

# 测震系统频谱特性的分析与测定\*

赵松年

(国家地震局地震仪器厂)

## 摘要

如何精确地测定地震观测系统的频谱特性,是测震学中的一项重要课题。目前所用的分段测量和计算的方法,不仅需要一定的仪器设备,而且还忽略了机(拾震器)一电(放大装置)接口部分的相互作用和影响。因此,不能获得精确的幅频特性,也不能用实验直接得出相位特性。

本文通过傅里叶变换推导出计算与实测任何一种测震系统频谱特性的方法——TS方法,其中用三角波与阶跃函数作为测试信号。如果对测试信号的动态响应已知,则所研究的系统频谱特性可立即求得。

频谱特性的近似计算公式可表示如下:

$$H_s(\omega) = \frac{\mathcal{F}\left[\Delta y\left(t, \frac{\Delta t}{2}\right)\right]}{\mathcal{F}[u_{uT}(t)]} = \sum_{k=1}^n \Delta y_k e^{-i\omega(2k-1)\Delta t/2}$$

以及

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta y_k e^{-i\omega(2k-1)\Delta t/2}}{\sum_{q=1}^m \Delta x_q e^{-i\omega(2q-1)\Delta \tau/2}}$$

当任意输入函数作用下,系统的响应函数已知时,也可用 TS 方法求得频谱特性。

## 引言

假如我们所研究的地震观测系统的频谱为  $H(\omega)$ ,在  $\delta(t)$  函数作用下,系统的输出响应函数为  $h(t)$ ,如图 1 所示

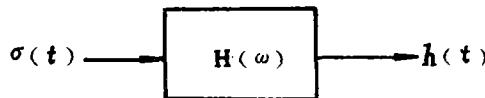


图 1

其中  $\delta(t)$  为 Dirac 函数。若  $h(t)$  是满足 Dirichlet 条件的,则有

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1)$$

\* 1980 年 10 月 29 日收到初稿,1981 年 7 月 15 日收到修改稿。

一般  $H(\omega)$  可表示成

$$H(\omega) = A(\omega)e^{i\Psi(\omega)} \quad (2)$$

式中  $A(\omega)$  为幅频特性或振幅谱,  $\Psi(\omega)$  为相频特性或相位谱。对于最小相位系统<sup>[1]</sup>,  $A(\omega)$  与  $\Psi(\omega)$  存在一一对关系。换句话说, 若已知  $A(\omega)$ , 则  $\Psi(\omega)$  可被  $A(\omega)$  唯一确定。

对于地震波谱的研究而言, 一个震源处的时空函数  $s(t; x, y, z)$  到达观测系统并被记录下来时, 假定为  $f(t_1; x, y, z)$ , 则测震系统可分别记录  $x, y, z$  各向的波形, 因此我们仅研究  $s(t, x)$  与  $f(t_1, x)$  的关系即可。

地震波从震中向地表传播时, 受到地幔、地壳及地表构造特性的影响, 这种影响可以用  $u(t)$  表示, 即

$$s(t) \rightarrow u(t) \rightarrow f(t) \quad (3)$$

相应的频谱关系如下:

$$H(\omega) \cdot U(\omega) \cdot s(\omega) = F(\omega) \quad (4)$$

其中  $U(\omega)$  包含了地震震源机制和地震波传播特性的有用信息, 而  $H(\omega)$  只不过是一种变换和放大过程, 它并不包含任何震源频谱信息。如果  $H(\omega)$  在由试验测定时产生了畸变或失真, 则会使  $U(\omega)$  相应地产生虚假频谱, 那么

