

# 地震孕育的包体总崩溃理论(一) ——异性介质内嵌椭圆的应力场

蔡乃成 刘文泰  
(厦门地震台) (四川省地震局)

## 摘要

本文推导了二维无限介质内嵌异性介质椭圆的弹性应力场分布。指出 B. T. Brady 在其包体地震理论中的两个错误,即远场双向压力下对剪切断层而言,包体内与椭圆短轴平行的应力不是张应力;而剪切力也不是位置的函数,它不是二次量值,不能忽略。

## 一、引言

L. H. Donnell 推导了异性介质内嵌椭圆在远场应力作用下的应力场公式<sup>[1]</sup>。B. T. Brady 引用该公式做了详细的讨论,从而建立了有名的包体理论。他在其包体理论中有两个观点<sup>[2]</sup>:

1.“实验显示,岩石的剪切破坏实质上是张性破坏。因为包体内的宏观裂隙是由于张应力而增加的,而包体是由产生了岩石裂隙的压力形成的。反过来,包体形成的过程又被包体内的宏观裂隙的增长所加强;这表明,一旦包体内的宏观裂隙长度超过某一临界值时便发生剪切破坏,从而剪切断层的增长可能被最大张应力破坏准则所控制。”他给出的破坏准则为<sup>[2]</sup>:

$$b_{33}\sigma_{1f} + b_{31}\sigma_{3f} = \sigma_t^c$$

其中  $\sigma_{1f}, \sigma_{3f}$  为使包体破坏时远场的两个主应力值,  $b_{33}, b_{31}$  是与内、外介质的弹性系数、椭圆形状和方位等有关的常数;  $\sigma_t^c$  为椭圆破坏时内部平行于短轴的张应力值, 从而给出了破坏的临界张应力值为

$$\sigma_t^c = -T_0 = -\sqrt{\frac{E_0 r_c}{l_c}}$$

其中  $E_0$  为杨氏模量,  $r_c$  为表面能,  $l_c$  为裂隙半长度。这样, 可以看出, 他认为剪切破坏是受包体内与短轴平行的张应力控制的;

2. 在 B. T. Brady 的数学分析中明确指出:“包体内还有一个是位置函数的剪切力, 然而在包体的纵横比(即短、长轴之比)很小时, 它是一个二阶小量, 并可以安全地忽略<sup>[2]22</sup>。”

本文1982年10月25日收到, 1984年1月19日收到修改稿。

B. T. Brady 由上述两个观点出发,详细地分析了椭圆包体内部的应力情况,建立了剪切压力断层实质上是张性破坏的包体理论。本文作者证明,在两个远场主应力为压力的情况下,对剪切断层而言(此处我们指的是远场主应力与椭圆轴的交角为  $\frac{\pi}{4}$  的剪切断层),在其椭圆包体内与椭圆短轴平行的张应力是根本不存在的。此时包体内长轴和短轴方向的应力均是压应力。对非剪切断层(交角不等于  $\frac{\pi}{4}$ )而言,与椭圆短轴平行的张应力很难存在,只是在极苛刻条件下,即在两个远场主应力的比值很大,且主应力与椭圆轴的交角小到一定值时才有可能。另外,椭圆包体内的剪切力不是位置的函数,它在包体内外相等。在包体纵横比很小时,它不是二阶小量,它是与轴向正应力同数量级的量。在一般情况下,尤其是在剪切断层的情况下,它不仅不能忽略,而且是决定应力状态的主要成分。

为此,本文认为,B. T. Brady 在其包体理论中的这两个观点是不对的。下面就此做详细讨论。

## 二、异性介质内嵌椭圆的应力场分布

关于一个异性介质内嵌椭圆在远场应力作用下的弹性应力场解(平面问题),L. H. Donnell 已经给出了<sup>[1]</sup>。但他只给出了两个特殊情况下的解的解析表达式:(1)远场应力为与长轴垂直方向(y 方向)的张力  $\sigma$ [图 1(a)];(2)远场应力为两轴方向的剪切力  $\tau$ [图 1(b)]。他指出,由于椭圆的对称性,用与长轴垂直方向(y 方向)上的远场应力  $\sigma$  的解可以得到与长轴平行方向(x 方向)上的远场应力  $\sigma$  的解,只须将长轴和短轴交换,  $\beta$  用  $\beta + \frac{\pi}{2}$  代替便可以了。从而用应力的迭加原理可以合成出任一远场应力的解。但毕竟公式过繁,L. H. Donnell 只给出了上述可行的办法而未给出一个现成的、明晰的任一远场应力下的解析表达式。这就限制了解的使用。正如后面指出的,椭圆内部应力各处相等的结论便是导出

