第1卷 第2期
1979 年 11 月

地 震 学 报
ACTA SEISMOLOGICA SINICA

Vol. 1, No. 2
Nov., 1979

重力基点联测结果的精度估算*

骆鸣津 顾梦林 王保斋 刘碧宇
（河南省地震局） （国家地震局物探队）

摘 要

本文针对地震系统重力测量的实际情况，对重力基点联测结果的精度估算问题进行了研究. 给出了多台仪器多条测线联测结果的精度计算公式和目前普遍采用的三次单程联测结果的精度计算公式. 指出了几种低估误差的不合理方法.

一、引 言

目前地震系统许多单位开展了流动重力测量工作，通过对重力基点进行重复测量来研究重力场的变化与地震的孕育和发生的关系. 正确了解测量结果中各类误差的性质、来源、量级以及正确评定测量结果的精度是一个十分重要的问题，这关系到对异常的正确判断以及如何采取有效的办法来提高测量精度.

本文首先导出了多台仪器多条测线联测结果的精度计算公式，对布朗热（Ю. Д. Буланже）公式[1]进行了扩充和修正. 另外还指出，简单地用白塞耳公式计算重力基点联测结果的精度，会低估测量误差.

在地震系统流动重力测量中普遍采用三次单程的联测方法，如何正确地估算其结果的精度，是一个长期以来未能得到解决的问题. 为此，本文导出了一个较为合理的精度计算公式，在三个单程所用时间基本相等的情况下，这个公式的形式比较简单适用. 但也指出三次单程的联测方法本身存在一个固有的缺陷，即仪器在中间边上的非线性掉格所引起的误差会被掩盖，因此采用这种方法时不宜只用一台仪器. 许多实测数据表明，当前在各类误差中，第一类半系统误差 σ_2 的数值最大，为了有效地提高联测精度，也应适当增加仪器台数. 另一方面要尽可能减小 σ_2 本身的数值，而要做到这一点，则应采取各种必要措施尽可能地提高重力仪格值的精度.

我国地震系统流动重力测量中用基线场来标定重力仪格值的方法是从传统的地质勘探和大地测量上沿用来的，对于研究重力场随时间变化这一课题而言，这种方法是不完善的，必须予以注意. 从计量学的观点来看，这种方法是不合理的，应加以根本改进，最合理和最有前途的方法是采用高精度的绝对重力仪建立和定期鉴定重力基线场和重力控制网.

* 1976 年 9 月收到.

二、多台仪器多条测线联测结果的精度估算

为了高精度测定两重力点的重力差，往往采用多台仪器多条测线的联测方法．假如各台仪器是等精度的，各条测线也是等精度的且是独立的，那么在联测结果中所包含的误差情况如下：

1. 偶然误差 σ_1　它是由于观测读数和其他纯偶然原因引起的，它们在读数与读数之间、测点与测点之间、仪器与仪器之间、测线与测线之间的变化是偶然性质的．若在一台仪器一条测线的情况下，这类误差为 σ_1，那末当仪器台数为 n，测线数为 k 时，此项误差将减小为 $\sigma_1/\sqrt{nk}$.

2. 第一类半系统误差 σ_2　它主要是由于重力仪格值的误差引起的．重力仪格值的误差在格值标定时就存在，在使用过程中由于重力仪自身的性能以及受到温度、气压等因素的影响，格值会发生变化，从而进一步增大了格值的误差．对于各架仪器之间来说，这类误差是偶然性质的，但对于具体每一台仪器来说，它又具有系统性质．这就是说，增加测线数并不能减小这类误差，只有增加仪器数才能减小这类误差．这类误差称为第一类半系统误差．若用一台仪器联测，这类误差为 σ_2，则用 n 台仪器联测，这类误差将减小为 $\sigma_2/\sqrt{n}$.

3. 第二类半系统误差　它主要是由于仪器在各条测线上所受的外界条件（如温度、气压）不同以及仪器在运送中受到的震动情况不同等因素引起的．对于具体每一条测线来说，这类误差是系统性质的，但对于各条测线之间来说，它又具有偶然性质．这就是说，增加仪器台数并不能减小这类误差，只有增加测线数才能减小这类误差．这类误差称为第二类半系统误差．若一条测线联测时，这类误差为 σ_3，则测线数为 k 时，这类误差将减小为 $\sigma_3/\sqrt{k}$.

4. 系统误差 σ_4　这类误差既不能用增加仪器台数又不能用增加测线数予以减小的．如用于重力仪格值标定的重力基线场的误差所引起的联测结果的误差，就属于这类误差．这类误差称为系统误差．

于是，用 n 台仪器，在两重力点间进行 k 条测线的联测，其联测结果的误差为：

$$M = \pm\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{nk} + \frac{\sigma_2^2}{n} + \frac{\sigma_3^2}{k} + \sigma_4} \tag{1}$$

假若，在流动重力复测工作中，始终用同一个重力基线场来标定重力仪格值，而且这个重力基线场又是始终不变的，系统误差可以不予考虑．于是 n 台仪器在两重力点间进行 k 条测线的联测，其结果的误差为：

$$\delta_{o\cdot o} = \pm\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{nk} + \frac{\sigma_2^2}{n} + \frac{\sigma_3^2}{k}} \tag{2}$$

表 1 列出了 n 台仪器 k 条测线联测所得到的 nk 个两点间的重力值，其中每个结果都是线性独立的，并作了零漂改正及固体潮改正．$\Delta g_{i\cdot j}$ 脚码的前一个字母 i 表示仪器序号，脚码的后一个字母 j 表示测线序号，脚码“o”表示平均值．

仪器序号：1，2，3，……i，……n

测线序号：1，2，3，……j，……k

表 1 中：

$$\Delta g_{o\cdot j}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta g_{i\cdot j} \tag{3}$$

$$\Delta g_{i\cdot o}=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\Delta g_{i\cdot j} \tag{4}$$

$$\Delta g_{o\cdot o}=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\Delta g_{o\cdot j} \tag{5}$$

$$\Delta g_{o\cdot o}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta g_{i\cdot o} \tag{6}$$

$$\Delta_{o\cdot j}=\Delta g_{o\cdot j}-\Delta g_{o\cdot o} \tag{7}$$

$$\Delta_{i\cdot o}=\Delta g_{i\cdot o}-\Delta g_{o\cdot o} \tag{8}$$

$$m_{o\cdot j}=\pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\Delta g_{i\cdot j}-\Delta g_{o\cdot j})^2}{n(n-1)}} \tag{9}$$

$$m_{i\cdot o}=\pm\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{k}(\Delta g_{i\cdot j}-\Delta g_{i\cdot o})^2}{k(k-1)}} \tag{10}$$

$$m_k=\pm\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{k}\Delta_{o\cdot j}^2}{k(k-1)}}=\frac{\sigma_k}{\sqrt{k}} \tag{11}$$

$$m_n=\pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta_{i\cdot o}^2}{n(n-1)}}=\frac{\sigma_n}{\sqrt{n}} \tag{12}$$

