

# 球层中的非线性自由热对流 ——变粘度模型\*

朱 涛<sup>1, 2)</sup> 冯 锐<sup>1)</sup>

1) 中国北京 100081 中国地震局地球物理研究所

2) 中国兰州 730000 中国地震局兰州地震研究所

**摘要** 粘度为常数或仅随深度变化是地幔对流模型中常用的假设. 本文在常粘度背景下, 通过假定小扰动粘度在纬向上的变化形式, 将粘度的横向变化引入地幔对流模型中, 并给出了变粘度地幔对流模型的数值解法. 对外边界为刚性、内边界为应力自由(简记为 R-F 边界)和内外边界均为刚性(简记为 R-R 边界)边界的两种模型进行了计算, 对比了不同模型、深度和瑞利数时的环型场的变化特征. 注意到环型场能量主要集中在球层的中、上部区域, 其速度仅占总速度的几个百分点, 这个比例几乎不随瑞利数的变化而改变, 但其对流图样受瑞利数的影响较大. 环型场的对流形态和速度的分布特征表现出了明显的纬向差异, 这一结果清晰地反映出地幔粘度的横向变化对对流形态的影响. 目前的工作还只是初步的, 但为我们探讨全球大地构造上的某些现象, 例如南北半球的不对称性和差速旋转问题提供了一种可能的研究思路.

**关键词** 变粘度 自由热对流 环型场分量  
**中图分类号**: P314.2, P541 **文献标识码**: A

## 引言

地表板块的运动成分中包含着极型分量和环型分量. 板块的聚敛和离散运动是地幔对流的极型分量的典型表现, 而板块的走滑运动则是环型分量的典型表现, 二者是耦合在一起的, 它们完整地描述了板块的运动特征. 极型分量的产生机制已经相当清楚了, 它是与地幔内部横向密度差异联系着的地幔流动的直接产物, 而激发环型分量的机制还不太清楚. 虽然一些研究(O'Connell *et al*, 1991; Olson, Bercovici, 1991; Richard, Vigny, 1989; 叶正仁, 朱日祥, 1996; Gable *et al*, 1991)已经用运动学和动力学模型对激发环型分量的机制进行了重要探讨, 但由于板块边界处的应力奇点导致施加于旋转板块上的力矩趋于无穷, 使模型的力学条件不能自恰. Christensen 和 Harder(1991)提出了一种用动力学自恰的方法来研究极型分量和环型分量之间的相互耦合, 他们将横向粘度变化用于地幔对流的模型中, 用有限元方法对直角坐标系中的变粘度 3-D 热对流问题进行了详细研究, 获得了较小的环型场分量. 后来, 在 Ribe(1992)的研究中, 假设地幔粘度仅随深度变化, 而对上覆的岩石圈赋予了大幅度的粘度横向变化量, 据此获得了较大的环型分量. 不过, 二者

\* 国家自然科学基金重点项目(49834020)资助. 中国地震局地球物理研究所论著 05AC1011.  
2003-12-05 收到初稿, 2004-08-27 收到修改稿并决定采用.

均没有研究环型场的对流形态及其动力学意义. 问题显然远未解决, 因为 Ribe(1992)模型中的岩石圈粘度横向变化幅度过大, 脱离了真实地球的允许范围, 而地震波的三维图象已经揭示了地幔的强烈横向非均匀性. 鉴于地球圈层质量中心的偏差, 南北半球热流和形状的不对称性, 以及种种地球差速旋转运动现象的存在(马宗晋等, 2001; 杨学祥, 1998; 吴珍汉, 1997; Clayton, Comer, 1983), 并且叶正仁和王健(2003)基于二维模型的有限元模拟研究上地幔-岩石圈系统的变粘度小尺度对流的结果表明, 地表热流、地形起伏和重力异常与对流格局有较好的相关性, 这些启示我们, 地幔粘度的横向变化还是需要认真考虑的. 其困难在于如何将变粘度项引入到非线性微分方程中, 方程的求解如何实施. 当然, 在引入这项影响因素之后会得到什么对流形态, 以及潜在的动力学意义, 会更令人关注.

本文假定地幔粘度在常粘度的背景上存在一个微扰, 其扰动量仅随纬度变化, 由此发展了变粘度地幔对流模型, 并提出了求解方法. 文中主要研究了内外边界均为齐次边界(R-F 和 R-R 边界)的球层中横向变化的粘度所激发的环型分量的大小, 特别研究了瑞利数、深度和横向变化粘度的剧烈程度对环型场的对流形态的影响. 结果表明, 在小粘度扰动情形下, 环型场速度仅占总速度的几个百分点, 其能量主要集中在球层的中、上部区域. 环型场的对流形态对瑞利数较敏感, 但对深度和表征粘度扰动程度的系数  $C_1$  不敏感. 特别有趣的是, 环型场的对流形态和速度分布表现出明显的纬向差异特征, 可能为研究某些全球构造问题提供一种科学思路.