$$s(\omega) = \frac{F(\omega)}{H(\omega) \cdot U(\omega)} \quad (5)$$

同样产生失真, 从而使  $s(\omega)$  不能作为震源信息的真实反映。在理想情况下

$$H(\omega) = k e^{-i\omega t} \quad (6)$$

式(4)便简化为

$$kU(\omega) \cdot s(\omega) \cdot e^{-i\omega t} = F(\omega) \quad (7)$$

本文的主要目的是研究  $H(\omega)$  的特性及测定方法, 比较不同测定方法所产生的误差。

## 一、振动实验测定 $A(\omega)$ 及 $\Psi(\omega)$ 的误差

这种方法是将测震仪器的拾震器置于振动台上, 让振动台作不同频率的简谐振动, 测出地震仪系统的输出。如果被测系统的频谱  $H(\omega)$  能分解成二个多项式之比<sup>[3]</sup>, 即

$$H(i\omega) = \frac{N(i\omega)}{D(i\omega)} \quad (8)$$

设  $s_r$  为  $D(s) = 0$  的根, 在输入函数  $x_i(t) = R_e x_m e^{i\omega t}$  时

$$Y_i(s) = \left[ H(i\omega) \frac{1}{s - i\omega} + \sum_{r=1}^n \frac{N(s_r)}{(s_r - i\omega) D'(s_r)} \cdot \frac{1}{s - s_r} \right] x_m \quad (9)$$

式中  $R_e$  表示对一复变量取实部, 变量  $s$  是 Laplace 变换中的复变量。对式(9)进行反演可得

$$y_i(t) = \left[ \frac{N(i\omega)}{D(i\omega)} \cdot e^{i\omega t} + \sum_{r=1}^n \frac{N(s_r)}{(s_r - i\omega) D'(s_r)} \cdot e^{s_r t} \right] x_m \quad (10)$$

其中  $R_c(s_r) \leq 0$ , 当  $t \rightarrow \infty$  时, 式(10)的第一部分为稳态解  $y_{ii}(t)$ , 即

$$y_{ii}(t) = y_{ii}(t), \text{ 当 } t \rightarrow \infty \text{ 时} \quad (11)$$

而

$$\epsilon(t) = \sum_{r=1}^n \frac{N(s_r)}{(s_r - i\omega)D'(s_r)} \cdot e^{s_r t} \rightarrow 0 \quad (12)$$

显然,  $\epsilon(t)$  就表示了振动台实验产生的误差。 $\epsilon(t)$  的出现, 是采用了 Laplace 变换的结果, 因在  $t \leq 0$  时规定  $y_{ii}(t) = 0$ 。在采用 Fourier 变换时, 假定系统是有因果关系的, 故输入测试函数为

$$x_i(t) = x_m e^{i\omega t} \cdot u(t) \quad (13)$$

而  $u(t)$  是单位阶跃函数。因此在  $t = 0$  时加入  $x_i(t)$  将会引起被测系统的暂态过程。显然,  $\epsilon$  是与  $s_r$ 、 $t$  有关的, 即

$$\epsilon = \epsilon(s_r, t), \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

由于每次测量时, 改变频率的间隔时间不一样, 便会使两次测量的  $\epsilon_1$  与  $\epsilon_2$  不同。

此外, 振动台不能实现实时实地标定, 尤其是微幅、宽频带、大载荷的振动台的制造, 决非一件容易的事。

## 二、脉冲标定

这种标定方法是以式(1)与(2)为基础的, 但理想的  $\delta(t)$  函数是很难真正作出来的, 一个很窄的脉冲, 具有相对说来很宽的频谱, 每一个频率分量所携带的能量太小, 几乎不能激发系统的暂态, 因而不易进行测量<sup>[3]</sup>, 所以, 脉冲标定法只是理论上的, 实际上很难实现。在近似的脉冲标定中, 脉冲宽度  $\tau$  与其频率  $f$  之积  $\tau f$  决定了标定的误差<sup>[4]</sup>, 地震仪系统的频带较宽, 所以产生的误差较大。

