
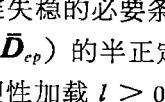
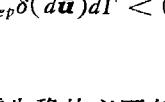
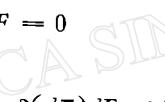


图 2



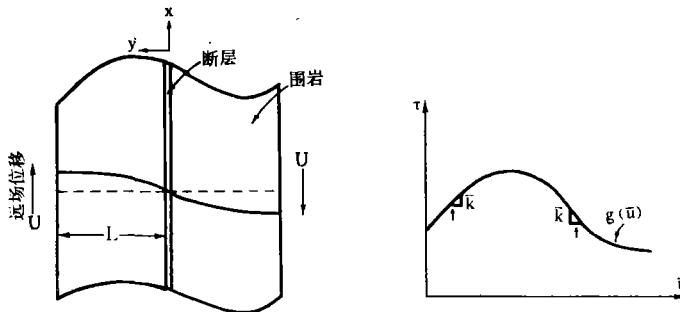


图 3

图 4

或

$$\tau = c(\bar{u}) \equiv g(\bar{u})$$

而围岩的本构方程是

$$d\tau = G d\gamma = \frac{G}{L} (d\bar{u} - dU)$$

或

$$\tau = \frac{G}{L} (\bar{u} - U) \quad (20)$$

将(19)、(20)式代入(17)式得

$$\delta \left(\frac{d\bar{u} - dU}{L} \right) G \left(\frac{d\bar{u} - dU}{L} \right) L\Gamma + \delta(d\bar{u}) \bar{k} d\bar{u}\Gamma = 0$$

由于 $\delta(d\bar{u})$ 的任意性, 得平衡条件

$$K_s(d\bar{u} - dU) + \bar{k} d\bar{u} = 0 \quad (21)$$

或

$$K_s(\bar{u} - U) + g(\bar{u}) = 0$$

以后将 $K_s = G/L$ 称为围岩的刚度, \bar{k} 称为断层的刚度 (实际上它们都是单位断层面的刚度). K_s 是常数, \bar{k} 是随 \bar{u} 变化的函数, 因此在地震学中笼统地说围岩的刚度比断层的刚度大(或小)几个数量级是不妥的, 它们的比值随着错动量的不同可以在很大的范围内变化. 求解非线性方程式(21)可用作图法. 这个方程的解是 \bar{u} 、 τ 坐标系中, 直线 $\tau = K_s(U - \bar{u})$ 和曲线 $\tau = g(\bar{u})$ 的交点的横坐标(图 5). 当远场位移 U 较小的情况下, 只有一个交点(例如 A 点), 这点所对应的 \bar{u} 是一个稳定的平衡解. 随着 U 值的不断增大, 达到某个值 U^* 时, 可得到两个交点 B 和 C, 问题有两个解 \bar{u}_B 和 \bar{u}_C , \bar{u}_B 是一个非稳定平衡解, 而 \bar{u}_C 是稳定平衡解. 由非稳定解 \bar{u}_B 到稳定解 \bar{u}_C 的过程对应于失稳过程¹⁾. 这个过程中系统弹性位能的降低用梯形面积 $BCED$ 表示, 断层滑动所消耗的功用曲边梯形 $BFCED$ 表示, 它们的差额(画阴影线的曲边三角形 BCF) 代表系统释放出的能量, 这部分能量转化为地震波的能量: $(\bar{u}_C - \bar{u}_B)/L$ 对应于地震的断层错距, $(\tau_B - \tau_C)$ 是地震应力降. 在失稳过程, 围岩的弹性应变由 $(U - \bar{u}_B)/L$ 恢复到 $(U - \bar{u}_C)/L$, 应变恢复量为 $(\bar{u}_C - \bar{u}_B)/L$. 而相应的错距 $(\bar{u}_C - \bar{u}_B)$ 就是所谓的弹性回跳值. 我们将曲线上开始达到残余

1) 从图 5 上看, 在 $\bar{u} < U^*$ 但接近于 U^* 时, 就可能有两个或三个交点的情况, 但这时最左边的交点的解在小范围内是稳定的, 在小扰动下不会失稳.