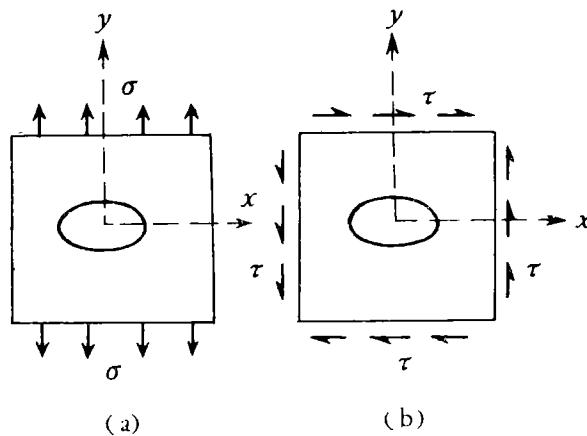


图 1

完整解析表达式之后才得到的。

B. T. Brady 给出了任一远场应力作用下椭圆内部轴向正应力的解析表达式<sup>[2]</sup>。目前尚无一个完全的解析表达式。本文使用复变函数的方法，一次得到内嵌异性介质椭圆在任一远场应力作用下的应力场的表达式。

设二维无穷空间介质内嵌一个异性介质椭圆，椭圆内是剪切模量为  $\mu^i$  的弹性介质，外部为  $\mu^o$  的弹性介质， $\mu^i < \mu^o$ 。在距离椭圆无穷远处作用有主应力  $P_1$  和  $P_2$ 。 $P_1$  和椭圆长轴顺时针夹角为  $\beta$ 。我们称  $P_1$  和  $P_2$  为远场应力，如图 2 所示。

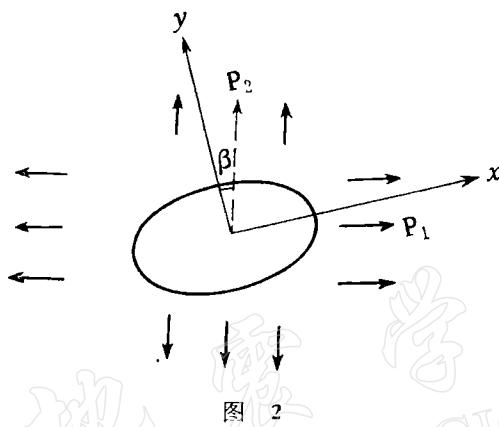


图 2

取椭圆长轴方向为坐标的  $x$  方向，短轴为  $y$  方向，椭圆的中心为坐标原点。取曲线坐标变换

$$Z = ch\zeta$$

其中

$$Z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta$$

则在  $\zeta$  平面上  $\xi = \xi_0$  的直线在  $Z$  平面上便是上述椭圆<sup>[3]</sup>，其长轴  $a$  和短轴  $b$  分别为

$$a = ch\xi_0, \quad b = sh\xi_0$$

短轴与长轴的比  $\alpha$  为

$$\alpha = \frac{b}{a} = \tgh\xi_0$$

其中  $sh$ ,  $ch$ ,  $tgh$  为双曲函数。

根据复变函数解弹性力学问题的方法<sup>[3-5]</sup>，在  $Z$  平面上，只要找到这样一些解析的复变函数  $\phi(Z)$  和  $\chi(Z)$ ，按照公式

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2[\phi'(Z) + \bar{\phi}'(\bar{Z})] \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + i2\sigma_{xy} &= 2[\bar{Z}\phi''(Z) + \chi''(Z)] \\ 2\mu(u_x + iv_y) &= [K\phi(Z) - Z\bar{\phi}'(\bar{Z}) - \bar{\chi}'(\bar{Z})] \end{aligned} \quad (1)$$

求取应力和位移，确定常数使满足边界条件便是问题的解。解是唯一的。对于曲线坐标变换

$$Z = W(\zeta)$$

相应公式为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta} &= 2[\phi'(Z) + \bar{\phi}'(\bar{Z})] \\ \sigma_{\eta\eta} - \sigma_{\xi\xi} + i2\sigma_{\xi\eta} &= 2[\bar{Z}\phi''(Z) + \chi''(Z)] \frac{W'(\zeta)}{\bar{W}'(\zeta)} \\ 2\mu[u_\xi + i\nu_\eta] &= [K\phi(Z) - Z\bar{\phi}'(\bar{Z}) - \bar{\chi}'(\bar{Z})] \frac{\bar{W}'(\zeta)}{|W'(\zeta)|} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