## 1 基本公式

### 1.1 基本方程

考虑内径为  $R_1$ 、外径为  $R_2$  的充满了不可压缩的牛顿流体的同心球层, 纯粹从球层底部加热, 采用 Boussinesq 近似, 并取流体的普朗特数无限大( $Pr = \nu/\kappa$ ,  $\nu$  为运动学粘度;  $\kappa$  是热扩散系数. 地球地幔的普朗特数约为  $10^{23}$ ). 对于流体粘度不为常数的一般情况, 方程的建立和求解均较困难. 但对于常粘度小扰动模型, 则可以在流体平均粘度  $\eta_0$  的基础上加上一个小扰动量来描述. 于是在球坐标系  $(r, \theta, \varphi)$  中, 控制流体运动的无量纲方程便为(参考 Christensen, Harder, 1991)

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1a)$$

$$-\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij} + Ra \tilde{T} \hat{\mathbf{r}} = 0 \quad (1b)$$

$$\partial_t \tilde{T} + \mathbf{u} \cdot \nabla (T_c + \tilde{T}) = \nabla^2 \tilde{T} \quad (1c)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{ij} = \eta \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{ij} \quad (1d)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{ij} = \partial_j u_i + \partial_i u_j \quad (1e)$$

$$\eta = 1 + \tilde{\eta} \quad (1f)$$

在公式(1a)~(1f)中, 采用了无量纲化因子  $d = R_2 - R_1$ ,  $\kappa/d$ ,  $d^2/\kappa$ ,  $\Delta T = T_1 - T_2$  和  $\eta_0$  (流体平均粘度) 分别对半径  $r$ 、速度  $\mathbf{u}$ 、时间  $t$ 、温度和粘度进行了无量纲化. 其中,  $T_1$  和  $T_2$  分别为内径  $R_1$ 、外径  $R_2$  处的恒定温度,  $T_1 > T_2$ ;  $P$  为压力;  $T_c$  是无对流运动时的温度场, 仅是径向  $r$  的函数, 满足热传导方程  $\nabla^2 T_c = 0$ ;  $\tilde{T}$  为扰动温度, 即由对流运动引起的相对无对流状态时的温度场的偏离;  $\hat{\mathbf{r}}$  是径向上的单位矢量;  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{ij}$  为应变率;  $\boldsymbol{\tau}_{ij}$  为偏应力;  $\eta$  是流体粘度;  $\tilde{\eta}$  为扰动粘度.  $Ra$  是瑞利数, 定义为

$$Ra = \frac{\alpha \rho_0 g \Delta T d^3}{\eta_0 \kappa} \tag{2}$$

其中,  $\alpha$ ,  $\rho_0$  和  $g$  分别为热膨胀系数、流体平均密度和重力加速度.

根据 Buckus(1958)结果, 可将速度场  $\mathbf{u}$  分解为标量极型场  $\Phi$  和环型场  $\psi$ . 用它们表示的速度场三分量, 即径向分量  $u_r$ 、南北分量  $u_\theta$  和东西分量  $u_\varphi$  为

$$u_r = \frac{1}{r} \Lambda^2 \Phi \tag{3a}$$

$$u_\theta = - \left( \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \tag{3b}$$

$$u_\varphi = - \left( \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \tag{3c}$$

其中,  $\Lambda = \mathbf{r} \times \nabla$ ,  $\Lambda^2 = \Lambda \cdot \Lambda = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ ,  $\mathbf{r}$  为长度为  $r$  的径向向量.  $r$  为半径,  $\theta$  为余纬度,  $\varphi$  为经度.

本文仅研究齐次边界, 即 R-F 和 R-R 两种边界的情形, 可用标量极型场  $\Phi$  和环型场  $\psi$  表示为

$$\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = 0 \quad \tilde{T} = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad (\text{自由边界}) \tag{4a}$$

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad \tilde{T} = 0 \quad \psi = 0 \quad (\text{刚性边界}) \tag{4b}$$

由式(1e)可获得各应变率分量的表达式(Zhang, Christensen, 1993)

$$\dot{\epsilon}_{rr} = 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} \tag{5a}$$

$$\dot{\epsilon}_{\theta\theta} = 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \tag{5b}$$

$$\dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} = 2 \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r} \right) \tag{5c}$$

$$\dot{\epsilon}_{r\theta} = r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \tag{5d}$$

$$\dot{\epsilon}_{r\varphi} = r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\varphi}{r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \tag{5e}$$

$$\dot{\epsilon}_{\theta\varphi} = \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u_\varphi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \tag{5f}$$

### 1.2 计算公式

对式(1b)两端分别施加运算  $(\mathbf{r} \cdot \nabla \times)$  和  $(\Lambda \cdot \nabla \times)$ , 并利用小粘度扰动的假设, 便得到关于环型场  $\psi$  和极型场  $\Phi$  表达式

$$\nabla^2 \Lambda^2 \psi = Q(A_{\theta, \varphi}) \tag{6a}$$

$$\nabla^4 \Lambda^2 \Phi = - \frac{Ra \Lambda^2 \tilde{T}}{r} + Q(B_{\theta, \varphi}) \tag{6b}$$

其中

$$Q(A_{\theta, \varphi}) = - \frac{1}{\sin \theta} \left( \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \cos \theta A_\varphi \right) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} \tag{6c}$$

$$Q(B_{\theta, \varphi}) = -\frac{1}{\sin\theta} \left[ \frac{\partial B_{\theta}}{\partial \varphi} - \cos\theta B_{\varphi} \right] + \frac{\partial B_{\varphi}}{\partial \theta} \quad (6d)$$

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_{\theta} \\ A_{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial r} \epsilon_{rr} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \theta} \epsilon_{r\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \varphi} \epsilon_{r\varphi} \\ \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial r} \epsilon_{r\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \theta} \epsilon_{\theta\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \varphi} \epsilon_{\theta\varphi} \\ \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial r} \epsilon_{r\varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \theta} \epsilon_{\theta\varphi} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \varphi} \epsilon_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \quad (6e)$$

$$\begin{pmatrix} B_r \\ B_{\theta} \\ B_{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin\theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta A_{\varphi}) - \frac{\partial A_{\theta}}{\partial \varphi} \right] \\ \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_{\varphi})}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_{\theta})}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad (6f)$$

式(6)清楚地表达了环型场产生的机制及其与极型场的耦合关系. 如果粘度为常数, 则变粘度贡献项  $Q(A_{\theta, \varphi}) = Q(B_{\theta, \varphi}) = 0$ , 式(6a)中就不存在激发环型场的源项. 对于自由热对流(齐次边界)的情形, 环型场为0, 仅存在由式(6b)右端的浮力源  $-Ra \Lambda^2 \tilde{T}/r$  产生的极型场. 显然, 极型场与环型场之间不存在耦合作用.