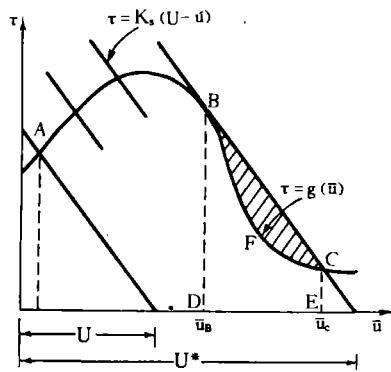


图 5

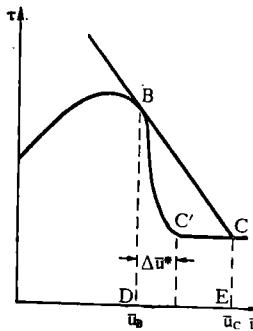


图 6

应力的点记为 C' , 而且用 $\Delta\bar{u}^*$ 表示剪应力从 τ_B 降为 $\tau_{C'}$ 所需的滑动位移量(图 6)。根据岩石摩擦的实验资料估算, $\Delta\bar{u}^*$ 不超过厘米的数量级, 而地震错距 $(\bar{u}_B - \bar{u}_c)$ 往往达到几十厘米甚至几米, 因此 $\Delta\bar{u}^* \ll (\bar{u}_B - \bar{u}_c)$, 于是, 地震过程消耗在摩擦上的功

$$\begin{aligned}\Delta W &= \int_{\bar{u}_B}^{\bar{u}_c} g(u) du = \int_{\bar{u}_B}^{\bar{u}_B + \Delta\bar{u}^*} (g(u) - \tau_c) du + \tau_c(\bar{u}_c - \bar{u}_B) \\ &\approx \tau_c(\bar{u}_c - \bar{u}_B).\end{aligned}$$

$$\text{弹性势能降低 } \Delta U^e = \frac{1}{2} (\tau_B + \tau_c)(\bar{u}_c - \bar{u}_B)$$

$$\begin{aligned}\text{因此, 地震效率 } \eta &= \frac{\Delta U^e - \Delta W}{\Delta U^e} \approx \frac{\frac{1}{2} (\tau_B + \tau_c) - \tau_c}{\frac{1}{2} (\tau_B + \tau_c)} \\ &= \frac{\tau_B - \tau_c}{\tau_B + \tau_c} = \frac{\Delta\tau}{2\bar{\tau}} = \frac{\text{应力降}}{\text{二倍的平均应力}}\end{aligned}\quad (22)$$

这就从地震的非稳定模型导出了许多作者所采用的估算地震效率的经验公式。

现在我们讨论一下如何用(18)式判断图 5 的 A 、 B 和 C 点的平衡稳定性。在这种简单情况下,

$$\delta^2\Pi = \Gamma(K_s + (\bar{k})_{\bar{u}+\delta\bar{u}})(\delta u)^2 \quad (23)$$

在 A 和 C 点, 位移 $\bar{u} + \delta\bar{u}$ 对应的刚度 $-\bar{k}_{\bar{u}+\delta\bar{u}} < K_s$, 因而 $\delta^2\Pi > 0$, 平衡是稳定的。在 B 点 $-\bar{k}_{\bar{u}+\delta\bar{u}} > K_s$, 因而 $\delta^2\Pi < 0$, 是非稳定的。这个准则的特点在于比较所考虑的点与它邻点两个状态。它的物理含义是: 在扰动 $\delta\bar{u}$ 下从系统中取出净的能量(弹性能的释放大于克服断层摩擦所消耗的功)则是非稳定的。以往的某些论文中, 仅考虑一点的状态, 将该点的 $K_s + \bar{k} = 0$ 或 $\frac{\partial\bar{u}}{\partial U} = \infty$ 做为失稳准则, 这是有问题的。例如, 在图 7 中三种情况虽然有 $K_s + \bar{k} = 0$, 但状态分别是稳定平衡, 随遇平衡和在滑动之后才失稳, 它们都不是非稳定状态。这说明稳定性问题不仅与该点状态有关, 而且与该点邻域内的软化性质有关。