上两式中

$$K = \begin{cases} (3-\nu)/(1+\nu) & \text{平面应力} \\ 3-4\nu & \text{平面应变} \end{cases}$$

式中:  $\mu$  为剪切模量;  $\nu$  为泊松比. 加一横表示取共轭, 两竖夹起表示取模. 函数  $\phi(Z)$  表示  $\phi$  为  $Z$  的函数,  $\phi'(Z)$  是函数  $\phi(Z)$  对  $Z$  求一次微分, 其余类同. 本文取  $W(\zeta) = \operatorname{ch}\zeta$ , 此时有

$$W'(\zeta) = \operatorname{sh}\zeta$$

我们取椭圆外部(加上脚标“ $o$ ”, 下同)和内部(加上脚标“ $i$ ”, 下同)的复变函数为

$$\begin{aligned} \phi^o &= A\operatorname{sh}\zeta + iA_2e^{-\zeta} \sin 2\beta + B\operatorname{ch}\zeta \\ \chi^o &= -A\operatorname{ch}(2\xi_0) \cdot \zeta + iA_2\operatorname{ch}(2\xi_0) \cdot \zeta \cdot \sin 2\beta + C\operatorname{ch}^2\zeta \\ &\quad + iC_2\operatorname{ch}^2\zeta \cdot \sin 2\beta + D[\operatorname{ch}(2\zeta - 2\xi_0) + 2\operatorname{sh}(2\xi_0) \cdot \zeta] \\ &\quad + iD_2[\operatorname{ch}(2\zeta - 2\xi_0) + 2\operatorname{sh}(2\xi_0) \cdot \zeta] \sin 2\beta \quad (3) \\ \phi^i &= G\operatorname{ch}\zeta + iG_2\operatorname{ch}\zeta \sin 2\beta \\ \chi^i &= H\operatorname{ch}^2\zeta + iH_2\operatorname{ch}^2\zeta \sin 2\beta \end{aligned}$$

式中  $A, A_2, B, C, C_2, D, D_2, G, G_2, H, H_2$  为待定的常数. 根据 (2) 式分别计算出椭圆内外的应力及位移, 代入边界条件

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}^o &= \sigma_{\xi\xi}^i \\ \sigma_{\xi\eta}^o &= \sigma_{\xi\eta}^i \Big|_{\xi=\xi_0} \\ u_\xi^o &= u_\xi^i \\ v_\eta^o &= v_\eta^i \Big|_{\xi=\xi_0} \\ \sigma_{\xi\xi} - i\sigma_{\xi\eta} \Big|_{\xi \rightarrow \infty} &= \frac{P_1 + P_2}{2} + \frac{P_1 - P_2}{2} e^{i\pi(\beta+\eta)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

可得到五个等式. 前四个等式两边都是  $\sin \eta$  和  $\cos \eta$  的函数形式, 而要想在  $\xi = \xi_0$  的边界上两边的应力处处相等, 必须在任一个  $\eta$  处都相等, 因而必须所有  $\sin \eta$  及  $\cos \eta$  前的系数相等, 这样可建立八个方程. 最后一个等式分出实部和虚部, 同样地三角函数前系数相等, 加上令左右两边常数相等, 可得三个方程. 这样, 共建立十一个方程, 可解得 (3) 式中十一个待定常数, 从而得应力分布为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}^o &= \sigma_1 + \sigma_2 \\ \sigma_{\xi\eta}^o &= \sigma_1 - \sigma_2 \\ \sigma_{\xi\eta}^i &= [A_2 F_1 \sin 2\beta - A F_2]/Q^2 + F_4/Q \\ \sigma_{\xi\xi}^i &= \sigma_3 + \sigma_4 \\ \sigma_{\xi\eta}^i &= \sigma_3 - \sigma_4 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\xi\eta}^i = [2HF_6 + 2H_2F_5 \sin 2\beta]/Q \\ \sigma_{xx}^i = 2G - 2H \\ \sigma_{yy}^i = 2G + 2H \\ \sigma_{xy}^i = 2H_2 \sin 2\beta \end{array} \right\} \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= [2A \operatorname{sh}(2\xi) - 2A_2 \sin 2\eta \sin 2\beta]/Q + 2B \\ \sigma_2 &= [AF_1 + A_2F_2 \sin 2\beta]/Q^2 + F_3/Q \\ \sigma_3 &= 2G \\ \sigma_4 &= [2H_2F_6 \sin 2\beta - 2HF_5]/Q \end{aligned}$$

