

# 声波与弹性波场数值模拟中的 褶积微分算子法<sup>\*</sup>

张中杰 滕吉文 杨顶辉

(中国北京 100101 中国科学院地球物理研究所)

**摘要** 基于富氏变换正反技术, 分别讨论了各向同性声波与弹性波场模拟中的常规微分算子的设计方案, 并将这些褶积微分算子分别应用于非均匀各向同性介质中声波与弹性波场模拟当中. 为了更好地压制截断引起的吉谱斯效应, 我们引入了汉宁窗. 理论模型计算表明: 这种褶积微分算子法具有快速, 高精度且对计算机内存需求低的优点, 是一项颇具潜力的高速、高保真的数字仿真技术.

**主题词** 声波 弹性波 地震波 数值模拟 褶积微分算子

## 引言

无论是声波还是弹性波场的数值模拟, 对于人们理解波动传播现象、解释实际地震资料以表征地下介质构造与岩性以及新开发软件的验算、反问题的解决等, 均具有重要的理论与实际意义(Aminzadeh, 1989; Kindelan *et al.*, 1989; Igel *et al.*, 1993; Zhang *et al.*, 1993).

迄今为止, 人们已经发展了大量的数值模拟方案, 比如反射率法(Fuchs, Muller, 1971; 王椿镛, 1982; 朱介寿等, 1988)、有限单元法(Bathe, Nilson, 1976; Chen, 1984; 朱培民等, 1993)、有限差分法(Alford *et al.*, 1974)、射线追踪法(Cerveng, Psenicr, 1984)、富氏变换法、Hartley 变换法(刘迎曦, 1993)等, 并各具优缺点. 数值计算中, 富氏法实质上使用了长度为空间样点数的长褶积滤波器, 但具有高精度特性, 而常规有限差分法使用了短的算子, 但具有快速性. 本文所讨论的褶积微分算子法综合了这两种方法的优点, 即兼顾了计算的快速性与高精度. 为此, 本文首先讨论了各向同性介质声波场褶积微分算子法模拟的有关问题, 接着研究了弹性波场模拟问题. 理论模型计算表明: 该算法可以快速、高保真地模拟各向同性介质声波与弹性波动传播行为, 是复杂介质中地震波动模拟的一项颇有潜力的工具.

## 1 褶积微分算子法模拟声波场

在二维非均匀各向同性介质中, 在一定条件下(Berkhout, 1985), 声波波动方程为

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金与中国科学院青年基金资助课题.  
1994-08-24 收到初稿, 1995-04-14 收到修改稿.

$$\frac{\partial^2 P(x, z, t)}{\partial t^2} = V^2(x, z) \left[ \frac{\partial^2 P(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(x, z, t)}{\partial z^2} \right] + f(x, z, t) \tag{1}$$

其中,  $P(x, z, t)$  为声波场,  $V(x, z)$  为介质速度,  $x, z$  与  $t$  分别为笛卡尔直角坐标与时间,  $f(x, z, t)$  为力源项.

我们可以将二阶空间导数项

$$\varphi(x, z, t) = \frac{\partial^2 P(x, z, t)}{\partial x^2} \tag{2}$$

写作  $\varphi(x, z, t) = d_2(x) * P(x, z, t)$  (3)

其中, “ $*$ ”表示关于  $x$  的褶积运算. 利用正反富氏变换, 经过系列推导(详见附录 A), 可得二阶导数褶积微分算子  $d_2(x)$  为

$$d_2(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi x} \left[ \left( k_m^2 - \frac{2}{x^2} \right) \sin(k_m x) + \frac{2}{x} \cos(k_m x) \right] & x \neq 0 \\ -\frac{k_m^3}{3\pi} & x = 0 \end{cases} \tag{4}$$

类似地, 可以得到关于  $z$  的二阶导数褶积微分算子. 由此, 可将方程(1)写成

$$\frac{\partial^2 P(x, z, t)}{\partial t^2} = V^2(x, z) [d_2(x) * P(x, z, t) + d_2(z) * P(x, z, t)] + f(x, z, t) \tag{5}$$

通过对  $x$ - $z$  二维平面离散处理, 并令  $x = n\Delta x$ ,  $z = m\Delta z$ , 从而可以得到二阶导数褶积微分算子  $d_2(n\Delta x)$  与  $d_2(m\Delta z)$

$$d_2(n\Delta x) = \begin{cases} \frac{2}{n^2 (\Delta x)^3} (-1)^{n+1} & n \neq 0 \\ -\frac{\pi^2}{3 (\Delta x)^3} & n = 0 \end{cases} \tag{6}$$

