

研究简报

不连续走时曲线的反演

吴 明 熙

(国家地震局地球物理研究所)

摘要

本文系统地求解了不连续走时曲线的反演问题。所得到的解答表明，除了在低速层(若存在)内，其余各处的速度分布以及低速层的厚度均可唯一地确定。本文指出 Slichter (1932) 关于低速层厚度上界的推导和 Gerver-Markushevich (1966) 的反演公式是不合理的。

关键词 不连续；走时曲线；反演；低速层；Abel 积分方程

一、问题的提出

我们知道，从连续的地震走时曲线确定地球内部波速的问题，早于本世纪初就由 Herglotz (1909)，Bateman (1910) 和 Wiechert (1910) 圆满地解决了，并有了以他们的名字命名的著名的反演公式(以下简称 H-B-W 公式)。

我们还知道，对于不连续的走时曲线反演问题，H-B-W 公式是不适用的。历史上有人研究过与此有关的一些特殊情况，譬如，Slichter (1932) 讨论过一种为反双曲余弦曲线的速度深度分布函数，其对应的走时曲线会发生跳跃，并退化为一点。对于包含低速层的速度结构，由于射线在低速层内没有迴折点，因而走时曲线也将产生跳跃。Slichter 根据观测到的跳跃值 Δx 和 ΔT ，求出低速层厚度的上界，及至 1966 年，Gerver 和 Markushevich 给出一个包括低速层结构的走时反演公式，并得到广泛应用。

于是，我们认为，对于不连续的走时曲线，如何确定地球内部的速度分布，这一反演问题，实际上并未系统地被研究。况且，正如我们将要指出的，由于引证失之严密，以前有关低速层的某些结果不免有误。

二、不连续走时曲线反演

为以后参考方便，依照 Aki (1980) 的记法，我们首先概述一下 H-B-W 公式及其方

1987年6月15日收到本文初稿，1988年1月15日决定采用。

法。

首先我们考虑展平地球 (笛卡尔系) 的情况。波速 $c(z)$ 在这种情况下仅随深度变化。具有参数 p 的射线到达地表所走的距离 $X(p)$ 满足

$$\frac{X(p)}{2p} = \int_{c_0^{-2}}^{p^2} \frac{dz/d(c^{-2})}{\sqrt{c^{-2} - p^2}} d(c^{-2}), \quad (1)$$

其中 c_0 为 $z = 0$ 处的速度。对应的走时 $T(p)$ 为

$$T(p) = 2 \int_{c_0^{-2}}^{p^2} \frac{c^{-2} dz / dc^{-2}}{\sqrt{c^{-2} - p^2}} d(c^{-2}). \quad (2)$$

射线参数 P 可从走时 $T(X)$ 直接确定:

$$P = dT/dX. \quad (3)$$

走时反演问题就是从观测到的 $X(p)$ 或 $T(p)$ 求出 $c(z)$ 。

事实上, 方程(1)等同于如下的 Abel 积分方程:

$$\iota(x) = \int_0^x \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{x - \xi}}. \quad (4)$$

按照 Bôcher (1900) 给出的一条定理, Abel 积分方程(4) 有唯一的连续解

$$f(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\xi} \int_0^\xi \frac{\iota(x) dx}{\sqrt{\xi - x}} \quad (5)$$

的充分必要条件是:

- 1) $\iota(x)$ 连续,
- 2) $\iota(0) = 0$,
- 3) $\iota(x)$ 的导数有限, 至多带有限个间断点。我们以后简称上述条件为 Bôcher 条

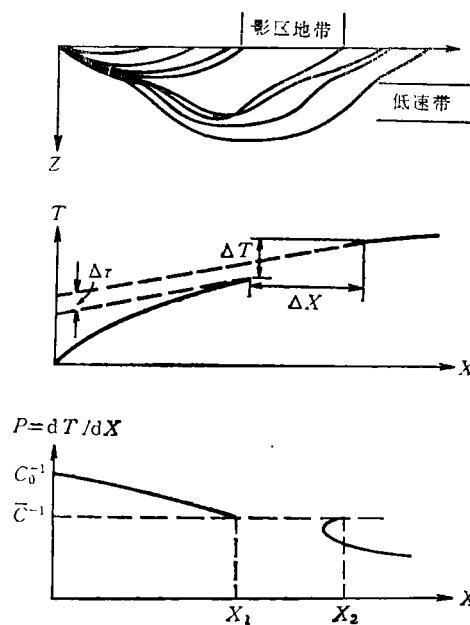


图 1 含有低速层结构的射线路径和走时(据文献[4])