当粘度存在横向变化时, 由于  $Q(A_{\theta, \varphi})$  和  $Q(B_{\theta, \varphi})$  的存在, 所以它不但激发了环型场, 而且还同浮力源一起共同激发了极型场, 并且它们通过剪切应力张量(见式(1d)和式(5))发生耦合: 在小扰动粘度下, 首先由浮力源激发出极型场, 然后它和横向变化的粘度一起产生源  $Q(A_{\theta, \varphi})$ , 从而激发出环型场. 在不失粘度横向变化的动力学意义下, 可以假定粘度扰动具有如下的随余纬度变化的形式:

$$\tilde{\eta} = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos n\theta + S_n \sin n\theta) \quad (7)$$

其中,  $C_n$  和  $S_n$  为给定或已知的系数. 无量纲粘度扰动  $\tilde{\eta} \ll 1$ . 若取基阶即主要部分进行计算, 此时  $\tilde{\eta} = C_1 \cos\theta$ . 结合式(6)得

$$\nabla^2 \Lambda^2 \psi = \frac{C_1}{r} \left[ \frac{\partial \dot{\epsilon}_{\theta\theta}}{\partial \varphi} - \left( 2\cos\theta + \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \dot{\epsilon}_{\theta\varphi} \right] \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} \nabla^4 \Lambda^2 \Phi = & -\frac{Ra \Lambda^2 \tilde{T}}{r} + \frac{C_1}{r} \left[ \frac{\Lambda^2 (\sin\dot{\epsilon}_{r\theta})}{r} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial (\sin\dot{\epsilon}_{\theta\theta})}{\partial \theta} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial (\sin\dot{\epsilon}_{\theta\varphi})}{\partial \varphi} \right) - \cot\theta \frac{\partial (\sin\dot{\epsilon}_{\theta\theta})}{\partial r} \right] \end{aligned} \quad (8b)$$

至此, 我们给出了求解扰动粘度仅随纬度变化下的极型场和环型场的完备方程组, 边界条件为式(4). 可以看出, 对于小粘度扰动, 式(8b)中因粘度横向变化而出现的激发极型场的源(右端第二项)比浮力源(右端第一项)要小得多, 特别是在瑞利数极高的情形中, 粘度扰动的作用可能甚微, 但它却间接地影响了极型场和温度场的分布特征并反馈了它们的信息(Christensen, Harder, 1991). 相比之下, 式(8a)中的右端的源项对环型场的影响是直接而重大的, 尽管其能量占总能量的比例是较小的. 这是与常粘度模型(傅容珊, 1990; 叶正仁等, 1995; 朱涛, 冯锐, 2004)的根本不同之处.

### 1.3 方程求解

将极型场  $\Phi$ 、环型场  $\psi$  以及温度扰动场  $\tilde{T}$  进行球谐展开

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l [\psi_{al}^m \cos m\varphi + \psi_{bl}^m \sin m\varphi] P_l^m(\cos\theta) \quad (9a)$$

$$\Phi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l [\Phi_{al}^m \cos m\varphi + \Phi_{bl}^m \sin m\varphi] P_l^m(\cos\theta) \quad (9b)$$

$$\tilde{T} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l [\tilde{T}_{al}^m \cos m\varphi + \tilde{T}_{bl}^m \sin m\varphi] P_l^m(\cos\theta) \quad (9c)$$

其中,  $P_l^m(\cos\theta)$  为全面正规化的  $l$  阶  $m$  次的缔合勒让德函数, 其正规化因子为

$$N_l^m = \sqrt{\frac{(2 - \delta_{m,0})(2l+1)(l-m)!}{(l+m)!}} \quad (10)$$

将式(9a)和(9b)带入(8a), 结合式(5b)、(5f)和(3), 并记算子

$$D_l = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}$$

经推导可得

$$D_l \psi_{al}^m = G_{1l}^m - H_{1l}^m \psi_{al}^m \quad D_l \psi_{bl}^m = G_{2l}^m - H_{2l}^m \psi_{bl}^m \quad (11)$$

其中

$$G_{1l}^m = \frac{-C_1}{l(l+1)r^2} \left[ -m \left( \frac{1}{r} + \frac{d}{dr} \right) \Phi_{bl}^m (2\Gamma_{1l}^{m^2} - \Gamma_{l \ 2l}^m \Gamma_{3l}^m - \Gamma_{l \ 1l}^m \Gamma_{2l}^m) - \frac{2ml(l+1)}{r} \Phi_{bl}^m \right] \quad (12a)$$

$$G_{2l}^m = \frac{-C_1}{l(l+1)r^2} \left[ m \left( \frac{1}{r} + \frac{d}{dr} \right) \Phi_{al}^m (2\Gamma_{1l}^{m^2} - \Gamma_{l \ 2l}^m \Gamma_{3l}^m - \Gamma_{l \ 1l}^m \Gamma_{2l}^m) + \frac{2ml(l+1)}{r} \Phi_{al}^m \right] \quad (12b)$$