## 三、系统频谱特性的直接测定——TS 测定方法

现在将对国内外地震观测系统的频谱特性给出两种直接测定方法, 由于采用三角脉冲与阶跃函数作为测试信号, 故将此方法称作 TS 方法。

**1. 三角脉冲测试** 波形如图 2 所示, 将这个脉冲函数输入到地震观测系统, 从记录器获得一个时间曲线, 也就是系统的响应特性, 如图 3 所示

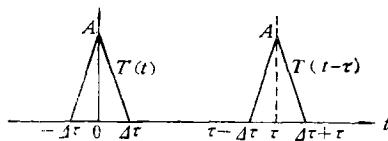


图 2

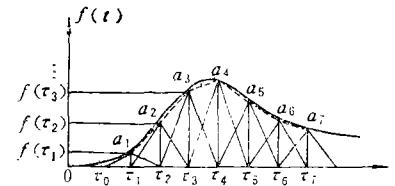


图 3

三角波表示式如下

$$x_T(t) = \begin{cases} -\frac{A}{\Delta\tau}|t| + A, & \text{当 } |t| < \Delta\tau \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } |t| \geq \Delta\tau \text{ 时} \end{cases} \quad (15)$$

当  $A = 1$  时为单位三角波,用  $x_{uT}(t)$  记之,与  $x_T(t)$  的关系如下

$$x_T(t) = Ax_{uT}(t) \text{ 及 } x_T(t - \tau) = Ax_{uT}(t - \tau) \quad (16)$$

若图 3 所示的三角波序列用  $x_{inT}(t)$  表示,则有

$$x_{inT}(t) = \sum_{k=1}^n A_k x_{kT}(t - \tau_k) \quad (17)$$

显然,图 3 所示的响应特性  $f(t)$  可用三角波序列来近似表示为:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n f(\tau_k) x_{uT}(t - \tau_k) \quad (18)$$

对式(17)和(18)进行 Fourier 变换,可得

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \left[ \sum_{k=1}^n f(\tau_k) e^{-ik\omega\Delta\tau} \right] e^{-i\omega\tau_0} \cdot X_{uT}(\omega) \quad (19)$$

$$X_{inT}(\omega) = \mathcal{F}[x_{inT}(t)] = \left[ \sum_{k=1}^n A_k e^{-ik\omega\Delta\tau} \right] e^{-i\omega\tau_0} \cdot X_{uT}(\omega) \quad (20)$$

由此可求得测震系统的频谱

$$H(\omega) = \frac{F(\omega)}{X_{inT}(\omega)} = \frac{\sum_{k=1}^n f(\tau_k) e^{-ik\omega\Delta\tau}}{\sum_{k=1}^n A_k e^{-ik\omega\Delta\tau}} \quad (21)$$

在实际测定时,一般令  $A_k = 1$ ,即用单个三角波脉冲作为测试信号,而式(21)便简化为

$$H(\omega) = e^{i\omega\Delta\tau} \cdot \sum_{k=1}^n f(\tau_k) e^{-ik\omega\Delta\tau} \quad (22)$$

在计算  $H(\omega)$  时,  $f(\tau_k)$  可以从  $f(t)$  的曲线上量测,  $\Delta\tau$  可根据  $f(t)$  的曲线形状和持续时间长短来选定,式(22)既可以按照矢量求和用作图法求得,也可由公式  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$  将式(22)化为三角函数求和形式

$$H(\omega) = e^{i\omega\Delta\tau} \left\{ \sum_{k=1}^n f(\tau_k) \cos k\omega\Delta\tau - i \sum_{k=1}^n f(\tau_k) \sin k\omega\Delta\tau \right\} \quad (23)$$

对于阻尼  $\xi$  取 0.4—0.7 的测震系统,在三角波脉冲作用下,其响应曲线为周期性衰减振荡,并由下式表述

$$f(t) = A e^{-\xi\omega_n t} \cdot \sin [\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \cdot t + \varphi(t)] \quad (24)$$

