第 26 卷　第 1 期　　　　地　震　学　报　　　　Vol. 26, No. 1
2004 年 1 月　(106～109)　　ACTA SEISMOLOGICA SINICA　　Jan., 2004

文章编号：0253-3782(2004)01-0106-04

研究简报

地应力主应力的方位角求和与平均*

石耀霖

（中国北京 100039 中国科学院研究生院计算地球动力学实验室）

关键词：应力　张量　震源机制

中图分类号：P315.72+7　　**文献标识码：**A

在世界应力图编制中，9%来自地应力解除和水压破裂法，23%来自井孔崩裂法，63%来自震源机制，5%来自地质方法(Zoback *et al.*, 1989)．其中，除地应力解除和部分水压破裂测量资料能提供水平应力的主应力大小和方向外，其余地应力测量方法仅能提供主应力方向，不能提供主应力大小．尽管在震源机制等方法研究中也有一些研究者试图利用一些附加的假设估计地应力值的大小，但这些方法迄今尚未得到普遍地应用(Chen, Duda, 1996；赵建涛等，2002)．人们利用仅有方位的资料可以进行什么分析，需要避免什么错误操作，是一个重要和基本的问题．然而，一些研究者却存在一些模糊或错误的观念和认识．例如，一种常见的操作是一个小区域内有几个主应力方位测量结果时，把它们的平均值作为区域主应力的方向；或者在仅知道方向时，试图把应力分解为不同成分之和并讨论其特征等．这样做是否可行呢？许多貌似简单的问题后面隐蔽着重要的基础的概念．本文拟对这些问题进行讨论．

1　应力状态的应力张量描述和运算

描述一点的应力状态，需要知道该点的应力张量(Timshenko, Goodier, 1970)

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{1}$$

其中，$\tau_{xy}=\tau_{yx}$，$\tau_{xz}=\tau_{zx}$，$\tau_{xz}=\tau_{zx}$，因此仅有 6 个独立分量．如果取 z 轴为垂直方向，在地表 $\sigma_z=0$．在接近地表的地质问题讨论中，往往可以假定为二维平面应力状况，这时对应力状态的描述可简化为

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \tag{2}$$

这时有 4 个分量，但仅有 3 个独立分量．所谓了解了一点的应力状况，就是知道这些独立分量，然后可以根据它们求出过该点任意方位剖面上受到的正应力和剪应力．应力的求和或分解、求平均值等运算，都必须对应力张量的分量进行．

应力张量的表达方式是应力描述和运算的基础，然而，对地质分析来说，这种表达方式比较抽象，不够直观．一种更加形象的表达方式是求应力张量的本征值和本征矢量，即主应力及其在空间的方位．在二维情况下，两个主应力大小和方向为

$$\sigma_{1,2}=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\pm\sqrt{\frac{(\sigma_x-\sigma_y)^2}{4}+\tau_{xy}^2} \tag{3}$$

$$\tan 2\theta=\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y} \tag{4}$$

*　国家自然科学重点基金(40234042)资助．
2002-11-25 收到初稿，2003-04-14 收到修改稿并决定采用．

由于最大和最小主应力方位总是互相垂直，因此，这时也是用 3 个独立的量描述该应力状况．应该强调，描述一点的应力状态要用张量，而不能用矢量．根据 3 个应力张量分量可以求主应力大小和方向，根据主应力大小和方向也可以求应力张量的分量．无论用哪一种表达方式，或混杂的表达方式(例如，知道 σ_x，σ_y 和主应力方向)，均需要知道 3 个独立参量．

平面应力状态的图示方法如图 1．如果使用应力分量，其相应图示如图 1a；如果用主应力表示，其相应图示如图 1b．用矢量仅能表达位移或速度，或在边界确定(即给定界面的法线方向)的条件下，表示作用在边界上的应力(包括正应力和剪应力)，但这时的先决条件是必须明确给出边界．人们经常在地质文献中看到一些陈述和附图，声称中国受到印度板块的挤压，在图上印度一侧画上几个指向北北东方向的箭头．如果这些箭头代表运动速度，则是正确的；但如果认为这些箭头代表应力作用，而又不明确画出边界的位置和走向，则是错误的．