表 1

n \ k	1	2	…	j	…	k	平均值	$\Delta_{i\cdot 0}$	平均值均方误差	平均值误差
1	$\Delta g_{1\cdot 1}$	$\Delta g_{1,2}$	…	$\Delta g_{1\cdot j}$	…	$\Delta g_{1\cdot k}$	$\Delta g_{1\cdot 0}$	$\Delta_{1\cdot 0}$	$m_{1\cdot 0}$	$\delta_{1\cdot 0}$
2	$\Delta g_{2\cdot 1}$	$\Delta g_{2,2}$	…	$\Delta g_{2\cdot j}$	…	$\Delta g_{2\cdot k}$	$\Delta g_{2\cdot 0}$	$\Delta_{2\cdot 0}$	$m_{2\cdot 0}$	$\delta_{2\cdot 0}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	$\Delta g_{i\cdot 1}$	$\Delta g_{i\cdot 2}$	…	$\Delta g_{i\cdot j}$	…	$\Delta g_{i\cdot k}$	$\Delta g_{i\cdot 0}$	$\Delta_{i\cdot 0}$	$m_{i\cdot 0}$	$\delta_{i\cdot 0}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$\Delta g_{n\cdot 1}$	$\Delta g_{n\cdot 2}$	…	$\Delta g_{n\cdot j}$	…	$\Delta g_{n\cdot k}$	$\Delta g_{n\cdot 0}$	$\Delta_{n\cdot 0}$	$m_{n\cdot 0}$	$\delta_{n\cdot 0}$
平均值	$\Delta g_{0\cdot 1}$	$\Delta g_{0\cdot 2}$	…	$\Delta g_{0\cdot j}$	…	$\Delta g_{n\cdot k}$	$\Delta g_{0\cdot 0}$		m_n	
$\Delta_{0\cdot j}$	$\Delta_{0\cdot 1}$	$\Delta_{0\cdot 2}$	…	$\Delta_{0\cdot j}$	…	$\Delta_{0\cdot k}$		0		
平均值均方误差	$m_{0\cdot 1}$	$m_{0\cdot 2}$	…	$m_{0\cdot j}$	…	$m_{0\cdot k}$	m_k			
平均值误差	$\delta_{0\cdot 1}$	$\delta_{0\cdot 2}$	…	$\delta_{0\cdot j}$	…	$\delta_{0\cdot k}$				$\delta_{0\cdot 0}$

表 1 中任一 $\Delta g_{i\cdot j}$ 值都包含有三类误差 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. 各平均值的误差将按偶然误差的性质减小，但系统误差不会改变. 如 $\Delta g_{0\cdot j}$ 是第 j 条测线用 n 台仪器所测得结果的平均值，对第 j 条测线，它的均方误差应为：

$$m_{0\cdot j}^2 = \frac{1}{n}\sigma_1^2 + \frac{1}{n}\sigma_2^2 \tag{13}$$

实际上，在平均值 $\Delta g_{0\cdot j}$ 的总误差 $\delta_{0\cdot j}$ 中，除了包含均方误差 $m_{0\cdot j}$ 外，还应包含第 j 条测线的系统误差 σ_3 项，这是因为在公式(9)的 $(\Delta g_{i\cdot j} - \Delta g_{0\cdot j})$ 中消去了 σ_3，均方误差 $m_{0\cdot j}$ 中已无 σ_3 了，而平均值 $\Delta g_{0\cdot j}$ 中应包含 σ_3. 因 σ_3 对具体某一条测线是系统性质的，不因取平均而改变，于是 $\Delta g_{0\cdot j}$ 的总误差为：

$$\delta_{0\cdot j}^2 = \frac{1}{n}\sigma_1^2 + \frac{1}{n}\sigma_2^2 + \sigma_3^2 \tag{14}$$

同理，$\Delta g_{i\cdot o}$ 的均方误差 $m_{i\cdot o}^2$ 为：

$$m_{i\cdot 0}^2 = \frac{1}{k}\sigma_1^2 + \frac{1}{k}\sigma_3^2 \tag{15}$$

平均值 $\Delta g_{i\cdot 0}$ 的总误差 $\delta_{i\cdot 0}$ 为：

$$\delta_{i\cdot 0}^2 = \frac{1}{k}\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \frac{1}{k}\sigma_3^2 \tag{16}$$

现在再来看表 1 中平均值一行的数据 $\Delta g_{0\cdot 1}, \Delta g_{0\cdot 2}, \Delta g_{0\cdot 3}, \cdots\cdots \Delta g_{0\cdot j}, \cdots \Delta g_{0\cdot k}$. 其中 $\Delta g_{0\cdot j}$ 相当于用一台"平均仪器"（此仪器比一般仪器精度高$\sqrt{n}$倍)在第 j 条测线上测得的结果，其误差已由(14)式给出，而最后平均值 $\Delta g_{0\cdot 0}$ 则相当于用此"平均仪器"进行 k 条测线的联测所得到的结果，而由 $\Delta g_{0\cdot 1}, \Delta g_{0\cdot 2}, \cdots\cdots \Delta g_{0\cdot j} \cdots\cdots \Delta g_{0\cdot k}$ 求得的平均值 $\Delta g_{0\cdot 0}$ 的均方误差 m_k 可由(11)，(14)式求得：

$$m_k^2 = \frac{1}{nk}\sigma_1^2 + \frac{1}{k}\sigma_3^2 \tag{17}$$

上式中不包含 σ_2 项，因 $\frac{1}{\sqrt{n}}\sigma_2$ 是此"平均仪器"的系统误差，在用(7)式求 $\Delta_{0\cdot j}$ 的过程中已消去了这一项，从而用(11)式求得的 m_k 中也就没有这一项了. 但平均值 $\Delta g_{0\cdot 0}$ 的总误差 $\delta_{0\cdot 0}$ 中则应包含 σ_2 项，将被消去的"平均仪器"的系统误差 $\frac{1}{\sqrt{n}}\sigma_2$ 项再加回去，则得总误差 $\delta_{0\cdot 0}$：

$$\delta_{0\cdot 0}^2 = m_k^2 + \frac{1}{n}\sigma_2^2 = \frac{1}{nk}\sigma_1^2 + \frac{1}{n}\sigma_2^2 + \frac{1}{k}\sigma_3^2 \tag{18}$$

同理，$\Delta g_{i\cdot 0}$ 相当于第 i 台仪器在一条"平均测线"（此测线比一般测线精度高 $\sqrt{k}$ 倍)上测得的结果. 用表 1 中 $\Delta g_{1\cdot 0}, \Delta g_{2\cdot 0}, \cdots\cdots \Delta g_{i\cdot 0} \cdots\cdots \Delta g_{n\cdot 0}$ 一列数所求得的平均值 $\Delta g_{0\cdot 0}$ 的均方误差 m_n，可根据上述类似的方法得到：

$$m_n^2 = \frac{1}{nk}\sigma_1^2 + \frac{1}{n}\sigma_2^2 \tag{19}$$

加上这条"平均测线"的系统误差 $\frac{1}{\sqrt{k}}\sigma_3$，就得到 $\Delta g_{0\cdot 0}$ 的总误差 $\delta_{0\cdot 0}$：