式中

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad \varphi(t) = \frac{t_d}{T} \cdot 2\pi \quad (25)$$

$t_d$  为  $f(t)$  从 0 升至  $f(t)_{\max}$  的 5% 所需时间。 $\xi$  由振幅比的计算公式来确定, 如图 4 所示

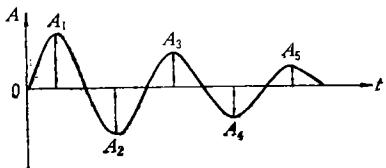


图 4

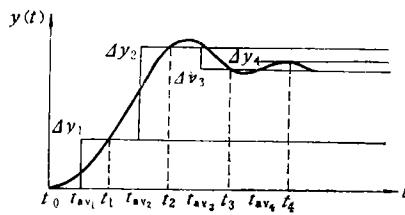


图 5

$$A_k = e^{-\frac{\pi+2k\pi}{2} \cdot \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = e^{-\frac{2k+1}{2} [\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}]} \quad (26)$$

因此

$$\frac{A_k}{A_1} = e^{-k[\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}]} \quad (27)$$

而  $f(t)$  的频谱为

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \frac{A\omega_n^2(1-\xi^2)}{(\xi\omega_n + i\omega)^2 + \omega_n^2(1-\xi^2)} \quad (28)$$

式中的  $A$  由式 (24) 求得。

**2. 阶跃函数测试法** 如果用阶跃函数激励一个被测系统, 其响应曲线  $y(t)$  可如图 5 所示。则由  $y(t)$  获得  $Y(\omega)$  的计算过程, 简述如下: 首先将  $y(t)$  的暂态曲线进入稳定范围(稳态值的  $\pm 5\%$ ) 时所对应的时间分为  $n$  等分,  $\Delta t = t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \dots = t_n - t_{n-1}$ 。并在各等分的中点加入一个阶跃波, 其幅度取增量形式,  $\Delta y_n = y(t_n) - y(t_{n-1})$ ,  $n = 1, 2, \dots, n$ 。显然, 在  $\dot{y}(t) > 0$  时,  $\Delta y_i > 0$ ; 当  $\dot{y}(t) < 0$  时,  $\Delta y_i < 0$ 。将这  $n$  个增量阶跃函数相加, 得

$$\begin{aligned} \Delta y\left(t; \frac{\Delta t}{2}\right) &= \Delta y_1 u\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) + \Delta y_2 u\left(t - \frac{3\Delta t}{2}\right) \\ &\quad + \dots + \Delta y_n \left[t - \frac{(2n-1)\Delta t}{2}\right] \end{aligned} \quad (29)$$

当  $\Delta t \rightarrow 0$  时,  $\Delta y\left(t; \frac{\Delta t}{2}\right) \rightarrow y(t)$ , 即

$$\left|y(t) - \Delta y\left(t; \frac{\Delta t}{2}\right)\right| \leq \epsilon(\delta), \text{ 当 } \Delta t < \delta \text{ 时}$$

因此, 可以用  $\Delta y\left(t; \frac{\Delta t}{2}\right)$  来逼近  $y(t)$ 。其 Fourier 变换为

$$\mathcal{F}\left[\Delta y\left(t; \frac{\Delta t}{2}\right)\right] = U(\omega) \sum_{k=1}^n \Delta y_k e^{-i\omega(2k-1)\Delta t/2} \quad (30)$$

相应地可求得测震系统的频谱如下

$$H_s(\omega) = \frac{\mathcal{F}\left[\Delta y\left(t; \frac{\Delta t}{2}\right)\right]}{\mathcal{F}[u_{st}(t)]} = \sum_{k=1}^n \Delta y_k e^{-i\omega(2k-1)\Delta t/2} \quad (31)$$