而  $F_{1-6}$  及  $Q$  是位置的函数, 其余为常数:

$$\begin{aligned} F_1 &= -2\operatorname{sh}(2\xi)[\operatorname{ch}(2\xi_0) - \cos 2\eta] \\ F_2 &= -2[\operatorname{ch}(2\xi) - \operatorname{ch}(2\xi_0)] \sin 2\eta \\ F_3 &= [-2C\operatorname{ch}(2\xi) - 4D\operatorname{ch}(2\xi - 2\xi_0)] \cos 2\eta + 2C + 4D\operatorname{ch}(2\xi_0) \\ &\quad + [2C_2\operatorname{sh}(2\xi) + 4D_2\operatorname{sh}(2\xi - 2\xi_0)] \sin 2\eta \sin 2\beta \\ F_4 &= [2C\operatorname{sh}(2\xi) + 4D\operatorname{sh}(2\xi - 2\xi_0)] \sin 2\eta - [2C_2 + 4D_2\operatorname{ch}(2\xi_0)] \sin 2\beta \\ &\quad + [2C_2\operatorname{ch}(2\xi) + 4D_2\operatorname{ch}(2\xi - 2\xi_0)] \cos 2\eta \sin 2\beta \\ F_5 &= \operatorname{ch}(2\xi) \cos 2\eta - 1 \\ F_6 &= \operatorname{sh}(2\xi) \sin 2\eta \\ Q &= \operatorname{ch}(2\xi) - \cos 2\eta \\ A &= (1 - \omega e^{2\xi_0})(1 + \Sigma) \frac{P_1 + P_2}{4} + (1 - \omega e^{2\xi_0})(\Sigma_1 - 1) e^{2\xi_0} \cos 2\beta \frac{P_1 - P_2}{4} \\ B &= [\omega e^{2\xi_0} - (1 - \omega e^{2\xi_0})\Sigma] \frac{P_1 + P_2}{4} - [(1 - \omega e^{2\xi_0})(\Sigma_1 - 1) e^{2\xi_0} \cos 2\beta] \frac{P_1 - P_2}{4} \\ C &= \omega(1 + \Sigma) \frac{P_1 + P_2}{4} + \omega(\Sigma_1 - 1) e^{2\xi_0} \cos 2\beta \frac{P_1 - P_2}{4} \\ 2D &= -\omega(1 + \Sigma) e^{2\xi_0} \frac{P_1 + P_2}{4} - [(1 - \omega e^{2\xi_0}) + \omega \Sigma_1 e^{2\xi_0}] e^{2\xi_0} \cos 2\beta \frac{P_1 - P_2}{4} \\ G &= -\Sigma \frac{P_1 + P_2}{4} - \Sigma_1 e^{2\xi_0} \cos 2\beta \frac{P_1 - P_2}{4} \\ H &= \omega(1 + \Sigma) \frac{P_1 + P_2}{4} + \omega(\Sigma_1 - 1) e^{2\xi_0} \cos 2\beta \frac{P_1 - P_2}{4} \\ A_2 &= -4\alpha(1 - \delta)\omega_1 \frac{P_1 - P_2}{4} \\ C_2 &= -(1 - \alpha^2)[2 + \delta(K^o - 1)] \omega_1 \frac{P_1 - P_2}{4} \\ 2D_2 &= 2(1 - \delta)(1 + \alpha^2)\omega_1 \frac{P_1 - P_2}{4} \\ G_2 &= 2\delta(1 - \delta)(1 - \alpha)^2 \omega_1 \frac{(K^o + 1)}{(K^i + 1)} \cdot \frac{P_1 - P_2}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_2 &= -\delta(K^o + 1)(1 - \alpha^2)\omega_1 \frac{P_1 - P_2}{4} \\
 \omega_1 &= (1 + \alpha)^2 / \{(1 - \alpha^2)[(1 + \alpha)^2(2 + \delta(K^o - 1)) - 2(1 - \delta)(1 + \alpha^2)]\} \\
 \omega &= \delta(K^o + 1)(1 - \alpha^2) / [\delta(K^o + 1)(1 + \alpha)^2 + 4\alpha(1 - \delta)] \\
 \Sigma &= \gamma\omega / [\delta(K^o - 1) - (K^i - 1) - \gamma\omega] \\
 \Sigma_1 &= [\delta(K^o + 1) - \gamma\omega] / [\delta(K^o - 1) - (K^i - 1) - \gamma\omega] \\
 \gamma &= [\delta(K^o + 1)(1 + \alpha)^2 + 2(1 - \delta)(1 + \alpha^2)] / (1 - \alpha^2) \\
 \delta &= \mu^i / \mu^o
 \end{aligned} \tag{6}$$