$$H_{1l}^m = \frac{-C_1}{l(l+1)r^2} (2m^2 \Gamma_{1l}^m \Gamma_{2l}^m - \Gamma_{l \ 1l}^m \Gamma_{1l}^m \Gamma_{3l}^m - m^2 \Gamma_{l \ 1l}^m \Gamma_{2l}^{m^2}) \quad (12c)$$

$$\Gamma_{1l}^m = \int_0^\pi \left( 2\cos\theta P_l^m + \sin\theta \frac{dP_l^m}{d\theta} \right) P_l^m \sin\theta d\theta \quad (12d)$$

$$\Gamma_{1l}^m = \int_0^\pi \frac{dP_l^m}{d\theta} P_l^m \sin\theta d\theta \quad (12e)$$

$$\Gamma_{2l}^m = \int_0^\pi P_l^m P_l^m d\theta \quad (12f)$$

$$\Gamma_{3l}^m = \int_0^\pi \left( \frac{dP_l^m}{d\theta} P_l^m - \cot\theta P_l^m P_l^m \right) \sin\theta d\theta \quad (12g)$$

公式(11)、(12)和边界条件(4)构成了求解小横向粘度扰动情况下的环型场分布的完备方程组. 从式(11)和(12)看出, 要求得环型场分布, 必须先求得极型场的分布, 即求得极型场分布的球谐系数  $\Phi_{al}^m$  和  $\Phi_{bl}^m$ . 分析式(8b)发现, 在小扰动粘度下, 表征扰动程度的系数  $C_1 \ll 1$ , 因此, 由粘度扰动而产生的源(右端第二项)相对于浮力源(右端第一项)是很小的, 特别是在瑞利数较大时. 因此, 可以忽略式(8b)右端第二项, 从而变成了与常粘度模型中计算极型场时完全相同的方程. 通过将极型场和温度扰动场展成式(9b)和(9c)的  $l$  阶  $m$  次的缔合勒让德函数, 联立极型场与温度扰动场, 然后用 Levenberg-Marquardt 算法求解由 Garlekin 方法产生的非线性方程组, 获得  $\Phi_{al}^m$  和  $\Phi_{bl}^m$  (朱涛, 冯锐, 2004; 叶正仁等, 1995; Schubert, Zebib, 1980; Zebib *et al*, 1980); 然后将它们代入式(11)和(12)中, 采用有限差分格式和全选主元高斯消去法求得  $\psi_{al}^m$  和  $\psi_{bl}^m$ , 即可获得由粘度横向变化而激发的环

型场的分布.

2 计算结果及分析

本文计算了边界为刚性或应力自由的情形, 在计算中, 必须将式(9)中关于阶数  $l$  的无穷项求和变为有限项相加, 本文取阶数  $l$  的最大值为 6; 并取参数  $R_1 = 3\,471\text{ km}$ ,  $R_2 = 6\,271\text{ km}$ , 它们分别对应于核幔边界和岩石圈底界面的位置.

为了验证核心程序的正确性, 首先计算了将温度扰动场和极型场展开成  $l$  阶 0 次时的结果, 所获得的极型场与叶正仁等(1995)的是相同的(朱涛, 冯锐, 2004); 然后计算了高阶高次即  $l$  阶  $m$  次的极型场的结果. 在此核心程序的基础上, 根据式(11)和(12), 添加了计算环型场的程序代码.

2.1 环型场分量的大小

表 1 给出了外边界为刚性、内边界为应力自由边界(简记为 R-F 边界)下, 不同瑞利数  $Ra$  和不同扰动系数  $C_1$  的总均方根速度  $V_{rms}$ , 以及环型场均方根速度  $V_t$  占总速度  $V_{rms}$  的百分比  $R_{vt}$ . 同时也给出了内外边界均为刚性边界(简记为 R-R 边界)下, 当瑞利数  $Ra = 10\,000$  时的  $V_{rms}$  和  $R_{vt}$ . 从表 1 可以看出, 在小扰动粘度的情况下, 环型场速度仅占总速度的几个百分点, 而且几乎不随瑞利数的增加而变化, 但是环型场的速度却随着瑞利数的增加而增大. 随着扰动系数  $C_1$  的增加, 虽然环型场速度所占比例增加, 但是总速度却几乎没有变化. 这是因为环型场速度所占比例很小, 难以导致总速度发生明显的变化. 表 1 中给出的 R-R 边界下, 瑞利数  $Ra = 10\,000$  时的总速度约为 21.256. 这与 Christensen 和 Harder(1991)在相同边界条件和瑞利数下, 通过有限元方法并假定粘度为温度的函数所获得的值(约为 21.4~24.0)非常接近.

表 1 不同边界、扰动系数和瑞利数下的总速度以及环型场速度占总速度的百分比

Ra	R-F 边界			
	C <sub>1</sub> = 0.1		C <sub>1</sub> = 0.2	
	V <sub>rms</sub> (无量纲值)	R <sub>vt</sub>	V <sub>rms</sub> (无量纲值)	R <sub>vt</sub>
3 000	8.920	3.34%	8.930	6.67%
10 000	27.152	2.89%	27.176	5.77%
100 000	156.272	3.17%	156.438	6.34%
1 000 000	660.689	2.87%	661.287	5.74%
R-R 边界				
10 000	21.265	2.09%	21.275	4.17%

对相应的极型场, 我们已经进行过详细的分析和讨论(朱涛, 冯锐, 2005), 在此不再赘述.