若输入为任意函数  $x(t)$ , 则不能直接应用式(31), 以图6为例, 可以将  $x(t)$  看作某一系统  $W(\omega)$  在阶跃函数  $u_{st}(t)$  作用下产生的响应曲线, 再将  $W(\omega)$  与  $H(\omega)$  相串接, 可求得单位阶跃函数作用下  $x(t)$  及  $y(t)$  二者的频谱  $W(\omega)$  及  $H_\Delta(\omega)$ , 从  $H_\Delta(\omega)$  中扣除  $W(\omega)$  即得  $H(\omega)$ , 这一方法示于图7。

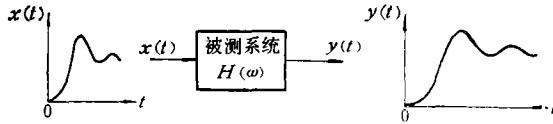


图 6

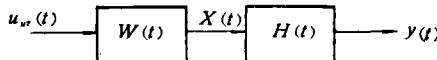


图 7

假定系统是线性的, 下列各式成立

$$\frac{Y(\omega)}{U(\omega)} = W(\omega) \cdot H(\omega) = H_\Delta(\omega)$$

$$\frac{X(\omega)}{U(\omega)} = W(\omega) \quad \text{及} \quad \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = H(\omega)$$

由此得

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{U(\omega)} / \frac{X(\omega)}{U(\omega)} \quad (32)$$

利用式(31) 将式(32) 改写成更通用的形式

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta y_k e^{-i\omega(2k-1)\Delta t/2}}{\sum_{q=1}^m \Delta x_q e^{-i\omega(2q-1)\Delta \tau/2}} \quad (33)$$

式中  $x(t)$  与  $y(t)$  的暂态响应特性的持续时间不一定相等, 因而可以有不同的等分数目, 这就是  $m$ ,  $n$ ,  $q$  和  $k$  所包含的意义。