$\mu^i, \mu^o$  分别为椭圆内部和外部介质的剪切弹性模量。

这样便得到了任一远场应力作用下应力分布的完整简单的解析表达式。

取  $\beta = 0, P_1 = 0, P_2 = \sigma$ , 经化简可以得到与 L. H. Donnell 一致的结果。取  $\delta = 0$  可得椭圆孔时的应力分布。

将常数  $G, H$  代入式(5)中的  $\sigma_{yy}^i$ , 得

$$\begin{aligned}
 \sigma_{yy}^i &= \frac{1}{2} \{[\omega + (\omega - 1)\Sigma] + [-\omega + (\omega - 1)\Sigma_1]e^{2\xi_0} \cos 2\beta\}P_1 \\
 &\quad + \frac{1}{2} \{[\omega + (\omega - 1)\Sigma] - [-\omega + (\omega - 1)\Sigma_1]e^{2\xi_0} \cos 2\beta\}P_2
 \end{aligned} \tag{7}$$

取  $K^o = K^i = 2$ , 并注意到

$$e^{2\xi_0} = (1 + \alpha) / (1 - \alpha) = (1 + \alpha)^2 / (1 - \alpha^2)$$

得

$$\begin{aligned}
 \sigma_{yy}^i &= \sigma_t = \left[ \frac{1}{2} (a_{31} + a_{33}) + \frac{1}{2} (a_{31} - a_{33}) \cos 2\beta \right] P_1 \\
 &\quad + \left[ \frac{1}{2} (a_{31} + a_{33}) - \frac{1}{2} (a_{31} - a_{33}) \cos 2\beta \right] P_2 \\
 &= b_{33}P_1 + b_{31}P_2
 \end{aligned} \tag{8}$$

其中取  $\sigma_t, b_{33}, b_{31}$  与 B. T. Brady 的符号相同<sup>[2]</sup>, 而

$$\begin{aligned}
 a_{31} &= -3\delta\alpha(1 - \delta)(1 - \alpha) / D_1 \\
 a_{33} &= 3\delta[(5\delta + 1)\alpha + 3(1 + \delta\alpha^2)] / D_1 \\
 D_1 &= 9\delta(1 + \alpha^2) + 2\alpha(2 - \delta + 8\delta^2)
 \end{aligned} \tag{9}$$

(8), (9)两式与 B. T. Brady 的结果一致<sup>[2]</sup>。可见, B. T. Brady 给出的轴向正应力的表达式是在  $K^o = K^i = 2$  的特殊情况下的表达式。

### 三、椭圆内短轴方向张应力问题的讨论

1. 在剪切断层的情况下。在这里, 我们将剪切断层理解为断层走向与远场主应力的交角为  $45^\circ$  的断层。本文在用椭圆来模拟断层时, 取  $\beta = \frac{\pi}{4}$ , 由式(7), 此时

$$\sigma_{yy}^i \Big|_{\beta=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} [\omega + (\omega - 1)\Sigma](P_1 + P_2)$$

由式(6), 因为  $\alpha < 1$ ,  $\delta < 1$ ,  $K^i > 1$ ,  $K^o > 1$ , 所以  $0 \leq \omega \leq 1$ ,  $\Sigma < 0$ . 也就是  $[\omega + (\omega - 1)\Sigma] > 0$

那么,  $\sigma_{yy}^i$  与  $(P_1 + P_2)$  同号.

用与 B. T. Brady 给出的一样的公式(8), 此时

$$\sigma_t = \frac{1}{2} (a_{31} + a_{33})(P_1 + P_2),$$

而由式(9)知,  $a_{31} < 0$ ,  $a_{33} > 0$ ,  $|a_{31}| < a_{33}$ , 所以  $(a_{31} + a_{33}) > 0$ , 也有  $\sigma_t$  与  $(P_1 + P_2)$  同号的结论.

