

各向异性介质中的入射角、 反射角和透射角^{*}

张秉铭¹⁾ 董敏煜¹⁾ 钱忠平²⁾

1)中国北京 102200 石油大学地球科学系

2)中国河北涿州 072750 石油地球物理勘探局研究院

摘要 对各向异性介质中波动现象的数学描述, 远比对各向同性介质中的数学描述要复杂得多。这一复杂性主要来自各向异性介质中的许多物理特性, 不同于各向同性介质中的物理特性。因此, 计算各向异性界面处的反射角和透射角在数学意义上变得非常复杂, 各向同性介质中的 Snell 定律已不再适用于各向异性介质, 必须加以修改。本文发展了一种计算各向异性介质分界面处入射角、反射角和透射角的新算法, 即修正后的各向异性介质中的 Snell 定律。

关键词 各向异性 射线 Snell 定律

引言

一般而言, 描述各向异性介质(除特别声明外, 本文中的各向异性介质均为均匀各向异性介质)的数学公式相对较为复杂, Snell 定律也不例外。反射角和透射角的计算同样也不能再用常规的算法, Auld(1973)和 Rokhlin 等(1986)分别给出了直接用图解法计算各向异性介质中反射角和透射角的方法, Daley 和 Horn(1977, 1979)以及 Slawinski(1996)得到了横向各向同性介质中和椭圆各向异性介质中的 Snell 定律。Auld 和 Rokhlin 的方法虽然结果直观, 但是较为繁琐, 随着计算机的飞速发展, 已跟不上时代的要求。而 Daley 和 Horn 的方法仅适用于各向异性介质中的两种特例, 即横向各向同性介质和椭圆各向异性介质。本文第一作者已对上述特例中的 Snell 定律进行过讨论(张秉铭, 1997; 张秉铭等, 1998)。因此, 本研究试图建立适用于各向异性介质中的 Snell 定律, 并且其还可以在各种各向异性介质中的特例中适用。

地震走时是地震图中最有用的信息之一, 它的含义是地震波沿着某种路径旅行所需要的时间。其主要取决于地球的波速结构, 而与激发和接受条件以及仪器性能的关系并不密切。这里“某种路径”在物理上称为射线, 即波阵面法线方向的轨迹。射线是几何光学中导出的概念, 它是用射线长度的折射系数来描述的。射线追踪指的是给定震源和检波器的位置以及地下介质的波速分布, 求取从震源到检波器的射线轨迹, 以及弹性波从震源到检波器所需要的时间。在几何光学近似的条件下, 由费马原理可知从震源到检波器之间的射线只有一条, 即射线追踪的解是唯一的。当地震波在地下空间中传播时, 遇到两种不同的均

* 1998-10-28 收到初稿, 1999-05-19 收到修改稿并决定采用。

匀介质分界面, 在此分界面上就要产生波的反射和透射, 它们具有相同的射线参量, 这一特性就称为 Snell 定律。它描述了弹性分界面上入射波、反射波和透射波之间的运动学关系。

各向同性介质中的 Snell 定律是建立在均匀和理想弹性体的物理模型基础上的, 而实际地下介质并非是均匀和理想的弹性体, 存在着不同的岩性分界面。这些分界面大概包含有下列几种形式: ① 上下地层都为各向同性介质时的分界面; ② 上覆地层为各向同性介质, 而下伏地层为各向异性介质时的分界面; ③ 上下地层都为各向异性介质时的分界面; ④ 上覆地层为各向异性介质, 而下伏地层为各向同性介质时的分界面。分析上述 4 种分界面的特性后可以发现, 只要认真分析得到第 3 种分界面处的 Snell 定律, 就可以通过它得到其余各种分界面处的 Snell 定律。

我国的陆相石油储层不少是由泥岩和砂岩薄互层构成的, 而泥岩和砂岩薄互层的厚度远远小于地震波的波长, 从而导致地震波在其中的传播显现出各向异性特性。裂缝裂隙型储层同样可以看作是由薄互层构成的, 其对称轴与薄互层对称轴相互垂直, 同样的原理, 地震波在其中的传播也显现出各向异性的特性。这样就给勘探地震学界利用各向同性假设来作各种正演和处理带来困难。因此, 研究不同性质分界面处的入射波、反射波和透射波之间的运动学关系, 即新的修正后的 Snell 定律, 具有十分重要的理论意义和实用价值。