件。

于是当 $X(p)$ 满足 Bôcher 条件时, 方程(1)就有唯一的连续解 dz/dc^{-2} , 也即可得 H-B-W 公式:

$$Z(c) = \frac{1}{\pi} \int_{c^{-2}}^{c_0^{-1}} \frac{X(p) dp}{\sqrt{p^2 - c^{-2}}}. \quad (6)$$

但是, 当 $X(p)$ 不连续, 出现间断时, 如图 1 所示, 这就违反了可应用 H-B-W 公式的条件。此时方程(1)如何求解? 我们将着手研究这个问题。

首先我们注意到, 按照 Bôcher 的另一条定理, 对于具有 Bôcher 条件的 $\iota(x)$, (5) 式等价于

$$f(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\xi \frac{\iota(x) dx}{\sqrt{\xi - x}} \quad (7)$$

解公式(7)实际上类似于线性方程组中的一种所谓“自然解”(Natural Solution, Lanczos, 1961), 假若我们把方程(4)中的 $f(\xi)$ 变换成

$$f(\xi) = \int_0^\xi \frac{\varphi(\eta) d\eta}{\sqrt{\xi - \eta}} \quad (8)$$

其中 $\varphi(\eta)$ 可称之为“生成函数”(generating function)。把(8)式代入(4)式:

$$\begin{aligned} \iota(x) &= \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{x - \xi}} \int_0^\xi \frac{\varphi(\eta) d\eta}{\sqrt{\xi - \eta}} \\ &= \pi \int_0^x \varphi(\eta) d\eta \end{aligned}$$

于是就有

$$\varphi(x) = \iota(x)/\pi$$

把上式代入(8)式, 就得到了(7)式。

解公式(7)有着这样的特殊性质, 假如方程(4)的解不唯一, 则在(4)式的所有解中, 解公式(7)具有“最小长度”。我们不去证明它, 但在以后的应用中我们将看到这一点。除此之外, 从广义函数观点看来, 解答(7)式的形式允许我们可以考虑 $\iota(x)$ 的不连续性及非有限的 $\iota(x)$ 。因此解答(7)式的形式比解答(5)式的形式具有更广泛的应用。

譬如说, 现在我们就可以应用(7)式于不连续走时曲线的反演问题。这时 $X(p)$ (如图 1) 可表示为

$$X(p) = x(p) + \Delta x \cdot H(p_1 - p) \quad (9)$$

其中 $x(p)$ 是 p 的连续函数, Δx 为常数, 即为影区大小, H 为 Heaviside 函数。对于(9)式形式的 $X(p)$, 应用公式(7)的解答形式, 方程(1)的自然解是

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dc^{-2}} &= \frac{1}{\pi} \int_{c^{-2}}^{c_0^{-2}} \frac{\frac{d}{dp^2} \left(\frac{X(p)}{2p} \right)}{\sqrt{p^2 - c^{-2}}} dp^2 \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{c^{-2}}^{c_0^{-2}} \frac{\frac{d}{dp^2} \left(\frac{X(p)}{2p} \right)}{\sqrt{p^2 - c^{-2}}} dp^2 + \frac{1}{\pi} \int_{c^{-2}}^{c_0^{-2}} \frac{\frac{d}{dp^2} \left(\frac{\Delta x H(p_1 - p)}{2p} \right)}{\sqrt{p^2 - c^{-2}}} dp^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{c^{-2}}^{c_0^{-2}} \frac{d}{dp^2} \left(\frac{x(p)}{2p} \right) dp^2 - \frac{\Delta x p_1 H(p_1 - c^{-1})}{2\pi c^{-2} \sqrt{p_1^2 - c^{-2}}}. \quad (10)$$

假如 $x(p)$ 的导函数 $\dot{x}(p)$ 处处是有限的, 则(10)式写成

$$\frac{dz}{dc^{-2}} = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dc^{-2}} \int_{c^{-1}}^{c_0^{-1}} \frac{x(p) dp}{\sqrt{p^2 - c^{-2}}} - \frac{\Delta x p_1 H(p_1 - c^{-1})}{2\pi c^{-2} \sqrt{p_1^2 - c^{-2}}}. \quad (11)$$

对(11)式两边对于 c^{-2} 积分, 应用 $z(c_0) = 0$, 就有

$$\begin{aligned} z(c) &= \frac{1}{\pi} \int_{c^{-1}}^{c_0^{-1}} \frac{x(p) dp}{\sqrt{p^2 - c^{-2}}} + \frac{\Delta x}{\pi} H(c - p_1^{-1}) \cos h^{-1}(p_1 c) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{c^{-1}}^{c_0^{-1}} \frac{X(p) dp}{\sqrt{p^2 - c^{-2}}}. \end{aligned} \quad (12)$$

(12)式在形式上完全与 H-B-W 公式(6)一样.