与

$$d_2(m\Delta z) = \begin{cases} \frac{2}{m^2 (\Delta z)^3} (-1)^{m+1} & m \neq 0 \\ -\frac{\pi^2}{3 (\Delta z)^3} & m = 0 \end{cases} \tag{7}$$

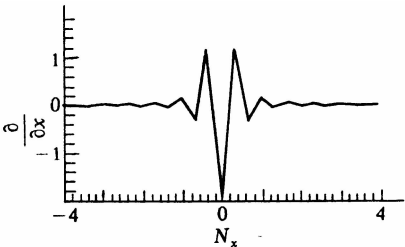


图 1 二阶褶积微分算子振幅随采样点数变化关系曲线

以上微分算子  $d_2$  显示出两个重要的性质: 第一, 因子  $1/n^2$  与  $1/m^2$  保证算子  $d_2$  的快速衰减, 从而可以利用较短的褶积算子计算空间褶积项; 第二, 算子系数保持对称, 这使得不必用传统褶积计算的乘积而可以利用加减替代. 图 1 为二阶褶积微分算子振幅随采样点数下标变化情况. 可见, 当  $n=6$  时, 微分算子振幅基本上已经衰减至零.

尽管微分算子随采样点数平方反比衰减, 但可以以较短微分算子进行运算. 若采用矩形窗截断, 将会导致吉谱斯现象的产生. 为此, 我们以汉宁窗改进褶积微分算子

$$W(n) = \left[ 2\alpha - 1 + 2(1 - \alpha) \cos^2 \frac{\pi n}{2(mx + 2)} \right]^{\beta/2} \quad |n| = 0, 1, 2, \dots, mx \tag{8}$$

其中,  $m x$  为采样点数单边截断长度,  $0.5 \leq \alpha \leq 1$ ,  $\beta$  可以随所需精度而改变.

因此, 改进后的褶积微分算子为

$$\tilde{d}_2(n \Delta x) = d_2(n \Delta x) W(n) \tag{9}$$

此时, 适于非均匀各向同性介质中声波场

数值模拟的离散公式为

$$P(n, m, k+1) = P(n, m, k) + \frac{\partial P(n, m, k + \frac{1}{2})}{\partial t} \tag{10a}$$

$$\frac{\partial P(m, n, k + \frac{1}{2})}{\partial t} = \frac{\partial P(m, n, k - \frac{1}{2})}{\partial t} + \Delta t F(m, n, k) \tag{10b}$$

$$F(m, n, k) = V^2(n, m) \times$$

$$\left[ \Delta x \sum_{i=-mx}^{mx} \tilde{d}_2(i \Delta x) P(n-i, m, k) + \Delta z \sum_{j=-mz}^{mz} \tilde{d}_2(j \Delta z) P(n, m-j, k) \right] + f(n, m, k) \tag{10c}$$

其中, 初值条件

$$P(n, m, k = 0) = 0 \tag{11a}$$

$$\frac{\partial P(n, m, k = 0)}{\partial t} = 0 \tag{11b}$$

稳定性条件为

$$|V_{\max} \Delta t k| \leq 2 \tag{12}$$

这里,  $V_{\max}$  为介质最大速度,  $k$  定义为

$$k = \sqrt{|\text{FFT}[\tilde{d}_2(n \Delta x)]| + |\text{FFT}[\tilde{d}_2(m \Delta z)]|} \tag{13}$$

我们利用以上结果编制了程序, 并进行了系列声波场模拟计算. 表 1 为双层介质参数表, 图 2 为计算得到的声波地震记录.

表 1 声波模型参数

层数	$v/\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$	$\rho/\text{g} \cdot \text{cm}^{-2}$
1	1.50	3.0
2	6.00	3.0

## 2 褶积微分算子法模拟弹性波场

在二维非均匀线性各向同性介质中, 弹性波位移方程为

$$\rho(x, z) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = [\partial_x A \partial_z + \partial_z B \partial_x + \partial_x B^T \partial_z + \partial_x C \partial_x] U + F(x, z, t) \tag{14}$$

其中,  $\partial_x, \partial_z$  分别为关于  $x$  与  $z$  的一阶偏导数,  $F(x, z, t)$  为力源矩, 且