1 理论

对于上下层都为各向同性介质的分界面处, 入射角、反射角和透射角可以通过经典的 Snell 定律进行描述(何焦登, 1985)

$$\frac{\sin\theta_i}{v_1} = \frac{\sin\theta_r}{v_1} = \frac{\sin\theta_t}{v_2} \quad (1)$$

式中, θ_i 为入射角, θ_r 为反射角, θ_t 为透射角; v_1 为上层介质的速度, v_2 为下层介质的速度。考虑介质各向异性时, 上述 Snell 定律已不再适用, 射线速度与射线方向有关, 虽然入射波和反射波同在同一种介质中传播, 入射波的射线速度已不等于反射波的射线速度, 这就意味着入射角不再等于反射角。因此, 在研究各向异性介质中的波动时, 必须同时研究群速度(**W**)和相速度(**V**)。它们之间的关系如下:

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{K} = |\mathbf{V}| = v \quad (2)$$

K 为方向与 **V** 相同的单位矢量。

各向异性介质中的相速度定义为平面波的波峰(或波谷)传播的速度, 其值定义为主频率与波数的比值; 而群速度就是射线速度, 即波能量传播的速度。在各向异性介质中, 速度表现出角散特性, 相速度和群速度在幅度和方向上都不同。在各向异性介质中的任意一点, 其波前面上的群速度要大于相速度。

考虑两种各向异性介质由一水平界面分开, 假设上半空间各向异性介质中的相慢度面和下半空间各向异性介质中的相慢度面分别为 $f(x, y, z)=a$ 和 $g(x, y, z)=b$ 。

因为所有的相慢度矢量(包含入射波、反射波和透射波)是同平面的。不失一般性, 我们先考虑二维空间的情况, 即 xz 平面内的情况。假设相慢度矢量为 **m**, 根据连续条件有

$$\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{X} = \mathbf{m}_r \cdot \mathbf{X} = \mathbf{m}_t \cdot \mathbf{X}$$

其中, **X** 为 x 方向上的单位矢量, 相慢度矢量 **m** 的下脚标 t , r 和 i 分别表示透射、反射和

入射。在相慢度面上的任意点上，其射线矢量 \mathbf{W} 都垂直于相慢度面。

根据梯度的定义，在相慢度面上

$$\mathbf{W}_i \parallel \nabla f(x, y, z) |_{(x_i, y_i, z_i)}$$

即射线矢量 \mathbf{W} 平行于相慢度面的梯度方向。假设 z 坐标指向上为正，函数 f 在坐标原点取得最小值，并且单调增加，则入射射线矢量

$$\mathbf{W}_i = -\frac{\nabla f(x, y, z) |_{(x_i, y_i, z_i)}}{\|\nabla f(x, y, z)\|_{(x_i, y_i, z_i)}} \quad (3)$$

因此，入射角（即射线矢量与坐标 z 轴之间的夹角）可通过下式求得：

$$\cos\theta_i = \mathbf{W}_i \cdot (-\bar{z}) = \frac{\bar{z} \cdot \nabla f(x, y, z) |_{(x_i, y_i, z_i)}}{\|\nabla f(x, y, z)\|_{(x_i, y_i, z_i)}} = \frac{\left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{(x_i, y_i, z_i)}}{\|\nabla f(x, y, z)\|_{(x_i, y_i, z_i)}} \quad (4)$$

同理，我们可以分别得到反射角和透射角

$$\cos\theta_r = \mathbf{W}_r \cdot \bar{z} = \frac{\bar{z} \cdot \nabla f(x, y, z) |_{(x_r, y_r, z_r)}}{\|\nabla f(x, y, z)\|_{(x_r, y_r, z_r)}} = \frac{\left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{(x_r, y_r, z_r)}}{\|\nabla f(x, y, z)\|_{(x_r, y_r, z_r)}} \quad (5)$$

$$\cos\theta_t = \mathbf{W}_t \cdot (-\bar{z}) = \frac{\bar{z} \cdot \nabla g(x, y, z) |_{(x_t, y_t, z_t)}}{\|\nabla g(x, y, z)\|_{(x_t, y_t, z_t)}} = \frac{\left. \frac{\partial g}{\partial z} \right|_{(x_t, y_t, z_t)}}{\|\nabla g(x, y, z)\|_{(x_t, y_t, z_t)}} \quad (6)$$