2.2 环型场速度随深度的变化特征

图 1 给出了不同边界、不同瑞利数时环型场速度和总速度随深度的变化曲线, 结果表明, 球层中流体流动的最大速度出现在球层的下部, 即内边界附近或者内边界层中, 而粘度横向变化所激发的环型场的最大速度出现在球层的中、上部区域, 并且其能量也主要集中在该区中. 对于不同类型的边界, 其最大速度出现的深度也不同. R-R 边界下, 约在 1 400 km 深度, 环型场速率达到最大, 而 R-F 边界则约在 1 200 km 深度达到最大. 环型场

速度都随着深度的加深而减小, 不过会在内边界附近的区域出现局部极大值. 对于同一边界类型(图 1b, c), 随着瑞利数的增大, 环型场速度随深度的分布曲线在形态上几乎没有变化. 但是在相同深度上, 环型场的速度值明显增大.

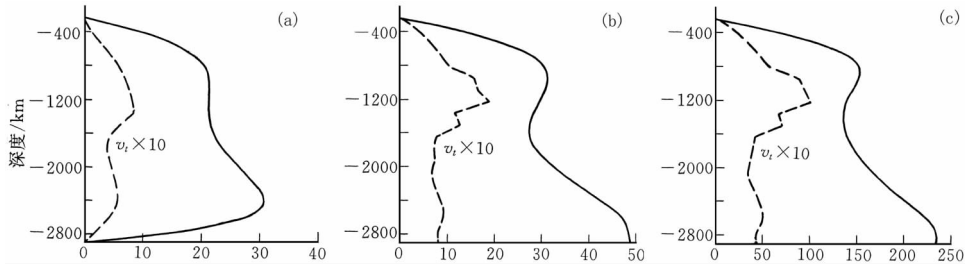


图 1 不同边界、瑞利数下环型场速度和总速度随深度的变化曲线

图中横坐标的速度是无量纲化的均方根(rms)值. 粘度扰动系数  $C_1 = 0.1$ , 虚线代表环型场速度的 10 倍, 实线代表总速度. (a) R-R 边界,  $Ra=10\ 000$ ; (b) R-F 边界,  $Ra=10\ 000$ ; (c) R-F 边界,  $Ra=100\ 000$

2.3 对流图象

对流形态在不同边界条件但在同一瑞利数和深度下表现出了明显的差异, 特别在赤道面附近和南半球的中低纬区域, 更为突出(图 2). 但是随着瑞利数的加大, 这种差异将显著减小(图 2a 和图 4b). 例如, 虽然在赤道附近和南半球中低纬区域, R-R 边界下,  $Ra=10\ 000$  时的对流剖面(图 2a)和 R-F 边界(图 2b)下, 相同瑞利数的对流剖面均具有 6 个明显的对流环, 但是前者中的对流环的长轴几乎平行于南北方向, 而後者的对流环的长轴却与南北方向呈约  $30^\circ$  的夹角. 当瑞利数  $Ra \geq 100\ 000$  时(图 4b), 两种边界(图 2a 和图 4b)下的对流剖面在形态上非常相似. 这表明在瑞利数较高时, 可能削弱了边界条件对环型场对流形态的影响. 同一边界下不同深度的对流形态极其相似, 其对流速度随着深度的加深先增大, 而后减小(图 3a, 2b 和 3b). 同一边界但在相同深度上的对流形态因瑞利数不同而存在较大差异, 并且对流速度随着瑞利数的增加而明显增大(图 4a, 2b 和 4b). 这表明环型场的对流形态对深度极不敏感, 而对瑞利数的变化比较敏感. 图 2b 和图 5a 表明, 随着表征粘度扰动程度的系数  $C_1$  的增大, 环型场对流形态没有发生变化, 但是对流速度值明显增大.