顺便指出, 当从拾震器的标定线圈加入测试信号时, 应采用式(33)。

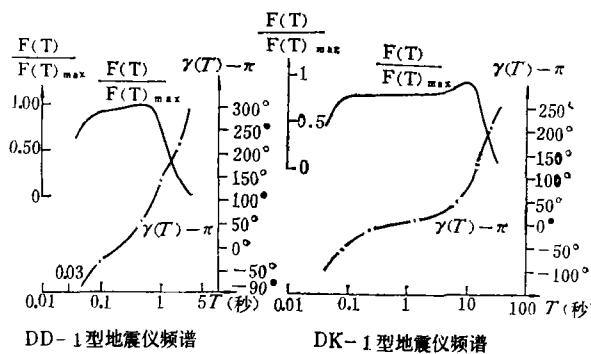


图 8

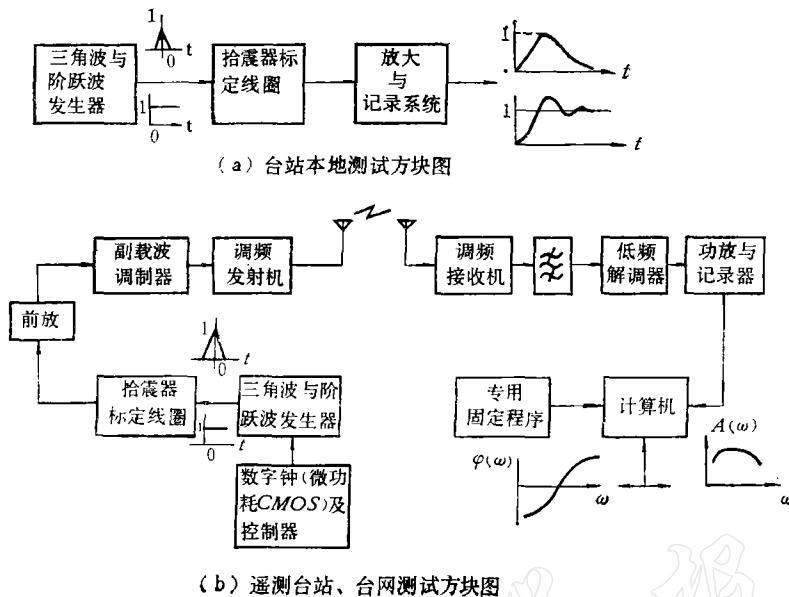


图 9

图 8 是用上述方法实测的 DD-1 型与 DK-1 型地震仪的振幅谱与相位谱。在实测时的方块图如图 9 所示,由实测曲线得出的频谱特性数据列于下表。

DD-1 型短周期地震仪			DK-1 型宽频带地震仪				
周期(秒)	频率(赫)	$\frac{F(T)}{F(T)_{\max}}$ (归一化)	$\gamma - \pi$	周期(秒)	频率(赫)	$\frac{F(T)}{F(T)_{\max}}$ (归一化)	$\gamma - \pi$
3.0	0.33	0.035	286°	15.0	0.068	0.820	142°
2.0	0.50	0.132	207°	12.0	0.083	0.961	103°
1.0	1.00	0.810	146°	9.0	0.111	1.00	71°
0.8	1.25	0.973	108°	6.0	0.167	0.920	46°
0.6	1.67	1.00	73°	3.0	0.333	0.871	21°
0.5	2.00	0.996	55°	1.5	0.667	0.862	8°
0.2	5.00	0.930	2.8°	0.9	1.11	0.860	2.9°
0.1	10.0	0.908	-33°	0.6	1.67	0.859	-2.61°
0.08	12.5	0.868	-47°	0.3	3.33	0.856	-11.7°
0.06	16.7	0.787	-71°	0.15	6.67	0.851	-28.2°
0.05	20.0	0.662	-86°	0.05	20.0	0.610	-89.7°

致谢: 感谢陈运泰等同志对本文提出宝贵意见。对张建平、霍娥泳、范力建等同志给予各方面的协助谨表谢意。

### 参 考 文 献

- [1] 绪方胜彦,现代控制工程(中译本),科学出版社,1976.
- [2] 沈梦培等,电子放大地震仪,地震出版社,1981.
- [3] H. S. Tsien, Engineering Cybernetics, New York, 1954.
- [4] 麦伟麟,光学传递函数及其数理基础,国防工业出版社,1979.

# ANALYSIS AND MEASUREMENT OF SPECTRAL CHARACTERISTICS OF A SEISMIC RECORDING SYSTEM

ZHAO SONGNIAN

*(Seismic Instrument Factory, State Seismological Bureau)*

## Abstract

The problem of accurately measure the spectral characteristics of a seismic observational system is an important subject of investigation in seismology. At present, the usual method to measure and calculate is by separate sections. In this way, it requires not only a certain amount of instrumental work, but also neglects the mutual effect between the seismograph and the amplifier at their junction. As a result, neither can the phase-characteristics be directly determined by experiment nor accurate amplitude-frequency characteristics be obtained.

In this paper, a method has been proposed for the determination of the spectral characteristics of any seismic observational system by means of Fourier Transform. It is called the TS-method. Two testing signals are used, a triangular and a step function pulse. If the dynamic response of the testing signals are known the spectral characteristics of the system under investigation can be found immediately.

The approximate formula for the spectral characteristics can be expressed as

$$H_s(\omega) = \frac{\mathcal{F}[\Delta y(t, \frac{\Delta t}{2})]}{\mathcal{F}[u_{st}(t)]} = \sum_{k=1}^n \Delta y_k e^{-i\omega(2k-1)\Delta t/2}$$

and

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta y_k e^{-i\omega(2k-1)\Delta t/2}}{\sum_{q=1}^m \Delta x_q e^{-i\omega(2q-1)\Delta \tau/2}}$$

When the transient response of system to any arbitrary input is known, the TS-method can also be used to determine the frequency response characteristics of a system.