表

仪器号	$\Delta g_{i\cdot j}$ k / n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
317	1	64.86803	64.86469	64.86066	64.85156	64.86568	64.86747	64.86298	64.85771	64.85731
261	2	64.79469	64.81128	64.80684	64.80474	64.80079	64.81167	64.82398	64.80313	64.80798
316	3	64.75656	64.74462	64.74808	64.75274	64.75123	64.74074	64.74582	64.73538	64.75373
263	4	64.73549	64.74670	64.73757	64.72898	64.74617	64.74314	64.73068	64.71700	64.73756
354	5	64.74335	64.72875	64.72475	64.73957	64.73311	64.69943	64.70149	64.73192	64.72580
315	6	64.70509	64.70685	64.72281	64.71083	64.72414	64.70658	64.70826	64.70226	64.72079
327	7	64.70482	64.70451	64.72285	64.71681	64.71112	64.72356	64.71659	64.72651	64.70040
378	8	64.66906	64.64606	64.65418	64.64238	64.65930	64.63806	64.66684	64.69426	64.68759
377	9	64.64269	64.62068	64.63699	64.63718	64.63747	64.60967	64.62778	64.62908	64.62973
324	10	64.60897	64.61456	64.59334	64.62543	64.61228	64.60772	64.60798	64.61108	64.61144
355	11	64.57663	64.57806	64.58650	64.59068	64.58849	64.58749	64.57680	64.57391	64.58661
326	12	64.56772	64.56169	64.59346	64.56785	64.56494	64.55860	64.57321	64.58898	64.57810
平均值 $\Delta g_{0\cdot j}$		64.69776	64.69404	64.69900	64.69740	64.69956	64.69118	64.69519	64.69760	64.69975
均方误差 $m_{0\cdot j}$		0.02593	0.02678	0.02527	0.02488	0.02583	0.02709	0.02627	0.02460	0.02499
$\Delta_{0\cdot j}$		0.00082	−0.00290	0.00206	0.00046	0.00262	−0.00576	−0.00176	0.00066	0.00281

2　　单位：毫伽

10	11	12	13	14	15	16	平均值 $\Delta g_{i\cdot0}$	均方误差 $m_{i\cdot0}$	$\Delta_{i\cdot0}$
64.85458	64.84294	64.85779	64.85631	64.86167	64.85460	64.86263	64.85914	0.00164	0.16220
64.80011	64.80285	64.78089	64.79463	64.82660	64.79186	64.78420	64.80289	0.00310	0.10595
64.73956	64.73736	64.74491	64.72638	64.73480	64.75484	64.75013	64.74606	0.00221	0.04912
64.73357	64.75522	64.72532	64.72427	64.73081	64.74401	64.74524	64.73636	0.00251	0.03942
64.71514	64.69333	64.73209	64.71869	64.74163	64.73241	64.72826	64.72436	0.00377	0.02742
64.70451	64.72607	64.73682	64.73482	64.72774	64.73279	64.72703	64.71859	0.00300	0.02165
64.69540	64.71048	64.70465	64.71802	64.68632	64.70667	64.70187	64.70941	0.00274	0.01247
64.63517	64.65371	64.67866	64.70339	64.67971	64.70017	64.69140	64.66875	0.00567	−0.02819
64.64291	64.65357	64.63544	64.62364	64.63939	64.62979	64.63973	64.63348	0.00259	−0.06346
64.60593	64.59707	64.61176	64.58137	64.60171	64.59735	64.59758	64.60535	0.00258	−0.09159
64.57764	64.57345	64.59032	64.58600	64.57977	64.58098	64.58686	64.58251	0.00148	−0.11443
64.58208	64.58147	64.57311	64.59824	64.57986	64.55905	64.59367	64.57638	0.00315	−0.12056
64.69055	64.69559	64.69765	64.69715	64.69917	64.69871	64.70071	64.69694		
0.02477	0.02504	0.02415	0.02458	0.02606	0.02596	0.02430		$m_n=\pm0.02518$	
−0.00639	−0.00135	0.00071	0.00021	0.00223	0.00177	0.00377		$m_k=\pm0.0074$	

$$\delta_{0\cdot 0}^2 = m_n^2 + \frac{1}{k}\sigma_3^2 = \frac{1}{nk}\sigma_1^2 + \frac{1}{n}\sigma_2^2 + \frac{1}{k}\sigma_3^2 \tag{20}$$

用(17)式和(19)式求得的 $\Delta g_{0\cdot 0}$ 的两个均方误差 m_k, m_n 是不同的，但由不同途径求得的总误差 $\delta_{0\cdot 0}$ 则是相同的，即 (18)、(20)、(2) 这三个式子是一致的.

由 (13) 式对各条测线求平均得:

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} m_{0\cdot j}^2 = \frac{1}{n}\sigma_1^2 + \frac{1}{n}\sigma_2^2 \tag{21}$$

将 (21) 式代入 (18) 式得:

$$\delta_{0\cdot 0}^2 = m_k^2 + \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} m_{0\cdot j}^2 - \frac{1}{n}\sigma_1^2 \tag{22}$$

同理可得到另一组公式:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{i\cdot 0}^2 = \frac{1}{k}\sigma_1^2 + \frac{1}{k}\sigma_3^2 \tag{23}$$

$$\delta_{0\cdot 0}^2 = m_n^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{i\cdot 0}^2 - \frac{1}{k}\sigma_1^2 \tag{24}$$

(22)、(24)及(2)三式就是我们所要求得的三个主要公式，其中 (24) 式是后面将要论述的多台仪器三次单程(和多次单程)联测结果的精度估算公式.

式中 σ_1 可由下式求得[2]:

$$\sigma_1 = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(\Delta g_{i\cdot j} - \Delta g_{i\cdot 0} - \Delta g_{0\cdot j} + \Delta g_{0\cdot 0})^2}{(n-1)(k-1)}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(\Delta g_{i\cdot j} - \Delta_{i\cdot 0} - \Delta_{j\cdot 0} - \Delta g_{0\cdot 0})^2}{(n-1)(k-1)}} \tag{25}$$

某种仪器的组合，在一段时间内，其 σ_1 的值是较为稳定的. 由北京、南京、基线场 18 台仪器 16 条测线的联测情况可以看出这一点. 在北京基线场 $\sigma_1 = \pm 0.014$ 毫伽，在南京基线场 $\sigma_1 = \pm 0.013$ 毫伽. 如果用北京基线场修正各仪器的格值，然后再计算在南京基线场的联测结果，得出的 σ_1 仍是这个数值，仅 σ_2 有所改变. 因此每次进行仪器格值标定时，可将 σ_1 的值算出，在以后计算联测结果的精度时，作为参考.

从 (19)、(17) 式还可解出 σ_2、σ_3:

$$\sigma_2^2 = n\left(m_n^2 - \frac{1}{nk}\sigma_1^2\right) \tag{26}$$

$$\sigma_3^2 = k\left(m_k^2 - \frac{1}{nk}\sigma_1^2\right) \tag{27}$$

下面举一实例来说明整个计算过程和方法.

例一: 表 2 列出了某次联测中 12 台重力仪 16 条测线的测量数据以及有关的计算结果.

由 (25), (26), (27) 式分别算得 σ_1, σ_2, σ_3:

$$\sigma_1 = \pm 0.012 \text{ 毫伽}$$
$$\sigma_2 = \pm 0.087 \text{ 毫伽}$$
$$\sigma_3 = \pm 0.000 \text{ 毫伽}$$

再将 σ_1, σ_2, σ_3 分别代入 (2), (22), (24) 式算得 $\delta_{0\cdot 0}$.