这样, 在  $\beta = \frac{\pi}{4}$  的剪切断层的情况下, 椭圆包体内部与短轴平行方向的应力与远场主应力之和同号. 只要  $P_1$  与  $P_2$  均是压应力, 则  $\sigma_t$  也为压应力, 不会出现张应力, 除非  $P_1 + P_2$  为张性应力的情况, 或  $P_1$ 、 $P_2$  中有一个为张应力, 一个为压应力, 而且张应力大于压应力. 而这种情况又绝非 B. T. Brady 所讨论的情况, 因 B. T. Brady 已声言, 施加张应力及张-压应力的岩石样品的破坏, 不予考虑.

2. 一般情况 ( $\beta \neq \frac{\pi}{4}$ ) 下的应力情况. 由公式(7)可见,  $\sigma_{yy}^i$  的值与远场应力  $P_1$ 、 $P_2$  及其作用方向  $\beta$  有关, 又与一些常数  $\omega$ ,  $\Sigma$  等有关. 但可以看出,  $\sigma_{yy}^i$  是  $P_1$ 、 $P_2$  及  $\cos 2\beta$  的线性显函数, 因而在常数给定的条件下,  $\sigma_{yy}^i$  是否为张性的关键, 一个是  $\beta$ , 一个是  $P_1$  与  $P_2$  的关系. 在 B. T. Brady 特指的双向压力下,  $P_1$  与  $P_2$  的关系可简化为一个比例常数

$$k = P_1/P_2$$

的关系. 下面讨论  $\beta$  与  $k$  的关系. 因为 B. T. Brady 给出的公式为  $K^o = K^i = 2$  的情况, 所以只用(8)式来讨论.

由式(8), 取压力为正, 要使  $\sigma_{yy}^i$  为张性 即  $\sigma_{yy}^i < 0$ , 必须

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{2} (a_{31} + a_{33}) + \frac{1}{2} (a_{31} - a_{33}) \cos 2\beta \right] P_1 \\ & + \left[ \frac{1}{2} (a_{31} + a_{33}) - \frac{1}{2} (a_{31} - a_{33}) \cos 2\beta \right] P_2 < 0 \end{aligned}$$

令

$$\tau = \frac{-|a_{31}| + a_{33}}{|a_{31}| + a_{33}} \quad 0 \leq \tau \leq 1$$

则有  $\sigma_{yy}^i$  为张性的条件

$$k > \frac{\cos 2\beta + \tau}{\cos 2\beta - \tau} \quad \left( \beta < \frac{\pi}{4} \right)$$

即在一定的  $\beta$  下 ( $\beta < \frac{\pi}{4}$ ), 只有  $k = P_1/P_2$  大到一定程度时才出现张应力. 取其临界值为  $k_c$ , 则

$$k_c = \frac{\cos 2\beta + \tau}{\cos 2\beta - \tau} \quad (10)$$

另外, 分析(10)式知, 由于  $\tau$  是与介质常数及椭圆形状有关的一个正数,  $k$  也是一个正数, 所以不是在任一个  $\beta$  下增大  $k$  值便可出现张应力的, 或者说, 在一定的  $k$  值下, 不是任一

角度  $\beta$  均可以出现张应力的。只在  $\beta$  小到一定角度（取为临界角  $\beta_c$ ）时才能出现张应力，其临界角为

$$\cos 2\beta_c = \frac{k+1}{k-1} \tau$$

当  $k \rightarrow \infty$  时，有

$$\cos 2\beta_c|_{k \rightarrow \infty} = \tau$$

即当介质常数和椭圆形状一定时，有一个极限临界角，当远场主应力与椭圆长轴的交角大于此角时，无论  $k$  值取多大，也不会出现张应力。

当  $\beta > \frac{\pi}{4}$  时，由于对称性，实际上这相当于  $P_1$  与  $P_2$  对调时  $\beta < \frac{\pi}{4}$  的情况，故无须再讨论。

(10) 式对  $\beta$  偏微分，得

$$\frac{\partial k_c}{\partial \beta} = \frac{4\tau \sin 2\beta}{(\cos 2\beta - \tau)^2} > 0 \quad \left( \beta < \frac{\pi}{4} \right) \quad (11)$$