如果我们进一步考虑断层可以扩容的情况, 这时 $\mu > 0$, 断层的刚度不能仅用一个

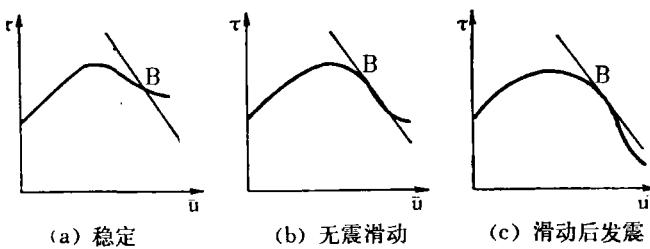


图 7

常数 k_t 表征。这时本构方程(取 $a = 0$)是

$$\begin{cases} \frac{d\tau}{d\sigma_n} \\ \end{cases} = \frac{k_t}{A} \begin{bmatrix} (A - k_t) & -\frac{\mu}{m} k_t \\ -\frac{\mu}{m} k_t & \left(A - \frac{\mu^2}{m^2} k_t\right) \end{bmatrix} \begin{cases} d\bar{u} \\ d\bar{v} \end{cases} = \bar{D}_{cp} d\bar{u}$$

$$A/k_t = \frac{\mu^2}{m} + 1 + n(c' - \mu'\sigma_n)/k_t$$

不难证明, 当

$$\max \left(1, \frac{\mu^2}{m} \right) < A/k_t < \left(1 + \frac{\mu^2}{m} \right) \quad (25)$$

或

$$\max \left(-1, -\frac{\mu^2}{m} \right) < n(c' - \mu'\sigma_n)/k_t < 0$$

时,(24)式中的矩阵是负定的, 这对应于软化情况。而当 $(c' - \mu'\sigma_n) \geq 0$ 时, 矩阵是正定或半正定的, 对应于强化和理想塑性情况。而系统的失稳准则(18)式现在是

$$\delta^2\Pi = LF[\delta\varepsilon_n \delta\gamma] \begin{bmatrix} \lambda + 2G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{cases} d\varepsilon_n \\ d\gamma \end{cases} + F[\delta\bar{u}, \delta\bar{v}] [\bar{D}_{cp}] \begin{cases} \delta\bar{u} \\ \delta\bar{v} \end{cases} < 0, \quad (26)$$

由于变形场是均匀的, 独立的变量仅有 $\delta\bar{u}$, 而且 $\delta\gamma = \delta\bar{u}/L$ 。由于扩容, $\delta\bar{v} = \delta\bar{u}/\mu$ 。在远场边界为应力条件, $\sigma_n = \text{const}$ 时, 有 $\delta\varepsilon_n = 0$; 如果远场改为位移条件, $v = 0$, 则有 $\delta\varepsilon_n = -\delta\bar{u}/\mu L$ 。将它们代入(26)式可得失稳条件是

$$\frac{A}{k_t} < \frac{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^2}{1 + \frac{1}{\mu^2} + G/Lk_t + r^2(\lambda + 2G)/Lk_t}$$

(其中在 $\sigma_n = \text{const}$ 边界条件下, $r = 0$; 在 $v = 0$ 边条件下, $r = 1$ 。) 通过这个简单例子可看出, 系统的刚度一般是用矩阵给出的, 而且与边条件有关, 因而将围岩的刚度与断层的刚度相比较, 除了最简单的情况外, 是无意义的。因此, 我们建议研究稳定性时不采用刚度比较准则, 而用能量准则(18)式。

有些作者利用岩石压缩试验的声发射现象研究地震前兆。从本节前面的讨论可以看到, 失稳是发生在峰值应力之后的。因而在刚性试验机上进行超过峰值应力后的声发射现象的研究, 是具有很重要的意义的^[8]。

四、非均匀场的地震模型和有限单元模拟

考虑到复杂的构造背景,岩石的不均一性和各种可能的边界条件,现代构造应力场和变形场一般是非均匀场。在这种情况下的地震非稳定模型难于用经典的数学物理方法求解,但可以借助于大型电子计算机用数值方法求解,有限单元法就是其中的一个有效的方法^[9]。有限单元法的优点之一是它的通用性,一个通用程序可适用任何复杂的构造背景和现代应力场背景。这对于用反演方法模拟实际震例是特别有效的。另一个优点是,对于掌握和使用通用程序的人不要求具备很深的数学基础。这有利于在地震科学的研究中普及这个方法。

我们根据本文第一、二两节提出的地震非稳定模型的一般表述,编制了一个有限元分析的通用程序 NOLM。这是一个非线性分析的增量方法程序,目前它仅能处理平面问题。在程序中用间断面单元模拟断层,用连续体单元和无限区域元模拟围岩(图 8)。引用无限区域元是为了更好地模拟远场的边界条件。在每一个增量步内都采用能量的失稳准则判断是否失稳和预测地震的到来。使用 NOLM 程序曾经模拟过 1971 年 San Fernando 6.4 级地震的前兆水准变形^[6]。使用这个程序模拟的 1976 年唐山 7.8 级地震的地震变形场,如图 9 所示¹⁾,其中(a)、(b)和(c)分别是有限元网格、实测的地震位移矢量图^[9]和 NOLM 程序的计算结果。