由 (2) 式算得 $\delta_{0\cdot 0} = \pm 0.025$ 毫伽

由(22)式算得 $\delta_{0\cdot 0} = \pm 0.026$ 毫伽

由(24)式算得 $\delta_{0\cdot 0} = \pm 0.025$ 毫伽

用三个公式算得的结果是一致的,这表明上列公式所依据的概念、假定和推演都是正确的.

例一还表明，这种性能的重力仪在目前这种施测条件下，各类误差中，σ_2 是最突出的. 因此,为了提高联测精度,必须尽力提高重力仪的格值精度以及适当增加仪器台数.

例一中的每条测线均由三个单程组成. 通常,每条测线由两个单程组成，这时，σ_1 和 σ_3 将会比前一种情况大些.

三、多台仪器多条测线的联测工作中两种估算精度的错误方法

1. 布朗热公式的错误

当前,在多台仪器多条测线的联测工作中，某些单位还仍然采用布朗热公式[1]来估算精度. 布氏提出的误差分类是合理的和符合实际的，但是他推导出的公式有错误. 下面我们对此进行讨论.

布朗热在计算总误差 $\delta_{0\cdot 0}$ 时也用(2)式,计算 σ_1 时也用(25)式,其错误在于计算 σ_2 和 σ_3 的两式,他得出:

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{nk-1}\left[nk\sigma_n^2 - n\sigma_k^2 - (n-1)\sigma_1^2\right] \tag{28}$$

$$\sigma_3^2 = \frac{1}{nk-1}\left[nk\sigma_k^2 - k\sigma_n^2 - (k-1)\sigma_1^2\right] \tag{29}$$

这两式由下列两式解出

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{k}\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \frac{1}{k}\sigma_3^2 \tag{30}$$

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{n}\sigma_1^2 + \frac{1}{n}\sigma_2^2 + \sigma_3^2 \tag{31}$$

(30)、(31) 两式就是 (28)、(29) 两式错误的根源.

布氏认为 σ_n 是由 $\Delta g_{i\cdot 0}$ 求 $\Delta g_{0\cdot 0}$ 时,一次 $\Delta g_{i\cdot 0}$ 的误差，σ_k 是由 $\Delta g_{0\cdot j}$ 求 $\Delta g_{0\cdot 0}$ 时，一次 $\Delta g_{0\cdot j}$ 的误差,因此平均值 $\Delta g_{0\cdot 0}$ 的误差就应为

$$m_{\Delta g_{0\cdot 0}} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}} = m_n$$

或

$$m_{\Delta g_{0\cdot 0}} = \frac{\sigma_k}{\sqrt{k}} = m_k$$

而忽略了各自的系统误差. 这样一来，就意味着 $m_n = m_k$，而在例一中，$m_n = \pm 0.025$ 毫伽，$m_k = \pm 0.007$ 毫伽，m_n 显然不等于 m_k. 这说明(30)式和 (31) 式有错误，是矛盾的. 这是由于(30)式中多了系统误差项 $\frac{1}{k}\sigma_3^2$，(31)式中多了系统误差项 $\frac{1}{n}\sigma_2^2$，这两项在用(12)，(11)两式求 m_n 和 m_k 时已经消去了，若分别从(30)式和(31)式中除去这两项，就和前面的 (17) 式和 (19) 式一样了.

由于(28)式和(29)式是错误的，算得的 σ_2 和 σ_3 可能出现虚数，为了解决这个矛盾，布氏就假定当 σ_2、σ_3 为虚数时，就令其为零. 事实上，此虚数的数值有时并不小，将此虚数值代入(2)式求总误差 $\delta_{0\cdot 0}$ 时，其影响有时是不可忽视的，是会低估联测结果的误差的.

2. 按白塞耳公式计算的错误

当前，还有人将 n 台仪器 k 条测线的联测所得到的 nk 个值 $\Delta g_{i\cdot j}$，按白塞耳公式来计算其平均值 $\Delta g_{0\cdot 0}$ 的误差 $\delta_{0\cdot 0}$，即

$$\delta_{0\cdot 0} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(\Delta g_{i\cdot j} - \Delta g_{0\cdot 0})^2}{nk(nk-1)}} \tag{32}$$

这实际上是把各台仪器各条测线的测量结果 $\Delta g_{i\cdot j}$ 中包含的误差全都当作偶然误差了，而没有区分其中所包含的各类不同性质的误差 σ_1、σ_2、σ_3. 用 (32) 式计算 $\Delta g_{0\cdot 0}$ 的误差 $\delta_{0\cdot 0}$，相当于认为在多台仪器多条测线的联测中，各类不同性质的误差 σ_1、σ_2、σ_3 都既随仪器台数 n 增加而减小，又随测线数 k 增加而减小. (32)式实际上相当于下式:

$$\delta_{0\cdot 0} = \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{nk} + \frac{\sigma_2^2}{nk} + \frac{\sigma_3^2}{nk}} \tag{33}$$

这显然是不合理的，肯定会低估测量结果的误差. 若将例一中算得的 σ_1、σ_2、σ_3 代进 (33) 式，则得:

$$\delta_{0\cdot 0} = \pm 0.006 \text{ 毫伽}$$

若将例一中 12 台仪器、16 条测线共 192 个数值代进(32)式，则得:

$$\delta_{0\cdot 0} = \pm 0.006 \text{ 毫伽}$$

两者完全一致. 而用(2)式算得的结果为

$$\delta_{0\cdot 0} = \pm 0.025 \text{ 毫伽}$$

上例有力地说明了 (32) 式会低估联测结果的误差，特别在目前 σ_2 较大的情况下，误差低估的程度是十分严重的.

四、三次单程联测结果的最或然值及其精度的计算

在重力基点联测中，经常将两个单程作为一条独立测线，即由甲地出发到乙地，再由乙地回到甲地. 为了便于工作推进而又不增加路程，又往往采用三次单程联测的办法，如图 1 所示，由甲地出发到乙地，再由乙地回到甲地，然后再由甲地来到乙地；接着，用同样的方式由乙地向丙地推进. 图中 1，2，3，4……等数字为测量序号.