上面给出了上下地层为一般各向异性介质时，分界面处的入射角、反射角和透射角的解析表达式。下面研究上下地层为一般椭圆各向异性介质时，分界面处的 Snell 定律。

不失一般性，我们仅研究 xz 平面内的非转换波的情况。根据椭圆各向异性介质的特性，可定义上下两层介质的相慢度分别如下：

$$f(x, z) = (v_x x)^2 + (v_z z)^2 = 1$$

$$g(x, z) = (v'_x x)^2 + (v'_z z)^2 = 1$$

因此，根据本研究中给出的各向异性介质中入射角、反射角和透射角的解析表达式，可以分别得到椭圆各向异性介质中的入射角、反射角和透射角

$$\cos\theta_i = \frac{v_z \sqrt{1 - (v_x x_i)^2}}{\sqrt{v_x^4 x_i^2 + v_z^2 [1 - (v_x x_i)^2]}}$$

$$\cos\theta_r = \frac{v_z \sqrt{1 - (v_x x_r)^2}}{\sqrt{v_x^4 x_r^2 + v_z^2 [1 - (v_x x_r)^2]}}$$

$$\cos\theta_t = \frac{v'_z \sqrt{1 - (v'_x x_t)^2}}{\sqrt{v'_x^4 x_t^2 + v'_z^2 [1 - (v'_x x_t)^2]}}$$

根据上述 3 式，我们可以得到 x_i 、 x_r 和 x_t 的表达式为

$$x_i^2 = \frac{v_z^2 (1 - \cos^2 \theta_i)}{v_x^4 \cos^2 \theta_i + v_z^2 v_z^2 (1 - \cos^2 \theta_i)}$$

$$x_r^2 = \frac{v_z^2 (1 - \cos^2 \theta_r)}{v_x^4 \cos^2 \theta_r + v_z^2 v_z^2 (1 - \cos^2 \theta_r)}$$

$$x_t^2 = \frac{v_z'^2 (1 - \cos^2 \theta_t)}{v_x'^4 \cos^2 \theta_t + v_x'^2 v_z'^2 (1 - \cos^2 \theta_t)}$$

而连续性条件使下式成立:

$$x_i^2 = x_r^2 = x_t^2$$

将 x_i , x_r 和 x_t 分别代入上式, 并整理得

$$v_x^2 \left(\frac{v_x^2}{v_z^2} \operatorname{ctg}^2 \theta_i + 1 \right) = v_x^2 \left(\frac{v_x^2}{v_z^2} \operatorname{ctg}^2 \theta_r + 1 \right) = v_x'^2 \left(\frac{v_x'^2}{v_z'^2} \operatorname{ctg}^2 \theta_t + 1 \right) \quad (7)$$

这就是上下地层为一般椭圆各向异性介质时, 分界面处的 Snell 定律, 与上下地层为各向同性介质时的有着根本的不同。但是当研究的介质为各向同性介质时, 式(7)可以退化为各向同性介质中经典的 Snell 定律。本研究为今后开展各向异性介质中的射线追踪提供了必要的基础。

2 实例

下面用实例展示式(7)的重要性。假设模型由上下两层地层组成, 上层地层为各向同性介质, 下层地层为椭圆各向异性介质, 并定义介质的各向异性度为波(包含压缩波、剪切波和转换波)在水平方向与垂直方向传播速度的相对变化率的一半。考虑入射波为 SH 波时, 各向异性度 $\gamma=+0.20$, 入射角为 30° 。各层的物理特性参见图 1。