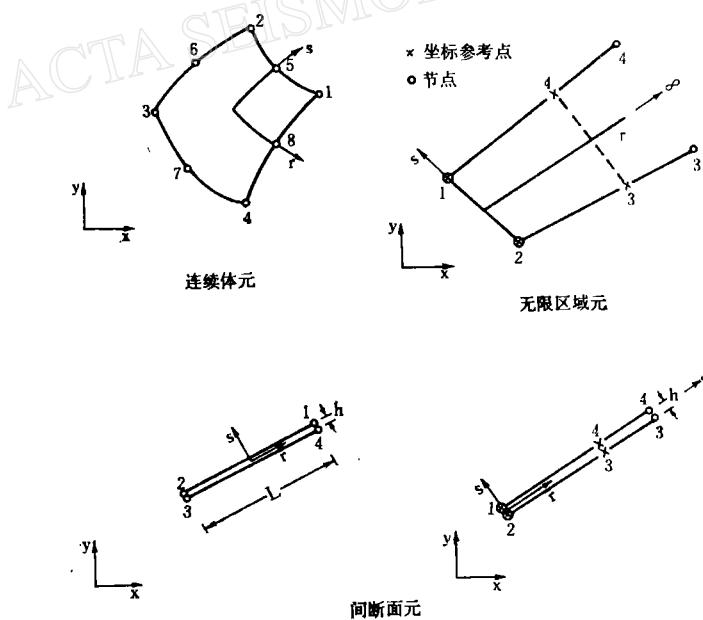


图 8

1) NOLM 程序的细节以及唐山地震模拟的更详细的结果,见张宏的硕士论文“断层地震力学问题的有限元分析”,北京大学地质系,1982 年。

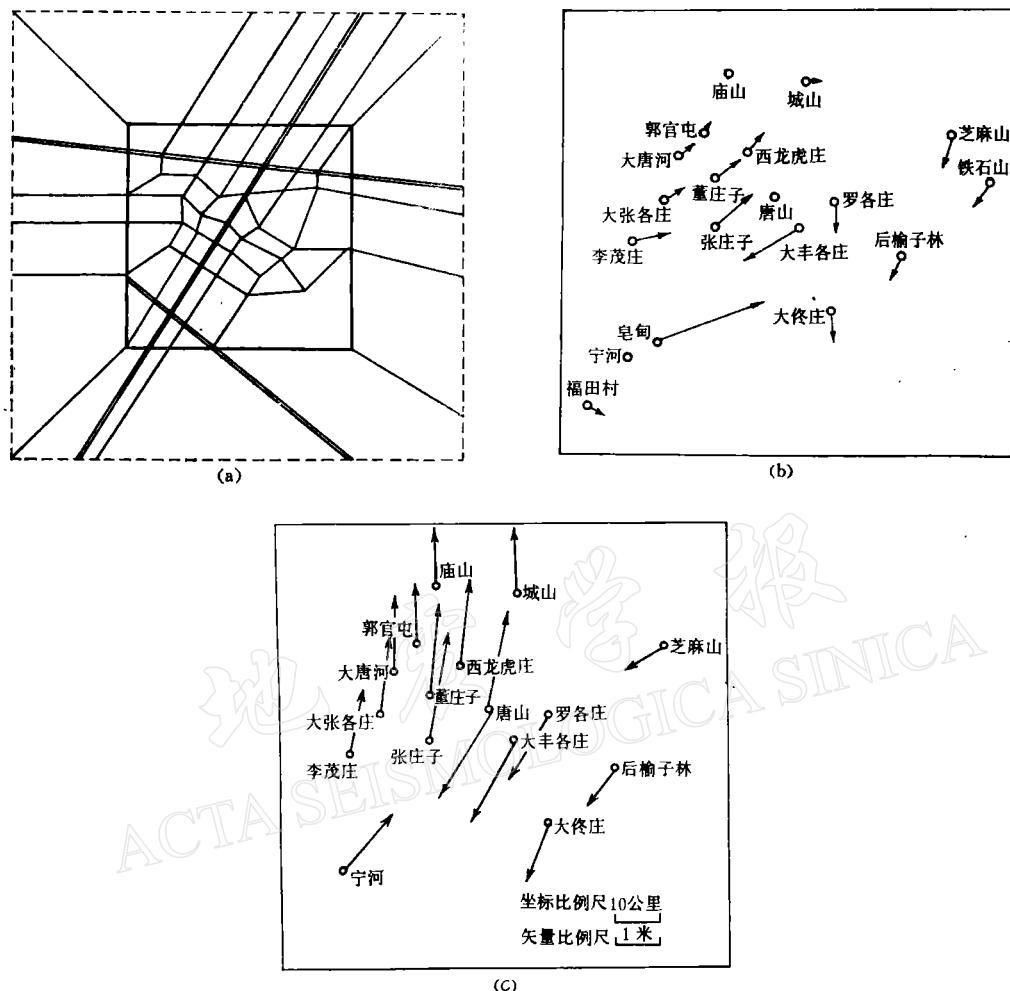


图 9
 (a)——有限元网格; (b)——实测的地震位移矢量图;
 (c)——NOLM程序计算结果

五、小结

本文从变形体力学出发, 将地震现象看做是断层和围岩组成的系统的物理非稳定性问题, 指出本构关系是断层介质的属性, 将位移软化模型看做应变软化模型的极限情况, 它们在本质上是一致的。本文提出的地震非稳定模型的一般表述, 使均匀场和非均匀场非稳定模型(包括有限单元分析)建立在比较严谨的力学基础上。从均匀场非稳定模型讨论了弹性回跳概念和导出了地震效率公式, 并论证了能量形式的失稳准则的普遍适用性。还指出了地震失稳发生在峰值应力之后, 在刚性试验机上研究声发射现象具有重要意义。本文还介绍了用有限单元方法模拟唐山地震的结果。

我们认为, 将非稳定地震模型用于模拟地震前兆变形和研究地震的各种触发作用, 还

有很大的潜力。进一步的理论工作，是建立包括围岩和断层带介质粘性性质在内的地震非稳定模型，以反映地震的粘滑特性和各种时间效应。

本文的研究工作受到中国科学院科学资金的资助。

参 考 文 献

- [1] W. D. Stuart, Quasi-static earthquake mechanics, *Rev. Geophys. Space Phys.*, **17**, 6, 1115—1120, 1979.
- [2] W. D. Stuart, Strain softening instability model for the San Fernando earthquake, *Science*, **203**, 4383, 907—910, 1979.
- [3] 北京大学地质系编, 地质力学教程, 163页, 地质出版社, 1978。
- [4] W. Prager, Non-isothermal plastic deformation, *K. Nederl. Ak. Wetensch. Proc.*, **61**, 176—192, 1958.
- [5] 王仁、殷有泉, 工程岩石类介质的弹塑性本构关系, 力学学报, **4**, 317—325, 1981.
- [6] 殷有泉、张宏, 模拟地震的应变软化的数学模型, 地球物理学报, **25**, 5, 414—423, 1982.
- [7] 丁中一, 贾晋康、王仁, 潮汐应力对地震的触发作用, 地震学报, **5**, 2, 172—184, 1983.