长期以来，人们一直将 1—2—3 (甲—乙—甲) 作为一条测线，将 2—3—4 (乙—甲—

乙）作为另一条测线，然后将它们作为两条独立的测线来计算联测结果及其精度．可是这两条测线之间有一公用边 2—3，彼此并不独立，因此这样做是不合理的．针对上述情况，我们用间接观测平差的方法导出一组计算三次单程联测结果的最或然值及其误差的公式．首先讨论一台仪器的情况．

设重力仪的零点漂移(掉格)满足下列直线方程

$$g = \beta t + \gamma \tag{34}$$

式中 β、γ 为待定系数，β 表示漂移率、t 表示观测时间，g 表示重力观测值（经固体潮改正）．现用 Δg 表示两重力点间重力差的最或然值．如无误差和漂移，则

$$g_{乙} - g_{甲} = \Delta g \tag{35}$$

用(35)式将乙点上的重力观测值 $g_{乙}$ 减去 Δg，换算成甲点上的重力值，再与甲点上的重力观测值一起按时间 t 作成图2，图中 t 和 g 的脚码即图 1 中的观测序号．由图 2 可以看出重力仪的掉格情况．

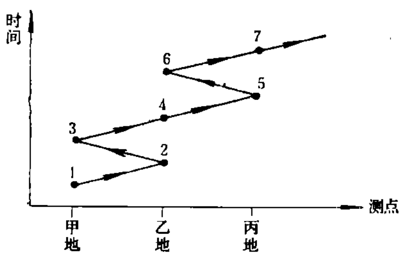

图　1

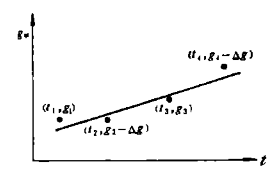

图　2

于是，由(34)、(35)式，并考虑到各观测值中含有的误差，即可列出下列误差方程：

$$\left.\begin{aligned}
&\beta t_1 + \gamma - g_1 = v_1 \\
&\beta t_2 + \gamma - (g_2 - \Delta g) = v_2 \\
&\beta t_3 + \gamma - g_3 = v_3 \\
&\beta t_4 + \gamma - (g_4 - \Delta g) = v_4
\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

下面根据最小二乘法[3]求解这组误差方程．将上式取平均，令

$$t_0 = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{4}$$

$$g_0 = \frac{g_1 + g_2 + g_3 + g_4}{4}$$

则可得到

$$\beta t_0 + \gamma + \frac{1}{2}\Delta g - g_0 = 0 \tag{37}$$

将(36)式分别减(37)式中各式，即可消去 γ，而得到下列一组新的误差方程：

$$\left.\begin{aligned}
&(t_1 - t_0)\beta - \frac{1}{2}\Delta g - (g_1 - g_0) = v_1 \qquad (t_2 - t_0)\beta + \frac{1}{2}\Delta g - (g_2 - g_0) = v_2 \\
&(t_3 - t_0)\beta - \frac{1}{2}\Delta g - (g_3 - g_0) = v_3 \qquad (t_4 - t_0)\beta + \frac{1}{2}\Delta g - (g_4 - g_0) = v_4
\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

再令

$$\left.\begin{aligned} &a_1 = t_1 - t_0, \quad b_1 = -\frac{1}{2}, \quad l_1 = -(g_1 - g_0) \\ &a_2 = t_2 - t_0, \quad b_2 = +\frac{1}{2}, \quad l_2 = -(g_2 - g_0) \\ &a_3 = t_3 - t_0, \quad b_3 = -\frac{1}{2}, \quad l_3 = -(g_3 - g_0) \\ &a_4 = t_4 - t_0, \quad b_4 = +\frac{1}{2}, \quad l_4 = -(g_4 - g_0) \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

以及 $x = \beta \quad y = \Delta g$

就可以写成一般的误差方程的形式

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + l_1 = v_1 \\ a_2x + b_2y + l_2 = v_2 \\ a_3x + b_3y + l_3 = v_3 \\ a_4x + b_4y + l_4 = v_4 \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

组成法方程,解出未知数的最或是值:

$$\left.\begin{aligned} \Delta g = y = -\frac{[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} \\ \beta = x = -\frac{[ab]\Delta g + [al]}{[aa]} \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

以及未知数的中误差:

$$\left.\begin{aligned} m_{\Delta g} = m_y = \pm\mu\sqrt{\frac{1}{p_y}} \\ m_\beta = m_x = \pm\mu\sqrt{\frac{1}{p_x}} \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

式中 μ 为单位权中误差

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-t}}$$

n 是观测值的个数, t 是未知数的个数,在此

$$n = 4, \quad t = 3$$

p_y, p_x 是未知数的权系数

$$p_y = [bb \cdot 1]$$

$$p_x = \frac{[aa]}{[bb]}[bb \cdot 1]$$

于是 Δg 的误差为

$$m_{\Delta g} = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{[bb \cdot 1]}} \tag{43}$$

式中

$$[vv] = [ll \cdot 1] - \frac{[bl \cdot 1][bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$$

也可以将求得的 β, γ, Δg 的值代回(36)式,求出 v_1, v_2, v_3, v_4, 然后再求 $[vv]$.

以上是一台仪器的情况. 如用多台仪器进行三次单程联测，其联测结果及其误差可分别用(6)式和(24)式计算,这时

$$\Delta g_{i\cdot 0}=(\Delta g)_i \quad m_{i\cdot 0}=(m_{\Delta g})_i$$

于是

$$\Delta g_{0\cdot 0}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta g)_i$$

$$\delta_{0\cdot 0}=\pm\sqrt{m_n^2+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(m_{\Delta g})_i^2+\frac{1}{k}\sigma_1^2}$$

对于三次单程，$k=1.5$

现以三台仪器三次单程联测的一个实例来说明这种计算方法的整个过程.

例二：表3、表4、表5分别列出了三台仪器三次单程联测的有关数据、计算格式及计算结果.

表3　仪器(315)三次单程联测

测点	序号	时间 t (小时)	测量结果 g (毫伽)	a $(t-t_0)$	b	l $-(g-g_0)$	aa	ab	bb	al	bl	ll
07	1	11.917	23.665	−1.592	−0.5	−2.387	2.534464	0.7960	0.25	3.800104	1.1935	5.697769
08	2	13.000	18.938	−0.509	0.5	2.340	0.259081	−0.2545	0.25	−1.191060	1.1700	5.475600
07	3	14.050	23.644	0.541	−0.5	−2.366	0.292681	−0.2705	0.25	−1.280006	1.1830	5.597956
08	4	15.067	18.866	1.558	0.5	2.412	2.427364	0.7790	0.25	3.757896	1.2060	5.817744
和[ ]		54.034	85.113				5.513590	1.0500	1.00	5.086934	4.7525	22.589069
中值		13.509	21.278									

计算

$$[bb\cdot 1]=[bb]-\frac{[ab][ab]}{[aa]}=0.800040 \qquad \Delta g=-\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}=-4.729\text{(毫伽)}$$

$$[bl\cdot 1]=[bl]-\frac{[ab][al]}{[aa]}=3.783752 \qquad \beta=-\frac{[ab]\Delta g+[al]}{[aa]}=-0.022\text{(毫伽/小时)}$$

$$[ll\cdot 1]=[ll]-\frac{[al][al]}{[aa]}=17.895775 \qquad m_{\Delta g}=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{[bb1]}}=\pm 0.029\text{(毫伽)}$$

$$[vv]=[ll\cdot 1]-\frac{[bl\cdot 1][bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}=0.000696$$

根据表3、表4、表5中的有关数据以及(6),(12),(24)等式可以算得

表 4　仪器（98）三次单程联测

测点	序号	时间 t（小时）	测量结果 g（毫伽）	a $(t-t_0)$	b	l $-(g-g_0)$	aa	ab	bb	al	bl	ll
07	1	11.917	7.055	−1.579	−0.5	−2.425	2.493241	0.7895	0.25	3.829075	1.2125	5.880625
08	2	13.000	2.214	−0.496	0.5	2.416	0.246016	−0.2480	0.25	−1.198336	1.2080	5.837056
07	3	14.017	7.056	0.521	−0.5	−2.426	0.271441	−0.2605	0.25	−1.263946	1.2130	5.885476
08	4	15.050	2.193	1.554	0.5	2.437	2.414916	0.7770	0.25	3.787098	1.2185	5.938969
和 [ ]		53.984	18.518				5.425614	1.5080	1.00	5.153891	4.8520	23.542126
中值		13.496	4.630									