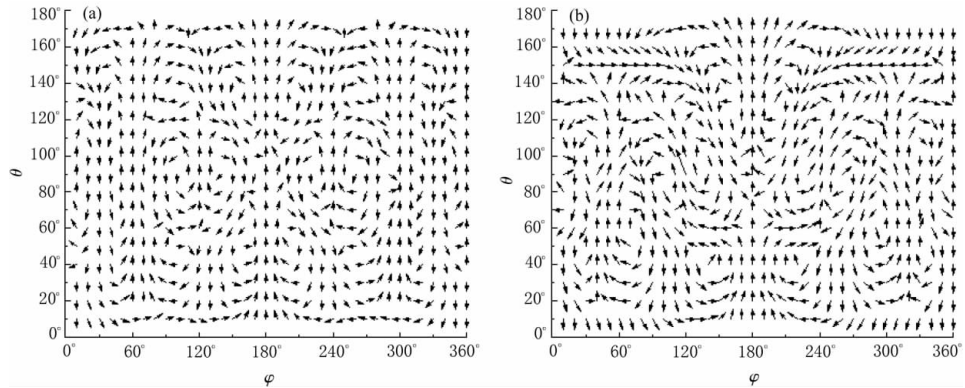


图 2 瑞利数相同( $Ra=10\ 000$ )和深度相同( $r=1.74$ , 深度约为  $1\ 500\text{ km}$ )时的

环型场对流剖面. 粘度扰动系数  $C_1 = 0.1$

(a) R-R 边界, 最小速度 0.02, 最大速度 1.70; (b) R-F 边界, 最小速度 0.01, 最大速度 3.42

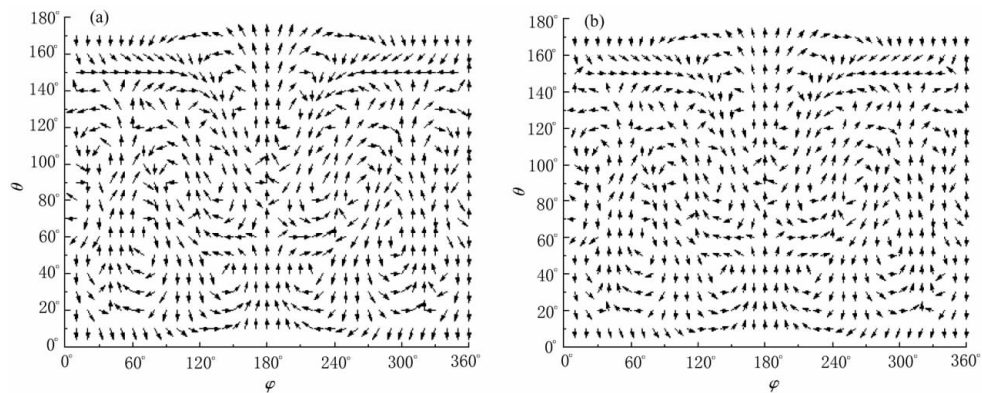


图 3 瑞利数相同( $Ra=10\ 000$ )和边界条件相同(均为 R-F 边界)时的环型场对流剖面. 粘度扰动系数  $C_1=0.1$

(a) 深度约为 2 620 km(即  $r=1.34$ ), 最小速度 0.00, 最大速度 2.41;  
(b) 深度约为 660 km(即  $r=2.04$ ), 最小速度 0.00, 最大速度 1.19

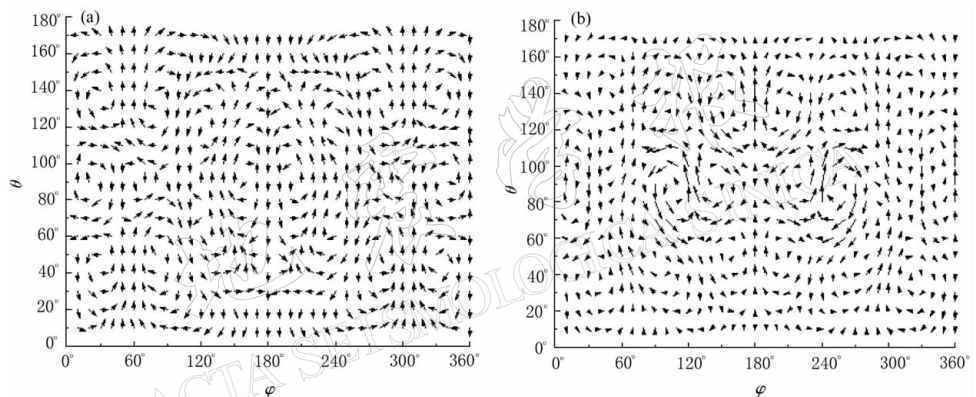


图 4 相同边界(R-F 边界)和相同深度( $r=1.74$ , 即深度约为 1 500 km)时的环型场的对流形态. 粘度扰动系数  $C_1=0.1$

(a)  $Ra=3\ 000$ , 最小速度 0.01, 最大速度 0.98; (b)  $Ra=100\ 000$ , 最小速度 0.17, 最大速度 18.67

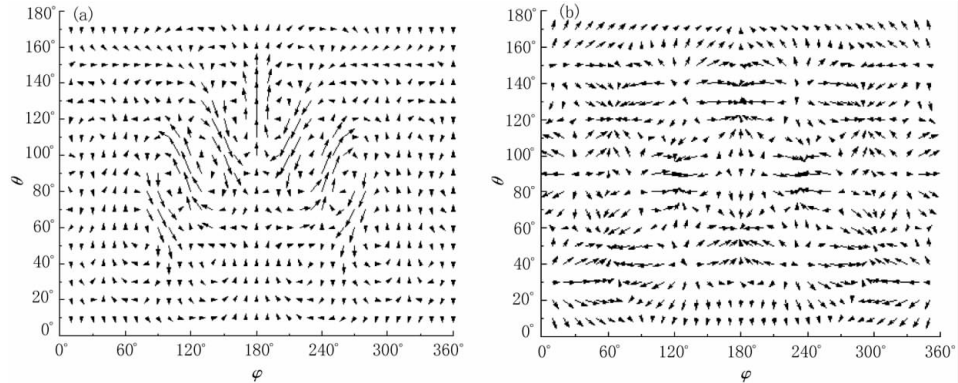


图 5 相同边界(R-F 边界)和相同瑞利数( $Ra=10\ 000$ )的对流剖面

(a) 环型场的对流剖面,  $C_1=0.2$ ,  $r=1.74$ (深度约为 1 500 km), 最小速度 0.03, 最大速度 6.85;  
(b) 总速度场的对流剖面,  $C_1=0.1$ ,  $r=2.04$ (深度约为 660 km), 最小速度 0.69, 最大速度 38.54



有趣的是,在对流图象中,对流速度较大的区域主要集中在赤道面附近和南半球的中低纬区域,而且南半球和北半球的对流形态差异很大,表现出了对流形态和速度的纬向差异特征.

从对比图 5b 以及朱涛和冯锐(2005)文章中的图 7a 看出,相同条件下的总速度的对流形态和极型场的对流形态非常相似,不过在局部区域,特别是对流的汇聚处的对流速度加强.