假如 $\dot{x}(p)$ 并非有限, 尤在 $p = p_1^{-1}$ 处, 正如图 1 所示, 情况又将如何? 为了简洁地解决这个问题, 我们作如下的处理.

首先, 一般地说, 由于 $X(p)$ 不连续, 按照 Bôcher 定理, 方程(1)的解 dz/dc^{-2} 就不再是唯一连续的了. 因此对应于(1)的齐次方程

$$\int_{c_0^{-2}}^{p^2} \frac{dz/dc^{-2}}{\sqrt{c^{-2} - p^2}} dc^{-2} = 0 \quad (13)$$

就可能有非零解 dz/dc^{-2} , 这就意味着低速层的存在. 因此, 对于不连续的 $X(p)$, 方程(1)的一般解可表示为:

$$z(c) = \frac{1}{\pi} \int_{c^{-1}}^{c_0^{-1}} \frac{X(p) dp}{\sqrt{p^2 - c^{-2}}} + D \cdot H(c - p_1^{-1}). \quad (14)$$

其中 D 表示低速层的厚度. 显然, 在低速层内速度分布不能确定. 当 D 不等于 0 时, 公式(14)中 dz/dc^{-2} 的总的“长度”显然要大于(12)式中 dz/dc^{-2} 的总的“长度”.

当然, D 与 $\dot{x}(p)$ 在 $p = p_1^{-1}$ 的非有限性是密切相关的. 我们知道 (Slichter, 1932), 若 $z(c)$ 满足

$$z(c) = \Delta x / \pi \cdot \cos h^{-1}(p_1 c) \quad (15)$$

则对应的 $X(p)$ 将出现影区. 我们注意到方程(1)及其解(10)之间显然存在着对偶关系. 因此, 在 $p = p_1^{-1}$ 处, 若 $x(p)$ 满足

$$x(p) = X_1 - L \cos h^{-1}(p_1/p), \quad (16)$$

其中 X_1, L 为常数. X_1 如图 1 所示, $L \geq 0$. 则对应的 $z(c)$ 解答也应有“影区”, 即对应低速层的存在. 于是, 就导数的非有限性而言就有

$$\left. \frac{d}{dp} \left(\frac{x(p)}{2p} \right) \right|_{p=p_1^{-1}} = \frac{L}{2p_1 \sqrt{p_1^2 - p^2}}. \quad (17)$$

把(17)式代入(10)式, 再积分一次就可得到

$$z(c) = \frac{1}{\pi} \int_{c^{-1}}^{c_0^{-1}} \frac{X(p) dp}{\sqrt{p^2 - c^{-2}}} + \frac{LH(c - p_1^{-1})}{2} \quad (18)$$

(18)式右边第一项为经典的 H-B-W 项, 第二项为低速层厚度.

在球对称地球(球坐标系)的情况, 要反演的方程是

$$\Delta(p) = \int_{p^2}^{(r_0/c_0)^2} \frac{\frac{d \ln r}{d(r/c)^2} d(r/c)^2}{\sqrt{(r/c)^2 - p^2}} \quad (19)$$

其中 Δ 为角距, r_0 为地球半径, r 为最深点的半径.

假定 $\Delta(p)$ 和 $T(p)$ 在 $p = p_1$ 观测到跳跃 Δ_1 和 ΔT , 相应于直角系中的 L 存在 L_Δ , 于是方程有解:

$$\ln(r_0/r) = \frac{1}{\pi} \int_{r/c}^{(r_0/c_0)^2} \frac{\Delta(p) dp}{\sqrt{p^2 - (r/c)^2}} + \frac{L_\Delta \cdot H(c/r - p_1^{-1})}{2}. \quad (20)$$

对于多个跳跃, 无论 $X(p)$ 或 $\Delta(p)$, 我们也能方便地写出相应的解答.

三、讨 论

现在我们讨论低速层的情形. 在低速层里我们知道

$$\Delta x_l = \int_{z_1}^{\bar{z}_1} 2 \tan i dz \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \Delta T_l &= \int_{z_1}^{\bar{z}_1} \frac{2 dz}{c(z) \cos i} \\ &= \int_{z_1}^{\bar{z}_1} 2 p_1 \tan i dz + \int_{z_1}^{\bar{z}_1} 2 p_1 \cot i dz \\ &= p_1 \Delta x_l + 2 p_1 \int_{z_1}^{\bar{z}_1} \cot i dz \end{aligned} \quad (22)$$

其中 Δx_l , ΔT_l 分别表示由于低速层在距离和走时上的跳跃, 而 z_1 , \bar{z}_1 分别表示低速层的上、下界面深度, $\bar{z}_1 - z_1 = D$.