计算

$$[bb\cdot 1]=[bb]-\frac{[ab][ab]}{[aa]}=0.793689 \qquad \Delta g=-\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}=-4.847\ (\text{毫伽})$$

$$[bl\cdot 1]=[bl]-\frac{[ab][al]}{[aa]}=3.846986 \qquad \beta=-\frac{[ab]\Delta g+[al]}{[aa]}=-0.005\ (\text{毫伽/小时})$$

$$[ll\cdot 1]=[ll]-\frac{[al][al]}{[aa]}=18.646350 \qquad m_{\Delta g}=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{[bb\cdot 1]}}=\pm 0.013\ (\text{毫伽})$$

$$[vv]=[ll\cdot 1]-\frac{[bl\cdot 1][bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}=0.000128$$

表 5　仪器（122）三次单程联测

测点	序号	时间 t（小时）	测量结果 g（毫伽）	a $(t-t_0)$	b	l $-(g-g_0)$	aa	ab	bb	al	bl	ll
07	1	11.917	49.430	−1.599	−0.5	−2.306	2.556801	0.7995	0.25	3.687294	1.1530	5.317636
08	2	12.983	44.759	−0.533	0.5	2.365	0.284089	−0.2665	0.25	−1.260545	1.1825	5.593225
07	3	14.083	49.551	0.567	−0.5	−2.427	0.321489	−0.2835	0.25	−1.376109	1.2135	5.890329
08	4	15.083	44.757	1.567	0.5	2.367	2.455489	0.7835	0.25	3.709089	1.1835	5.602689
和 [ ]		54.066	188.497				5.617868	1.0330	1.00	4.759729	4.7325	22.403879
中值		13.516	47.124									

计算

$$[bb\cdot 1]=[bb]-\frac{[ab][ab]}{[aa]}=0.810054 \qquad \Delta g=-\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}=-4.762\ (\text{毫伽})$$

$$[bl\cdot 1]=[bl]-\frac{[ab][al]}{[aa]}=3.857293 \qquad \beta=-\frac{[ab]\Delta g+[al]}{[aa]}=+0.028\ (\text{毫伽/小时})$$

$$[ll\cdot 1]=[ll]-\frac{[al][al]}{[aa]}=18.371385 \qquad m_{\Delta g}=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{[bb\cdot 1]}}=\pm 0.068\ (\text{毫伽})$$

$$[vv]=[ll\cdot 1]-\frac{[bl\cdot 1][bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}=0.003833$$

$$\Delta g_{0\cdot 0} = -4.779 \text{ 毫伽}$$
$$\delta_{0\cdot 0} = \pm 0.053 \text{ 毫伽}$$

计算中作了 $k = 1.5$ 和 $\sigma_1 = 0.020$ 毫伽的假定．$k=1.5$ 是因为若以两个单程作为一条测线，那么三个单程就相当于一条半测线．$\sigma_1 = \pm 0.020$ 毫伽，是根据这三台仪器的性能和实际施测条件假定的．将 $\sigma_1 = \pm 0.020$ 毫伽及表 3、表 4、表 5 中的有关数据代入(19),(23) 式,即可求得 σ_2、σ_3:

$$\sigma_2 = \pm 0.058 \text{ 毫伽}$$
$$\sigma_3 = \pm 0.049 \text{ 毫伽}$$

再将 σ_1, σ_2, σ_3 的数值代入(2)式,得:

$$\delta_{0\cdot 0} = \pm 0.053 \text{ 毫伽}$$

与上述(24)式结果完全一致．

五、等时间间隔时三次单程联测结果的最或然值及其精度的计算公式

通常在三次单程联测中,每个单程所用的时间大体相等，根据这一条件，可将上节推得的计算公式大大简化,更便于实际应用．若三个单程所用的时间完全相等,则

$$\left.\begin{array}{l} \Delta t_1 = t_2 - t_1 \quad \Delta t_2 = t_3 - t_2 \quad \Delta t_3 = t_4 - t_3 \\ \Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3 = \Delta t \end{array}\right\} \tag{44}$$

令

$$\left.\begin{array}{l} \Delta g_1 = g_2 - g_1 \\ \Delta g_2 = g_3 - g_2 \\ \Delta g_3 = g_4 - g_3 \end{array}\right\} \tag{45}$$

那么误差方程(40)的系数就变为

$$\left.\begin{array}{ll} a_1 = -\dfrac{6}{4}\Delta t & b_1 = -\dfrac{1}{2} \\ a_2 = -\dfrac{2}{4}\Delta t & b_2 = \dfrac{1}{2} \\ a_3 = \dfrac{2}{4}\Delta t & b_3 = -\dfrac{1}{2} \\ a_4 = -\dfrac{6}{4}\Delta t & b_4 = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \tag{46}$$

及

$$\left.\begin{array}{l} l_1 = \dfrac{3}{4}\Delta g_1 + \dfrac{2}{4}\Delta g_2 + \dfrac{1}{4}\Delta g_3 \\ l_2 = -\dfrac{1}{4}\Delta g_1 + \dfrac{2}{4}\Delta g_2 + \dfrac{1}{4}\Delta g_3 \\ l_3 = -\dfrac{1}{4}\Delta g_1 - \dfrac{2}{4}\Delta g_2 + \dfrac{1}{4}\Delta g_3 \\ l_4 = -\dfrac{1}{4}\Delta g_1 - \dfrac{2}{4}\Delta g_2 - \dfrac{3}{4}\Delta g_3 \end{array}\right\} \tag{47}$$

用最小二乘法解误差方程(40)得:

$$\Delta g = y = \frac{1}{4}(\Delta g_1 - 2\Delta g_2 + \Delta g_3) \tag{48}$$

若令

$$\left.\begin{aligned} g_3 - g_1 &= w_1 \\ g_4 - g_2 &= w_2 \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

则

$$\left.\begin{aligned} \Delta g_2 &= w_1 - \Delta g_1 \\ \Delta g_3 &= w_2 - w_1 + \Delta g_1 \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

将(50)式代进(48)式中,得:

$$\Delta g = \Delta g_1 - \frac{3}{4} w_1 + \frac{1}{4} w_2 \tag{51}$$

$$\Delta g = \frac{1}{4}(-g_1 + 3g_2 - 3g_3 + g_4) \tag{52}$$

$$\beta = x = \frac{1}{4}(w_1 + w_2)\frac{1}{\Delta t} \tag{53}$$

将所得结果代入(37)式求出 γ,然后都代入(36)式,则得:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{4}(w_1 - w_2) \\ v_2 &= -\frac{1}{4}(w_1 - w_2) \\ v_3 &= -\frac{1}{4}(w_1 - w_2) \\ v_4 &= \frac{1}{4}(w_1 - w_2) \\ [vv] &= \frac{1}{4}(w_1 - w_2)^2 \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

代入(42)式,得

$$m_{\Delta g} = \pm\frac{\sqrt{5}}{4}(w_1 - w_2) \doteq \pm 0.56(w_1 - w_2) \tag{55}$$

以上是一台仪器的情况,对于多台仪器三次单程联测,仍用(6)、(12)、(24)诸式计算联测结果 $\Delta g_{0\cdot0}$ 及其精度 $\delta_{0\cdot0}$.