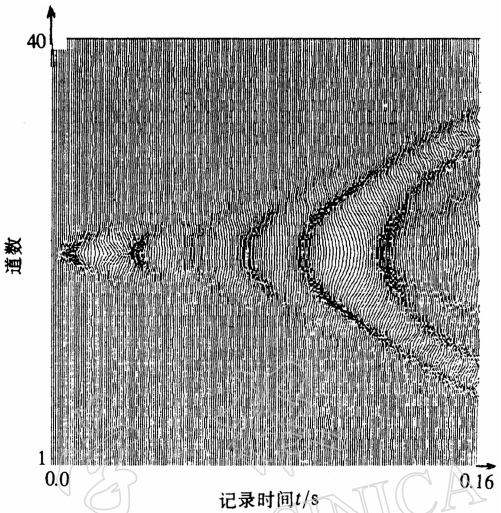


图 2 声波场记录

$$F(x, z, t) = \begin{bmatrix} f_x(x, z, t) \\ f_z(x, z, t) \end{bmatrix} \quad (14a)$$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda(x, z) + 2\mu(x, z) & 0 \\ 0 & \mu(x, z) \end{bmatrix} \quad (14b)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \mu(x, z) \\ \lambda(x, z) & 0 \end{bmatrix} \quad (14c)$$

$$C = \begin{bmatrix} \mu(x, z) & 0 \\ 0 & \lambda(x, z) + 2\mu(x, z) \end{bmatrix} \quad (14d)$$

$U = [u_x(x, z, t) \quad u_z(x, z, t)]^T$  为位移矢量,  $u_x(x, z, t)$  与  $u_z(x, z, t)$  分别为  $x$  与  $z$  方向位移分量,  $f_x(x, z, t)$  与  $f_z(x, z, t)$  为  $x$  与  $z$  方向力源分量,  $\rho(x, z)$  为介质密度.

为了得到弹性波场模拟的褶积微分算子法实施方案, 我们可以将一阶空间导数项

$$\varphi(x, z, t) = \frac{\partial U(x, z, t)}{\partial x} \quad (15)$$

记作

$$\varphi(x, z, t) = d(x) * U(x, z, t) \quad (16)$$

即关于  $x$  的一阶导数运算变易为褶积运算.

经过系列推导, 可得一阶空间导数褶积微分算子  $d(x)$  为 (详见附录 B)

$$d(x) = \begin{cases} \frac{-1}{\pi x} [(ik_m - \frac{1}{x}) \sin(k_m z) + k_m \cos(k_m z)] & z \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (17)$$

类似地, 我们可以得到关于  $z$  的一阶导数褶积微分算子  $d(z)$ :

$$d(z) = \begin{cases} \frac{-1}{\pi z} [(ik_m - \frac{1}{z}) \sin(k_m x) + k_m \cos(k_m x)] & x \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases} \quad (18)$$

由以上研究结果, 可知方程(14)可变成

$$\rho(x, z) \frac{\partial^2 U(x, z, t)}{\partial t^2} = \{d(x) * [Ad(z) * ] + d(z) * [Bd(x) * ] + d(x) * [Cd(x) * ]\} U(x, z, t) + F(x, z, t) \quad (19)$$

通过对二维平面离散处理,  $x = n\Delta x$ ,  $z = m\Delta z$  可以得到一阶导数褶积微分算子  $d(n\Delta x)$  与  $d(m\Delta z)$  为

$$d(n\Delta x) = \begin{cases} \frac{-1}{n\Delta x^2} (-1)^{n+1} & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases} \quad (20)$$

与

$$d(m\Delta z) = \begin{cases} \frac{-1}{m\Delta z^2} (-1)^{m+1} & m \neq 0 \\ 0 & m = 0 \end{cases} \quad (21)$$

显见，一阶空间导数的褶积微分算子同样具有两个重要性质，即因子  $d$  的衰减性与反对称性，因而也可以用较短的褶积微分算子计算空间褶积项。图 3 为一阶褶积微分算子振幅随采样点数下标变化曲线。