图 1 考虑地层椭圆各向异性模型简图

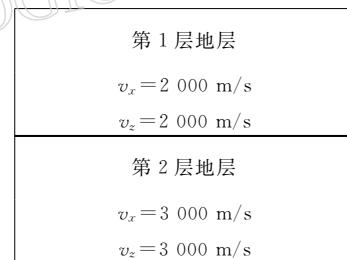


图 2 未考虑地层椭圆各向异性模型简图

若比较忽略下层地层的椭圆各向异性特性时(图 2), 所求出的反射角和透射角与下层地层为椭圆各向异性介质时求出的反射角和透射角的差别, 分别用各向同性介质中经典的 Snell 定律和本研究中发展的椭圆各向异性介质中的 Snell 定律, 求取反射角和透射角, 结果参见表 1 和图 3。图 3a 为忽略下层地层的椭圆各向异性特性时的计算结果, 图 3b 为考虑下层地层的椭圆各向异性特性时的计算结果。

表 1 利用本研究发展的 Snell 定律计算得到的反射角和透射角

角的类型	忽略下层地层的椭圆各向异性特性时	考虑下层地层的椭圆各向异性特性时
入射角/(°)	30	30
反射角/(°)	30	30
透射角/(°)	48.59	68.35

从上述的计算结果可以看出, 由于下层地层的椭圆各向异性特性, 造成了透射角比忽略下层地层的椭圆各向异性特性时的要大近 20° 左右。这一巨大的差值必将造成对下伏

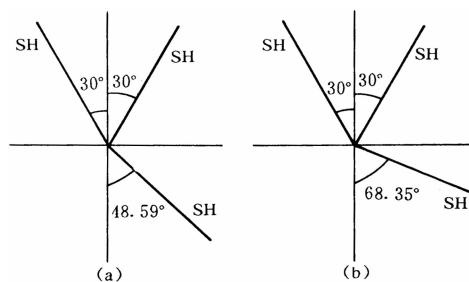


图 3 忽略椭圆各向异性特性时的计算结果(a)
与考虑椭圆各向异性特性时的计算结果(b)

适用于各向异性介质中，必须加以修改。在利用直达波走时进行的跨孔地震层析成像和利用 VSP 数据进行走时反演等方法中，都涉及到理论走时的计算，而理论走时的计算与地下介质体分界面处入射角、反射角和透射角的关系非常密切。分界面处正确的反射角和透射角的计算，必将加快反演过程的收敛程度。基于上述原因，本研究发展了一种计算各向异性介质分界面处入射角、反射角和透射角的新算法，即修正后的各向异性介质中的 Snell 定律。它具有十分重要的理论意义和实用价值。

参 考 文 献

- 何焦登主编. 1985. 地震勘探原理和方法. 北京: 地质出版社, 31~47
- 张秉铭. 1997. 各向异性介质中弹性波数值模拟和偏移研究: [学位论文]. 北京: 中国科学院地球物理研究所, 5~14
- 张秉铭, 董敏煜, 滕吉文, 等. 1998. 各向异性介质中的 Snell 定律. 见: 国家自然科学基金委员会主编. 地震各向异性学术研讨会论文集, 46~48
- Auld B A. 1973. *Acoustic Field and Wave in Solids*. New York, U. S. A: John Wiley and Sons, 162
- Daley P F, Hron F. 1977. Reflection and transmission coefficients for transversely isotropic media. *Bull Seism Soc Amer*, **67**: 661~675
- Daley P F, Hron F. 1979. Reflection and transmission coefficient for seismic waves in ellipsoidally anisotropic media. *Geophysics*, **44**: 27~38
- Rokhlin S I, Bolland T K, Adler L. 1986. Reflection and refraction of elastic waves on a plane interface between two generally anisotropic media. *J Acoustic Soc Amer*, **79**: 906~918
- Slawinski M A. 1996. On elastic-wave propagation in anisotropic media: reflection/refraction laws, ray tracing, and traveltime inversion: [Dissertation]. Calgary: Calgary University, 19~24

地层进行运动学描述时的巨大误差，影响到利用射线追踪原理进行的正演和反演的结果。

3 结语

对各向异性介质中波动现象的数学描述，远比对各向同性介质中的要复杂，这一复杂性主要来自各向异性介质中的许多物理特性不同于各向同性介质中的。因此，计算各向异性界面上的反射角和透射角，在数学意义上变得非常复杂，各向同性介质中的 Snell 定律已不再