### 3 讨论

岩石圈板块的运动中包含了极型与环型分量(O'Connell *et al*, 1991),而且地幔粘度强烈依赖于温度、压力和应力或应变率(Kirby, Kronenberg, 1987),这说明在岩石圈板块的下覆地幔中会存在明显的横向粘度差异(Ribe, 1992). 本文对扰动粘度仅随余纬度变化,即  $\tilde{\eta} = C_1 \cos \theta$  的模型进行了研究. 结果表明,横向变化的粘度直接激发了环型场,其速度占总速度的比例与 Christensen 和 Harder(1991)通过假定粘度为温度的函数而获得的相同条件下的值是非常接近的,仅为几个百分点. 虽然我们获得的环型分量较弱,但是其能量主要集中在地幔的中上部区域,可能对大地水准面异常产生较大影响. 在 Cadek 等(1993)的模型中,环型场分量对大地水准面异常的影响达到了约 20%. Richard 和 Vigny(1989)的研究也表明,虽然横向变化的粘度对最低球谐阶的大地水准面异常几乎没有影响,但对球谐阶数  $l \geq 4$  的大地水准面异常产生了重大影响,并且 Zhang 和 Christensen(1993)也获得了几乎相同的结论. 另外,我们还获得了一个明确而清晰的概念,就是在寻求激发地幔对流的环型分量的机制时,不仅要考虑板块自身运动(Richard, Vigny, 1989; Hager, Clayton, 1979; 叶正仁, 朱日祥, 1996),同时还应该考虑由于地幔流体粘滞性的横向变化.

我们的结果是建立在牛顿流体粘度模型上的,而且仅考虑的是粘度的横向微扰变化所引起的环型场分量,计算所获得的环型场速度占总速度的比例很小. 一些研究结果(Hager, O'Connell, 1978; Minister, Jordan, 1978; Forte, Peltier, 1987; Fu, 1989)表明,板块运动的极型分量和环型分量功率几乎相等. 这说明在齐次边界下,仅考虑粘度横向微扰的牛顿流体粘度模型是无法完全解释上述现象的,但是它揭示了板块运动的环型分量产生的一种机制. 这告诉我们在把板块运动的环型分量归功于板块自身运动激发的同时,不能忽略地幔流体物性变化,如粘度横向变化的作用. 另外,Christensen(1984)以及 Christensen 和 Harder(1991)的研究结果表明,在齐次边界条件下,采用粘度随应力(应变率)变化的非牛顿流体粘度模型,可能会获得较大的环型场速度分量与总速度之比值(在瑞利数  $Ra = 60\ 000$  时约为 26%). 即使是牛顿流体粘度模型,如果其粘度最大变化出现在岩石圈内,其下面的地幔的粘度仅随深度变化,也可能获得巨大的环型分量(Ribe, 1992). 虽然这些结果都还不能完全拟合板块运动中的环型分量值,但为利用不同的粘度模型来研究环型分量的产生机制做了有意义的探索,而新的研究思路更有待后人的大量工作.

非常有趣的是,本研究所得到的环型场的对流形态和速度,表现出了明显的纬向差异特征. 事实上,在研究全球大地构造时,人们已经发现南北半球在热量散失、形变、大地水准面异常、地震波速和地震活动性等方面,均存在显著的差异(马宗晋等, 2001). 这些差异是很难用常粘度地幔对流模型来进行解释的,而从地幔粘度的横向变化入手,则有可能

为探索全球大地构造的纬向差异(如南、北半球的非对称性)的问题, 提供一种可能的研究思路。

## 4 结论

本研究通过假定小扰动粘度形式为  $\tilde{\eta} = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos n\theta + S_n \sin n\theta)$  ( $\tilde{\eta}$  为无量纲量, 且  $\tilde{\eta} \ll 1$ ), 将常粘度模型发展为变粘度模型, 获得了小扰动粘度激发的环型场分量, 其速度占总速度的几个百分点, 这个比例几乎不随着瑞利数而变化, 但对流形态受瑞利数影响较大; 环型场速度随深度加深而减小, 随瑞利数和  $C_1$  的增加而增加; 环型场能量主要集中在球层的中上部区域。

环型场的对流形态和速度表现出了明显的纬向差异特征, 这为我们用动力学的观点来研究某些全球构造, 如南北半球非对称性的问题提供了一种可能的思路 and 方向。

本研究的计算是建立在对粘度横向变化的简单的数学假设上的, 还不能直接用于对实际地球构造的解释分析。不过, 三维地震层析成像结果提供的全地幔密度非均匀性分布 (Su *et al*, 1994), 以及地幔密度异常转换为粘度异常的可能假设 (Zhang *et al*, 1993), 为我们下一步在变粘度地幔对流模型中引入实际观测资料成为可能。