对于(22)式, 我们又可写成

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T_l - p_1 \Delta x_l}{2 p_1} &= \int_{z_1}^{\bar{z}_1} \cot i dz \\ &= \int_{z_1}^{\bar{z}_1} \frac{dz}{dx} dz \\ &= D \cdot \overline{dz/dx}, \end{aligned} \quad (23)$$

其中 $\overline{dz/dx}$ 表示 dz/dx 在 (z_1, \bar{z}_1) 中的平均值. 显然

$$\frac{\overline{dz}}{dx} = \frac{2D}{\Delta x_l} \quad (24)$$

因此

$$D = \frac{\sqrt{\Delta x_i(\Delta T_i/p_i - \Delta x_i)}}{2} \quad (25)$$

当

$$L = \sqrt{\Delta x(\Delta T/p_i - \Delta x)}$$

时, 表明跳跃完全由低速层所致。

早在 1932 年, Slichter 曾把(25)式当成低速层厚度的上界。但是他的推导是有缺陷的。按照 Slichter 的记法, (22)式可写成

$$\frac{T}{2} = \frac{X}{2V} + \int_{v_1}^V \frac{[1 - (\nu/V)^2]^{1/2}}{\nu} \frac{dz}{d\nu} d\nu, \quad (26)$$

其中 T, X, V, ν 对应于本文的 $\Delta T_i, \Delta x_i, p_i^{-1}, c$ 。继而, 对于公式(26), 对于固定的 X , 寻求这样的速度函数 $z(\nu)$, 使 T 达到极小。这样就得到欧拉方程, 最终即可导致(25)式。

但是在低速层内, $dz/d\nu$ 是不连续的, 这就违反了应用变分原理的条件。

及至 1966 年, Gerver 和 Markushevich 提出了一个反演含有低速层结构的公式:

$$Z(p) = \frac{1}{\pi} \int_p^{c_0^{-1}} \frac{X(q) dq}{\sqrt{q^2 - p^2}} + \frac{2}{\pi} \int_{z_1}^{z_0} dz \int_{p_1}^{c^{-1}} \frac{qdq}{\sqrt{(c^{-2} - q^2)(q^2 - p^2)}}. \quad (27)$$

这里假定只含一层低速层。 $Z(p)$ 是参数为 p 的射线达到最底部点的深度。

事实上, 对上式右边第二项进行化简, 就可写成

$$Z(p) = \frac{1}{\pi} \int_p^{c_0^{-1}} \frac{X(q) dq}{\sqrt{q^2 - p^2}} + (z_0 - z_1) - \frac{1}{\pi} \int_p^{p_1} \frac{\Delta x(q) dq}{\sqrt{q^2 - p^2}} \quad (28)$$

其中 $\Delta x(q)$ 表示参数为 q 的射线在低速层中所走的距离:

$$\Delta x(q) = \int_{z_1}^{z_0} \frac{2q dz}{\sqrt{c^{-2} - q^2}}.$$

由于 $\Delta x(q)$ 不等于 0, 显然(28)式和我们推得的(18)式是不相同的。

究其根本原因, 乃是(27)式源于下面恒等式:

$$Z(p) = \int_0^{Z(p)} dZ \quad (29)$$

显然, 对于包括低速层的结构来说, $Z(p)$ 不再是 p 的连续函数了, 因此在公式(29)中, 把 $Z(p)$ 作为积分限当然是不合理的。

参 考 文 献

- [1] Herglotz, G., 1907. *Phys. Zeits.*, 8, 145—147.
- [2] Bateman, H., 1910. *Phil. Mag.*, 19, 576.
- [3] Wiechert and Geiger, 1910. *Phys. Zeits.*, 11, 294.
- [4] Aki, K., and P. G. Richards, 1980. *Quantitative Seismology—theory and methods*, 641—659. San Francisco: Freeman.
- [5] Bocher, M., 1909. An introduction to the study of integral equations, 9. Cambridge University press.
- [6] Slichter, L. B., 1932. The theory of the interpretation of seismic traveltimes in horizontal structures. *Physics*, 3, 273—295.
- [7] Gerver, M. L., and V. Markushevich, 1966. Determination of a Seismic Wave Velocity from the travel-time curve. *Geophys. J.*, 165—173.
- [8] Lanczos, C., 1961. *Linear Differential Operators*. 140. London: Van Nostrand.

ON THE INVERSION PROBLEM FOR A DISCONTINUOUS TRAVEL-TIME CURVE

WU MINGXI

(Institute of Geophysics, State Seismological Bureau)

Abstract

A complete solution of the inversion problem has been achieved for a discontinuous travel-time curve. The solutions show that, except in the LVL (if exists), the velocity structure and the thickness of the LVL can be uniquely determined. Finally, we point out that the Gerver-Markushevich's formula (1966) is incorrect.

地震学报
ACTA SEISMOLOGICA SINICA