与上一部分声波场模拟那样，对褶积算子截断时必定会产生吉谱斯效应，我们同样可以汉宁窗加以改进。改进后的褶积微分算子为

$$\tilde{d}(n\Delta x) = d(n\Delta x)W(n)$$

至此，我们可以得到二维非均匀

线性各向同性介质中弹性波场数值模拟的离散公式

$$\begin{aligned} U(n, m, k+1) &= U(n, m, k) + \frac{\partial U(n, m, k + \frac{1}{2})}{\partial t} \\ \frac{\partial U(n, m, k + \frac{1}{2})}{\partial t} &= \frac{\partial U(n, m, k - \frac{1}{2})}{\partial t} + \Delta t P(n, m, k) \\ P(n, m, k) &= b(n, m) \left\{ \Delta x \sum_{i=-mx}^{mx} \tilde{d}(i\Delta x) \left[ \Delta z A(n-i, m) \sum_{j=-mz}^{mz} U(n-i, m-j, k) \right] + \right. \\ &\quad \Delta z \sum_{j=-mz}^{mz} \tilde{d}(j\Delta z) \left[ \Delta x B(n, m-j) \sum_{i=-mx}^{mx} U(n-i, m-j, k) \right] + \\ &\quad \left. \Delta x \sum_{i=-mx}^{mx} \left[ \Delta x C(n-i, m) \sum_{j=-mx}^{mx} U(n-i-j, m, k) \right] + F(m, n, k) \right\} \end{aligned}$$

其中， $b(n, m) = 1/\rho(n\Delta x, m\Delta z)$ ， $U(n, m, k)$  的初值条件为

$$\begin{aligned} U(n, m, k = 0) &= 0 \\ \frac{\partial U(n, m, k = 0)}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

我们利用以上研究结果，编制有关程序，进行了系列理论模型的弹性波场模拟计算。表 2 为双层介质弹性参数表，图 4 与图 5 分别为水平与垂直向地震记录。

表 2 弹性模型参数

层数	$v_p/\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$	$v_s/\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$	$\rho/\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$
1	2.70	1.50	3.00
2	5.40	3.00	3.00

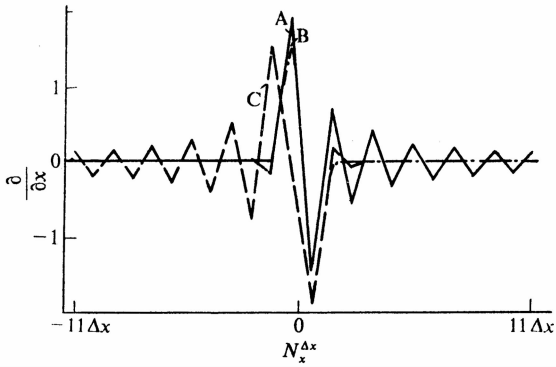
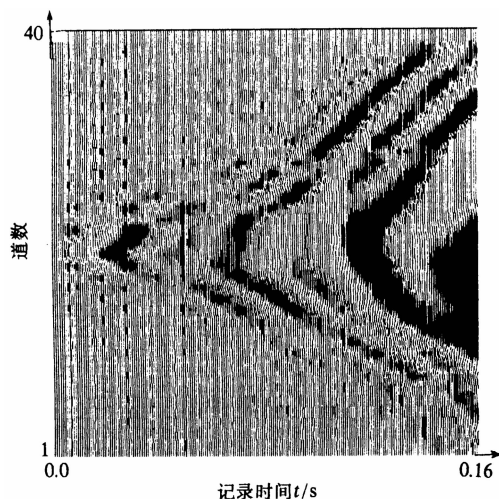
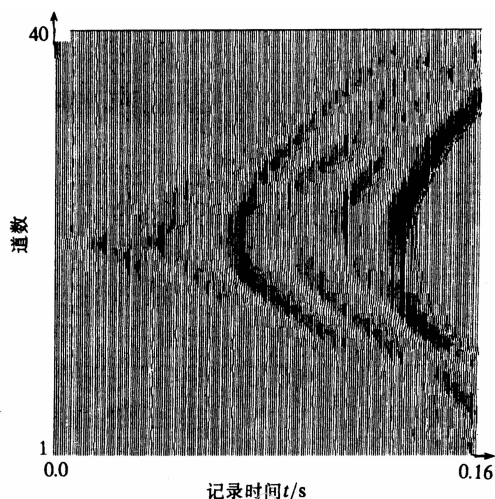


图 3 一阶偏微分算子. 曲线  $a$  为精确值， $C$  为中心差分算子， $b$  为 9 点褶积算子值

图 4  $U_x$  分量地震记录图 5  $U_y$  分量地震记录

### 3 结束语

本文利用富氏变换正反技术,分别设计了适于非均匀线性各向同性介质中声波场与弹性地震波场数值仿真的褶积微分算子.这些褶积微分算子具有快速衰减性与(正反)对称性.通过引入汉宁窗,极大地压制了由于截断引起的吉谱斯效应.理论模型计算表明:这种算法具有计算快速、精度很高、对计算机内存需求低的优点,这是各类复杂介质中声波或弹性波场数值模拟中一项颇具潜力的工具.