现仍以例二为例,将上节的一般公式与本节的简化公式所计算得的结果均列入表6中,从表6的结果来看,在一般情况下,两种方法所得的结果是一致的.

表 6 单位: 毫伽

仪 器	315		98		122		$\Delta g_{0\cdot0}$	$\delta_{0\cdot0}$
	Δg	$m_{\Delta g}$	Δg	$m_{\Delta g}$	Δg	$m_{\Delta g}$		
一般公式计算结果	−4.729	±0.029	−4.847	±0.013	−4.762	±0.068	−4.779	±0.053
等时间公式计算结果	−4.729	±0.029	−4.847	±0.012	−4.762	±0.069	−4.779	±0.053

以上是三个单程所用时间完全相等的条件导出的结果．如果三个单程所用时间并不完全相等，仍然用等时间间隔条件下的公式，对结果的影响如何呢？为了做一个粗略的估计，假定第二个单程所用的时间比第一，第三个单程长一些或短一些，而第一和第三个单程时间相等，即可令

$$\Delta t_1 = \Delta t_3 = \Delta t_2(1+\delta) = \Delta t_2 + \Delta t_2\delta \tag{56}$$

于是

$$\delta = \frac{\Delta t_3 - \Delta t_2}{\Delta t_2} = \frac{\Delta t_1 - \Delta t_2}{\Delta t_2} \tag{57}$$

将(56)式代入(36)式，并将 Δt_2, δ, x 等项并入 l 中，同样可列出类似(40)式的误差方程，其中由(46)式确定的系数不变，而(47)式确定的系数 l 变为

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= \frac{3}{4}\Delta g_1 + \frac{2}{4}\Delta g_2 + \frac{1}{4}\Delta g_3 - \Delta t_2\cdot\delta\cdot x \\ l_2 &= -\frac{1}{4}\Delta g_1 + \frac{2}{4}\Delta g_2 + \frac{1}{4}\Delta g_3 \\ l_3 &= -\frac{1}{4}\Delta g_1 - \frac{2}{4}\Delta g_2 + \frac{1}{4}\Delta g_3 \\ l_4 &= -\frac{1}{4}\Delta g_1 - \frac{2}{4}\Delta g_2 - \frac{3}{4}\Delta g_3 + \Delta t_2\cdot\delta\cdot x \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

再将(53)式中 $x=\beta$ 代入，用最小二乘法解此误差方程，得：

$$\Delta g = \frac{1}{4}(\Delta g_1 - 2\Delta g_2 + \Delta g_3) - \frac{1}{8}(w_1 + w_2)\delta \tag{59}$$

将(59)式与(48)式比较，得到用等时间间隔公式计算非等时间间隔的联测结果所引起的偏差为

$$\Delta y = -\frac{1}{8}(w_1 + w_2)\delta \tag{60}$$

若对于例二中的仪器(315)，如第一程和第三程所用时间为 60 分钟，即 $\Delta t_1 = \Delta t_3 =$ 60 分，而第二程所用时间为 90 分钟，即 $\Delta t_2 = 90$ 分，那么由(57)、(59)式可算得

$$\delta = -\frac{1}{3} \qquad \Delta y = -0.004 \text{ 毫伽}$$

由此可见，即便各单程所用时间差别较大时，这种偏差也是不大的，远小于联测结果的误差．不过这个结论只有在重力仪掉格较小，即 w_1 和 w_2 均较小时，才成立．当重力仪掉格较大，即 w_1 和 w_2 较大，三程所用时间的差别又较大时，这种偏差将是不可忽略的．

总之，W_1 和 W_2 是两个重要的数据，它们之差是估算精度的指标，它们之和是规定时间段限差的指标．同时，应指出 δ 本身是一个相对量，即(57)式所示．时间限差 $|\Delta t_3 - \Delta t_2|$ 和 $|\Delta t_1 - \Delta t_2|$ 除受 $w_1 + w_2$ 所制约外，还与 Δt_2 的大小有关．

六、关于三次单程联测中间边非线性掉格问题

以上对三次单程联测的讨论中，假定了在 1—2，2—3，3—4 三条边上的测量是等精

度的，而实际上有可能在其中一条边上出现较大的误差，例如重力仪在某一条边上发生突然掉格．当这种现象发生在中间边 2—3 上，虽然直接影响了联测结果 $\Delta g_{i\cdot o}$，但用四、五两节介绍的方法计算其误差 $m_{i\cdot o}$，是反映不出来的．当突然掉格现象发生在 1—2，3—4 两条边上，是能在 $m_{i\cdot o}$ 中反映出来的．下面举一例子说明这个问题．

现以例二表 3 中仪器 (315) 为例，当用等时间间隔公式计算时可得 $\Delta g_{i\cdot o}=-4.729$ 毫伽，$m_{i\cdot o}=\pm 0.029$ 毫伽．假如在中间边 2—3 上出现 0.500 毫伽的突然掉格，那么在 07 和 08 点上的第二次读数均下降 0.500 毫伽，于是测量数据如表 7 所示．仍用等时间间隔公式计算，得 $\Delta g_{i\cdot 0}=-4.479$ 毫伽，$m_{i\cdot 0}=\pm 0.029$ 毫伽．

表 7

测　点	07	08	07	08
序　号	1	2	3	4
时间 t (小时)	11.917	13.000	14.050	15.067
测量结果 g (毫伽)	23.665	18.938	23.144	18.366

三次单程联测的这个问题是这种方法的固有缺点，由 (55) 式可看出

$$m_{i\cdot 0}=\pm 0.56(w_1-w_2)=\pm 0.56[(g_2-g_1)-(g_4-g_3)]$$

$m_{i\cdot 0}$ 只与 g_2-g_1 和 g_4-g_3 的差有关，而与中间边上的重力差 g_3-g_2 无关．这是因为在三次单程联测中，重力仪的零点漂移是用直线来拟合的，即假定了重力仪在中间边 2—3 的漂移率是在1—2和3—4两条边上的平均值．通常，这一假定基本上能符合实际情况．但重力仪在中间边发生了突然掉格这类现象时，即破坏了这一基本假设．这一固有缺点不论用什么计算方法都是无法弥补的，因此，就精度和这一缺点而言，不如四次单程(两次双程)的联测．不过三次单程联测与二次单程(一次双程)相比，其工作量差不多，但精度却要高些．以突然掉格现象来说，对于二次单程，不论出现在那一条边上，都难以发现，而对于三次单程，只有出现在公用边 2—3 上才难以发现，这就是说，发生了突然掉格而又未被发现的几率只有三分之一．对于三次单程联测，当联测精度符合要求，而联测结果与以往相差甚大时，应重新联测，以判明究竟是出现了异常还是中间边发生了突然掉格．对于多台仪器三次单程联测，各台仪器同时在中间边发生同样数值的突然掉格的机会是极少的，并且，由于各台仪器突然掉格数值的差异性，可以使得由于突然掉格而产生的误差反映在 m_n 中，亦即反映在 σ_2 之中．因此，采用多台仪器，基本上可以解决中间边突然掉格问题．