即在  $\beta < \frac{\pi}{4}$  的一定范围内， $k_c$  随着  $\beta$  的增加而增加， $\beta$  越大， $k_c$  越大，即  $\beta$  越大越不容易出现张应力。最容易出现张应力的情况是  $\beta = 0$ ，即远场最大主压应力平行于椭圆长轴的情况，这与物理概念是一致的。

关于短轴方向张应力的出现与椭圆短长轴之比  $\alpha$  的关系比较复杂，不易直接分析。但从两种极限情况，即  $\alpha = 0$  和  $\alpha = 1$  来分析，可知它们都不符合  $k > 0$  的假设，就是说，这两种情况都不会出现张应力。所以在  $0 < \alpha < 1$  之间至少存在一个拐点，在拐点两侧  $\alpha$  的变化对张应力出现的难易影响是相反的。

取  $K^o = K^i = 2$  计算了不同的  $2\beta$ 、 $\alpha$  与  $k_c$  的关系及极限临界角示于表 1 及图 3，计算中均取  $\delta = 0.2$ 。可以看出， $k_c$  随  $2\beta$  的变化与上述分析是一致的。在图表的取值下， $\alpha$  与出现张应力的极限临界角  $\beta_c$  的关系是， $\alpha$  在小于 0.4 时， $\alpha$  越小， $2\beta_c$  也越小，即越不容易出现张应力； $\alpha$  在大于 0.4 时， $\alpha$  越大越不容易出现张应力。拐点约在 0.4 左右。而出现张应力的极限临界角又都在 13 度以内， $k_c$  的取值在几十至几千之间。可见，在一般

表 1-1

$\alpha$	0.01	0.04	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95
$\beta_c$	2.9	5.7	8.5	10.9	12.1	12.5	12.4	11.8	10.7	9.1	6.6	4.8

表 1-2

2 $\beta$ (度)		0	3	5	8	10	13	15	18	20	极限临界角(度)
$k_c$	$\alpha = 0.2$	26.0	27.2	28.2	30.8	33.6	40.9	49.8	81.1	158.4	10.9
	$\alpha = 0.1$	44.6	46.0	48.7	57.0	67.6	105.7	195.6			8.5
	$\alpha = 0.04$	101.0	107.4	123.6	195.7	426.4					5.7
	$\alpha = 0.01$	383.6	520.5	1427.5							2.9

情况下要使  $\sigma_{xy}^i$  为张力的条件是很苛刻的。它要求两个主压应力的比值很大，而且主应力与椭圆轴的交角很小。即使极限临界角也很小的。

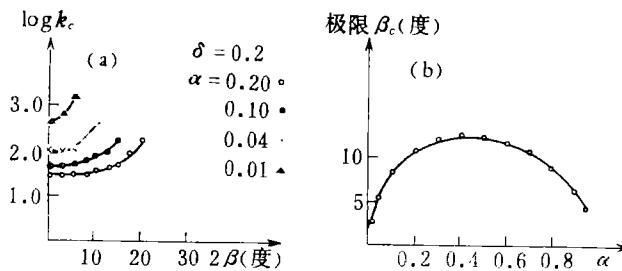


图 3  $k_c$  与  $\beta$  的关系(a)及极限临界角与  $\alpha$  的关系(b)

Fig. 3 The relationships between  $k_c$  and  $\beta$  (a); The relationships between limit critical angle and  $\alpha$  (b)

#### 四、关于椭圆两轴方向的剪应力问题

从本文推导的公式(5)中可以看出，椭圆包体内除了与轴向平行的正应力外，还有一个剪切力。B. T. Brady 认为它是一个位置的函数，当椭圆纵横比很小时可以安全地忽略。这个结论也是错误的。

B. T. Brady 没有给出这一剪切力的表达式而认为可以忽略。从本文公式(5)、(6)可见，它为

$$\sigma_{xy}^i = 2H_2 \sin 2\beta = \frac{-\delta(K^o + 1)(1 - \alpha^2) \sin 2\beta}{(1 - \alpha^2)[2 + \delta(K^o - 1)] - 2(1 - \delta)(1 + \alpha^2)e^{-\lambda\xi_0}} \cdot \frac{P_1 - P_2}{2} \quad (12)$$

是与  $\delta$ ， $\alpha$ ， $K^o$ ， $K'$ ， $\beta$  及  $P_1$ ， $P_2$  有关的常数，不是位置的函数。它是一个在椭圆体内处处相等的量。根据式(5)， $\sigma_{xx}^i$ ， $\sigma_{yy}^i$  也是一个处处相等的量，从而可以得出结论，椭圆包体内的应力是处处相等的。