感谢马宗晋院士在科学思路上的指导, 中国科学技术大学傅容珊教授和中国科学院地质与地球物理研究所叶正仁教授在本研究中给予了极大地帮助, 在此谨表深深的谢意。

## 参 考 文 献

- 傅容珊. 1990. 地球大地水准面异常和地幔对流的物理数学模型[J]. 地球物理学报, **33**(专集 II): 457~468
- 马宗晋, 宋小东, 杜品仁, 等. 2001. 地球南北半球的非对称性[J]. 地球物理学报, **45**(1): 26~33
- 吴珍汉. 1997. 旋转地球动力学[M]. 北京: 地质出版社, 8~10
- 杨学祥. 1998. 地球差异旋转动力学[M]. 长春: 吉林大学出版社, 158~160
- 叶正仁, 滕春凯, 张新武. 1995. 地幔对流与岩石圈板块的相互耦合及影响——(I) 球腔中的自由热对流[J]. 地球物理学报, **38**(2): 174~180
- 叶正仁, 王建. 2003. 上地幔变粘度小尺度对流的数值研究[J]. 地球物理学报, **46**(3): 335~339
- 叶正仁, 朱日祥. 1996. 地幔对流与岩石圈板块的相互耦合及影响——(II) 地幔混合对流理论及其应用[J]. 地球物理学报, **39**(1): 47~56
- 朱涛, 冯锐. 2005. 球层中高阶自由热对流格局及其变化的研究[J]. 地震学报, **27**(1): 11~24
- Buckus G. 1958. A class of self-sustaining dissipative spherical dynamos[J]. *Ann Phys*, **4**: 381~384
- Cadek O, Richard Y, Martinec Z, *et al*. 1993. Comparison between Newtonian and non-Newtonian flow driven by internal loads[J]. *Geophys J Int*, **112**: 103~114
- Christensen U. 1984. Convection with pressure- and temperature-dependent non-Newtonian rheology[J]. *Geophys J R astr Soc*, **77**: 343~384
- Christensen U, Harder H. 1991. 3-D convection with variable viscosity[J]. *Geophys J Int*, **104**: 213~226
- Clayton R W, Comer R P. 1983. A tomographic analysis of mantle heterogeneities from body wave travel time[J]. *EOS Trans Amer Geophys Union*, **62**: 776
- Forte A M, Peltier W R. 1987. Plate tectonics and aspherical earth structure: the importance of poloidal-toroidal coupling[J]. *J Geophys Res*, **92**: 3 645~3 679
- Fu R S. 1989. Plate motions, earth's geoid anomalies and mantle convection[A]. In: Cohen S C, Vanicek P eds. *Slow Deformation and Transmission of Stress in the Earth*[C]. Washington DC: American Geophysical Union, 47~54
- Gable C W, O'Connell R J, Travis B J. 1991. Convection in three dimensions with surface plates: generation of toroidal flow[J]. *J Geophys Res*, **96**: 8 391~8 405
- Hager B H, Clayton R W. 1989. Constraints on the structure of mantle convection using seismic observations, flow mod-

- els and the geoid[A]. In: Peltier W R ed. *Mantle Convection: Plate Tectonics and Global Dynamics*[M]. Gordon and Breach, New York, 657~764
- Hager B H, O'Connell R J. 1978. Subduction zone dips and flow driven by the plates[J]. *Tectonophysics*, **50**: 111~134
- Kirby S H, Kronenberg A K. 1987. Rheology of the lithosphere: selected topics[J]. *Rev Geophys*, **25**(6): 1 219~1 244
- Minister J B, Jordan T H. 1978. Present-day plate motion[J]. *J Geophys Res*, **83**: 5 331~5 354
- O'Connell R J, Gable C W, Hager B H. 1991. Toroidal-poloidal partitioning of lithospheric plate motion[A]. In: Sabadini R *et al*, eds. *Glacial Isostasy, Sea Level and Mantle Rheology*[C]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 535~551
- Olson P, Bercovici D. 1991. On the equipartitioning of kinetic energy in plate tectonics[J]. *Geophys Res Lett*, **18**: 1 751~1 754
- Ribe N M. 1992. The dynamics of thin shells with variable viscosity and the origin of toroidal flow in the mantle[J]. *Geophys J Int*, **110**: 537~552
- Richard Y, Vigny C. 1989. Mantle dynamics with induced plate tectonics[J]. *J Geophys Res*, **94**: 17 543~17 560
- Schubert G, Zebib A. 1980. Thermal convection of an internally heated infinite Prandtl number fluid in a spherical shell [J]. *Geophys Astrophys Fluid Dynamics*, **15**: 65~90
- Su W J, Woodward R L, Dziwonski A M. 1984. Degree 12 model of shear velocity heterogeneity in the mantle[J]. *J Geophys Res*, **99**: 6 945~6 980
- Zebib A F, Schubert G, Straus J M. 1980. Infinite Prandtl number thermal convection in a spherical shell[J]. *J Fluid Mech*, **97**(Part 2): 257~277
- Zhang S X, Christensen U. 1993. Some effects of lateral viscosity variations on geoid and surface velocities induced by density anomalies in the mantle[J]. *Geophys J Int*, **114**: 531~547

## NONLINEAR FREE THERMAL CONVECTION IN A SPHERICAL SHELL: A VARIABLE VISCOSITY MODEL

Zhu Tao<sup>1, 2)</sup> Feng Rui<sup>1)</sup>

1) Institute of Geophysics, China Earthquake Administration, Beijing 100081, China

2) Lanzhou Institute of Seismology, China Earthquake Administration, Lanzhou 730000, China

**Abstract:** In mantle convection models, the mantle viscosity is generally assumed constant or dependent on depth. In this paper, a laterally variable viscosity is introduced into mantle convection model in which the mantle viscosity consists of a constant background and latitude-dependent viscosity with small fluctuations. The features of toroidal field dependent on depth and Rayleigh number are discussed under two boundary conditions, the top rigid and bottom stress-free boundaries (R-F boundary for short) and both rigid ones (R-R boundary for short), respectively. The results show that the energy of toroidal field mainly concentrates in the middle and upper parts of a spherical shell, and the ratio of toroidal to total velocities amounts to only a few percents and hardly depends on Rayleigh number, while the convection patterns of toroidal field have been strongly affected by Rayleigh number. It is found that the convection patterns and velocities of toroidal field have obvious differences in latitudinal direction, which clearly reflects the effects of lateral mantle viscosity variations on the convection patterns. These preliminary results give us a possible hint to study some global tectonic phenomena, e. g. the asymmetry of the southern and northern hemispheres and the earth's differential rotation.

**Key words:** variable viscosity; thermal free convection; the component of toroidal field