七、关于三次单程联测中一种低估误差的不合理方法

在第四节中已经提到，在三次单程联测中，有人按 1—2—3 (甲—乙—甲) 和 2—3—4(乙—甲—乙) 的组合方法进行两条测线的计算，分别求出 Δg_1 及 Δg_2 (见图 3)，再将Δg_1 和 Δg_2 当作两个独立结果代到白塞耳公式求均方误差，由于存在公用边 2—3，因而 Δg_1 和 Δg_2 不独立，会低估测量结果的误差．下面对此作一简单分析．

若三个单程所用时间基本相等，那么按照这种办法有

$$\Delta g_1 = g_2 - \frac{g_1 + g_3}{2}$$

$$\Delta g_2 = \frac{g_2 + g_4}{2} - g_3$$

$$\Delta g = \frac{1}{2}(\Delta g_1 + \Delta g_2)$$

$$= \frac{1}{4}(-g_1 + 3g_2 - 3g_3 + g_4) \qquad (61)$$

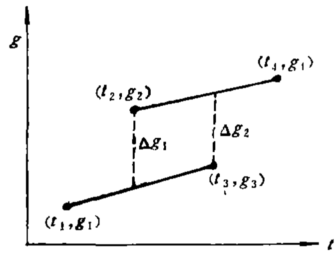

图　3

$$m_{\Delta g} = \pm\sqrt{\frac{(\Delta g_1 - \Delta g_0)^2 + (\Delta g_2 - \Delta g_0)^2}{2(2-1)}} = \pm 0.25(w_1 - w_2) \qquad (62)$$

(61)式与(52)式完全一致，但(62)式与(55)式相差甚大，低估误差达一倍多.

在多台仪器三次单程联测中也存在类似问题，即把几台仪器的两个不独立成果共 $2n$ 个数值代入白塞耳公式计算测量结果的误差，这同样是不合理的，会低估误差.

现将例二中三台仪器三次单程联测用这种方法计算得到的有关数值列于表 8，将本文第五节中介绍的方法和本节所指出的不合理方法计算出的精度列于表 9.

表 8　　单位：毫伽

仪　器	$\Delta g_{i\cdot 1}$	$\Delta g_{i\cdot 2}$	$\Delta g_{i\cdot 0}$
315	−4.716	−4.743	−4.729
98	−4.842	−4.852	−4.847
122	−4.731	−4.793	−4.762

表 9　　单位：毫伽

$m_{\Delta g}$ / 仪器	本文公式计算结果	不合理公式计算结果
315	±0.029	±0.014
98	±0.012	±0.005
122	±0.069	±0.031
$\delta_{0\cdot 0}$	±0.053	±0.024

八、关于三次以上单程联测的问题

对于三次以上单程的联测，也可以按照第四节的方法，用一条直线来拟合重力仪的零点漂移，组成类似(36)式的误差方程. 此时，方程个数 n 有所增加，例如，对于四次单程，$n=5$，对于五次单程，$n=6$，等等. 再用最小二乘法即可解出联测结果的最或然值及其误差.

应当指出，只有联测时间较短，重力仪零点飘移才能用直线来拟合，在联测时间较长时，也用一条直线来拟合，将会引起较大误差. 因此，对于三次以上单程的联测，可拆成多条以二次单程或三次单程为基本单位的测线，再按第二节中多台仪器多条测线的联测的方法来计算联测结果及其误差.

有时，拆成的测线，不恰好全是三程的或全是二程的. 这时，可以拆成若干条二程的测线和一条三程的测线，例如五次单程可拆成一条二程的测线和一条三程的测线，七次单程可拆成两条二程的测线和一条三程的测线. 现在我们仅对五次单程的情况作一论述. 这

时，可分别用两条直线来拟合这两条测线上重力仪的零点飘移，分别求出两个结果 $\Delta g''_{i.0}$ 和 $\Delta g'''_{i.0}$，再令二程测线的权为 2，三程测线的权为 3，于是五次单程联测结果为

$$\Delta g_{i\cdot 0} = \frac{2\Delta g''_{i.0} + 3\Delta g'''_{i.0}}{2+3}$$

其误差为

$$m_{i\cdot 0} = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{(n-1)[p]}} = \pm\sqrt{\frac{2(\Delta g''_{i.0} - \Delta g_{i\cdot 0})^2 + 3(\Delta g'''_{i.0} - \Delta g_{i\cdot 0})^2}{2+3}}$$

再用 (12) 式和 (24) 式计算总误差 $\delta_{0\cdot 0}$.

九、讨　论

在以上关于重力联测结果精度计算的讨论中，均没有考虑系统误差 σ_4，因此用上述方法算得的误差仅仅是联测过程的传递误差（即联测误差）$\delta_{0\cdot 0}$，而不是联测结果的误差 M. 实际上，联测结果中是包含有系统误差 σ_4 的，因此联测结果的误差应为:

$$M = \pm\sqrt{\delta_{0\cdot 0}^2 + \sigma_4^2}$$

将 (2) 式代入上式得:

$$M = \pm\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{nk} + \frac{\sigma_2^2}{n} + \frac{\sigma_3^2}{k} + \sigma_4^2}$$

就是上述的(1)式.

系统误差 σ_4 主要是由于两个原因造成. 第一个原因是重力仪的格值有一季节性的变化，这一季节性变化主要是由于温度变化所引起. 第二个原因是重力基线场有误差，这种误差又往往无法真正被了解. 鉴于目前还无法通过实测数据算出系统误差 σ_4，为此必须设法减小这一系统误差. 为了减小由于第一个原因引起的系统差，可对重力仪格值进行温度改正. 为了减小由于第二个原因引起的系统误差，则应在合适的地点建立基线场，并始终在同一基线场标定重力仪格值. 为了积极地解决系统误差的问题，则应在流动重力测量中引进高精度的绝对重力测量，通过高精度绝对重力测量建立重力基线场和重力控制网，这从计量学的角度上来看也是很有意义的，这样可以使流动重力测量的结果与最基本的物理量的计量标准相符合.

参 考 文 献

[1] Ю. Д. Буланже, Формулы для вычисления ошибок гравиметрической связи двух пунктов при многократных измерениях, выполняемых групой гравиметров. *Изв. АН СССР, Сер. Геоф.*, № 7, 755—764, 1956.

[2] 何绍基，重力测量学，117—123，测绘出版社，1957.

[3] П. И. 希洛夫，最小二乘法，汉译本，121—232，测绘出版社，1956.7.

ESTIMATION OF THE ACCURACY OF THE RESULTS OF REPEATED MEASUREMENTS FOR GRAVITY BASE POINTS

Luo Ming-jin　Gu Meng-lin

(Seismological Bureau of Henan Province)

Wang Bao-zhai　Liu Bi-yu

(Geophysical Exploration Brigade, State Seismological Bureau)

Abstract

This work is aimed to discuss the accuracy of the results of repeated measurements for gravity base points now undertaken by a number of seismological research groups in this country. It gives the formulas for calculating the accuracy of gravity measurements along multiple paths with a number of gravimeters, especially, the formulas for the method of "single path and three repetitions" which is now widely used. Certain inadequate ways of estimating the errors, being too low, have also been pointed out.