$\sigma_{xy}^i$  与椭圆纵横比  $\alpha$  的关系不是一个线性关系。当  $\alpha$  很小，取其为零时

$$\sigma_{xy}^i|_{\alpha=0} = -\sin 2\beta \frac{P_1 - P_2}{2}$$

它不是一个二阶小量。所以当  $\alpha$  很小时  $\sigma_{xy}^i$  可以忽略的说法是错误的。但它是  $\sin 2\beta$  的线性函数，它只有在  $\beta$  很小时才能忽略，当  $\beta = \frac{\pi}{4}$  为剪切断层时它是不能忽略的。

还可以利用 L. H. Donnell 的公式来检验此点。为了避免过繁推导，我们不妨将文献[1]中的(25)式求取  $\alpha = \alpha'_0$ ， $\beta = 0$  的一点的剪切力与本文公式对比，在此点上它应与本文  $\sigma_{xy}^i$  一致。将该文中  $P = 2$ ， $\alpha = \frac{1}{r}$  代入(25)式，求出剪切力的表达式为

$$\tau' = \frac{3K\tau}{3K + 4\alpha(1 - K)/(1 + \alpha)^2} \quad (13)$$

此处的  $K'\tau$  系文献[1]中使用的符号， $K$  相当于本文的  $\delta$ 。而将

$$K^o = 2, \quad e^{-2\xi_0} = \frac{1 - \alpha^2}{(1 + \alpha)^2}$$

代入本文式 (12), 并令

$$P_1 = -P_2 = -\tau, \quad \beta = \frac{\pi}{4},$$

得与(13)式一样的结果. 取  $\alpha = 0$  得与(12)式一样的结论, 即椭圆内部的剪切力是不能忽略的, 尤其是远场应力与椭圆轴交角为  $\frac{\pi}{4}$  时更不能忽略.

就是用 B. T. Brady 给出的公式来分析<sup>[2]</sup>, 当  $\beta = \frac{\pi}{4}$ ,  $\sigma_{10} = -\sigma_{30}$  即纯剪切时,  $\sigma_c = \sigma_s = 0$ , 如果此时剪切力“忽略”, 则包体处于不受力状态. 这是不可能的, 也就说明忽略是不对的.

既然这一剪切力不能忽略, 那么主应力就不再是在椭圆两轴的方向上了, 有时它将极大地偏离椭圆的两个轴, 而两个主应力的值与  $\sigma_{xx}^i, \sigma_{yy}^i$  相差甚远. 仅仅分析椭圆两轴方向的正应力来讨论问题的方法也就是错误的了.

关于岩石是如何破坏的, 留待本文第二部分讨论.

刘栋勋、邓素珍为本文做了很多工作, 谨表谢忱.

### 参 考 文 献

- [1] Donnell, L. H., Stress concentrations due to elliptical discontinuities in plates under edge forces, Theodore V. Karman Anniversary Volume, California Institute of Technology, Pasadena, Calif., 293—309, 1941.
- [2] Brady, B. T., Theory of earthquakes, I, A scale Independent theory of rock failure, *Pure Appl. Geophys.* **112**, 4, 1974.
- [3] Мусхелишвили, Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, АН СССР, 1954. (数学弹性力学的几个基本问题, 赵惠元译, 科学出版社, 1958).
- [4] Knott, J. F., Fundamental of fracture mechanics, Chapter 3, London Butterworths, 1973.
- [5] Jaeger, J. C., Elasticity, fracture and flow with engineering and geological applications, John Wiley and Sons, New York, 1964.

# THEORY OF COMPLETE FAILURE OF INCLUSION MATERIAL AT THE EARTHQUAKE SOURCE(1)—STRESS DISTRIBU- TION OF AN ELLIPTICAL INCLUSION OF DIFFERENT METERIAL

CAI NAICHENG

(Xiamen Seismic Station)

LIU WENTAI

(Seismological Bureau of Sichuan Province)

## Abstract

For a two-dimensional infinite medium containing an elliptical inclusion of different material, elastic stress distribution formulas are derived. It is pointed out that in the inclusion theory of B.T. Brady there are two errors, namely, (1) the stress component parallel to the minor axis within the elliptical inclusion is not a tensile stress, under far field compression in two directions; (2) shear stress within the inclusion is neither a function of position nor a second order quantity and thus can not be neglected.