本项研究得到长春地质学院何椎登教授、中国科学院地球物理研究所张霖斌博士等人的帮助与支持,特此表示感谢.

### 参 考 文 献

- 刘迎曦,张霖斌,赵振峰等,1993. 利用哈特莱变换进行井间声波场正演模拟. 石油地球物理勘探, **28**(2): 276~281
- 王椿镛,1982. 层状不均匀介质中合成地震图的反射率法. 地球物理学报, **25**(4): 424~433
- 朱介寿,刘福田,王椿镛等(编著),1988. 地震学中的计算方法. 北京:地震出版社. p. 719
- 朱培民,詹正彬,1993. 任意各向异性介质中波传播的有限元数值模拟及其结果分析. 中国地球物理学会年刊. 北京:地震出版社. p. 35
- Alford R M, Kelly K R, Boore D M, 1974. Accuracy of finite-difference modelling of the acoustic wave equation. *Geophysics*, **39**: 834~842
- Aminzadeh F, 1989. Application of elastic modelling in processing and interpretation of VSP data: a case History. *Geophys Prosp*, **37**: 893~906
- Bathe K J, Nilson E L, 1976. *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs. 15~58.
- Berkhout A J, 1985. *Seismic Migration*. Amsterdam: Elsevier Science Publishs. 1~10.
- Chen Kunhua, 1984. Simulation of seismic propagation in anisotropic media; finite element methods. *The 54th SEG Annual Meeting Expanded Abstracts*, Houston, U. S. A. 631~632

- Cerveng V, Psencic P, 1984. Numeric modelling and inversion of traveltimes of seismic body waves in Inhomogeneous anisotropic media. *Geophys J R astr Soc*, **76**(1): 41~51
- Fuchs K, Müller G, 1971. Computation of synthetic seismograms with the reflectivity method and comparison with observations. *Geophys J R astr Soc*, **23**: 417~433
- Igel Heiner Mora, Peter Rodriques, Dominique Riouet Bruno, 1993. Hooke's law in a staggered finite difference grid. *Journal of Canadian Explorational Geophysics*, **29**: 45~50
- Zhang Zhongjie, He Qiaodeng, Teng Jiwen *et al.*, 1993. Simulation of 3-component seismic records in 2-D TIM with finite difference method. *Journal of Canadian Explorational Geophysics*, **29**: 51~58

## 附录 A 关于(4)式的推导

在富氏域内,  $d_2(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  变换为

$$\tilde{d}_2(k_x) = -k_x^2 \quad (\text{A-1})$$

数值计算文中式(3)时, 可选择

$$\tilde{d}_2(k_x) = \begin{cases} -k_x^2 & |k_x| \leq k_m \\ 0 & |k_x| > k_m \end{cases} \quad (\text{A-2})$$

这里,  $k_m$  为尼奎斯特波数  $\pi/\Delta x$ .

通过利用富氏逆变换有

$$d_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{d}_2(k_x) e^{ik_x x} dk_x \quad (\text{A-3})$$

显然, 当  $x=0$  时,  $d_2(x) = -\frac{k_m^3}{3\pi}$

当  $x \neq 0$  时,

$$d_2(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-k_m}^{k_m} k_x^2 e^{ik_x x} dk_x \quad (\text{A-4})$$

综合(A-3)、(A-4)即得到式(4).

## 附录 B 关于式(17)推导

富氏域内,  $d(x) = \frac{\partial}{\partial x}$  变成

$$\tilde{d}(k_x) = -ik_x \quad (\text{B-1})$$

同样, 进行褶积运算时, 可选取

$$\tilde{d}(k_x) = \begin{cases} -ik_x & |k_x| \leq k_m \\ 0 & |k_x| > k_m \end{cases} \quad (\text{B-2})$$

对  $\tilde{d}(k_x)$  作逆富氏变换, 分别考虑  $x=0$  与  $x \neq 0$  两种情况, 即可以得到式(17)

$$d(x) = \begin{cases} \frac{-1}{\pi x} [ik_m - \frac{1}{x}] \sin(k_m x) + k_m \cos(k_m x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (\text{B-3})$$