- [8] 陈颙, 单轴压缩实验中压机刚度对大理岩声学性质的影响, 大陆地震活动和地震预报国际学术讨论会文集, 1982.
- [9] O. C. Zienkiewicz, *The finite element method*, 3rd edition, McGraw-Hill, 1977.
- [10] 陈运泰等, 用大地测量资料反演的1976年唐山地震的位错模式, 地球物理学报, **22**, 3, 201—207, 1979.

THE SOFTENING BEHAVIOUR OF FAULT ZONE MEDIUM AND AN INSTABILITY MODEL OF EARTHQUAKES

YIN YOUNG ZHUANG HONG

(*Department of Mechanics Beijing University*)

Abstract

In this paper, the earthquake process is taken as an unstable phenomenon of a mechanical system which consists of fault zone and elastic surrounding subjected to external disturbance. Based on the mechanics of continuum, a general mathematical description of a work-softening constitution law for the fault zone medium and an instability model of earthquakes are given. Using an instability model in an uniform field, we have discussed the concept of elastic rebound, derived a formula of earthquake efficiency, demonstrated the generality of the instability criterion in energy form and indicated the importance of acoustic emission investigation in a stiff testing machine. Finally, a general F. E. M. program for the study of earthquake instability in a generally non-uniform field is presented and an analysis of the 1976 Tangshan earthquake is used as an example.