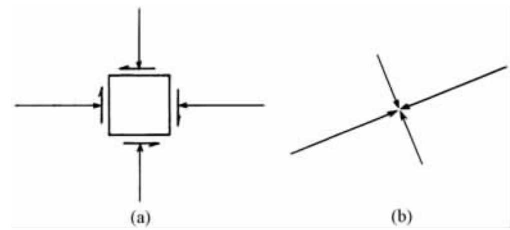

图 1　(a) 用应力张量的分量描述应力状态，对应力张量分量可以进行代数运算；(b) 以主应力大小和方向表示应力状况形象而易于理解，但不能对它们直接进行代数运算

2　方位角不能简单求和、分解或平均

如果在一个地方第一次测量的结果为

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x_1} & \tau_{xy_1} \\ \tau_{xy_1} & \sigma_{y_1} \end{pmatrix} \tag{5}$$

其主应力方向为

$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy_1}}{\sigma_{x_1} - \sigma_{y_1}} \tag{6}$$

第二次测量的结果为

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x_2} & \tau_{xy_2} \\ \tau_{xy_2} & \sigma_{y_2} \end{pmatrix} \tag{7}$$

其主应力方向为

$$\tan 2\theta_2 = \frac{2\tau_{xy_2}}{\sigma_{x_2} - \sigma_{y_2}} \tag{8}$$

则它们的和为

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1} & \tau_{xy_1} \\ \tau_{xy_1} & \sigma_{y_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{x_2} & \tau_{xy_2} \\ \tau_{xy_2} & \sigma_{y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1} + \sigma_{x_2} & \tau_{xy_1} + \tau_{xy_2} \\ \tau_{xy_1} + \tau_{xy_2} & \sigma_{y_1} + \sigma_{y_2} \end{bmatrix} \tag{9}$$

应力之和的方向为下式决定：

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(\tau_{xy_1} + \tau_{xy_2})}{\sigma_{x_1} + \sigma_{x_2} - \sigma_{y_1} - \sigma_{y_2}} \tag{10}$$

如果简单地对 θ_1 和 θ_2 求和作平均，即 $\theta' = (\theta_1 + \theta_2)/2$，得到

$$\tan 2\theta' = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1 \tan\theta_2} \tag{11}$$

其中

$$\tan\theta_1 = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 2\theta_1} - 1}{\tan 2\theta_1} \tag{12}$$

$$\tan\theta_2 = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 2\theta_2} - 1}{\tan 2\theta_2} \tag{13}$$

显而易见，一般情况下按式(10)求出的 θ 和按式(11)及式(12)、(13)、(6)、(8)求出的 θ' 是不相等的．我

们来看两个例子.

例 1：应力张量 1 为 $\sigma_{x_1}=2$，$\sigma_{y_1}=0$，$\tau_{xy_1}=0$；应力张量 2 为 $\sigma_{x_2}=0$，$\sigma_{y_2}=1$，$\tau_{xy_2}=0$. 则应力 1 的最大主应力 $\sigma_1^{(1)}$ 为 2，最小主应力 $\sigma_2^{(1)}$ 为 0，最大主应力方向与 x 轴夹角为 $\theta_1=0°$. 应力 2 的最大主应力 $\sigma_1^{(2)}$ 为 2，最小主应力 $\sigma_2^{(2)}$ 为 0，最大主应力方向与 x 轴夹角为 $\theta_2=90°$. 如果简单地对两个夹角求平均，会得到应力之和最大主应力与 x 轴夹角为 45° 的错误结论，实际应力之和为 $\sigma_x=2$，$\sigma_y=1$，$\tau_{xy_1}=0$；最大主应力 σ_1 为 2，最小主应力 σ_2 为 1，最大主应力方向与 x 轴夹角 $\theta=0°$(图 2).

例 2：应力张量 1 为 $\sigma_{x_1}=2$，$\sigma_{y_1}=3$，$\tau_{xy_1}=0$；应力张量 2 为 $\sigma_{x_2}=0$，$\sigma_{y_2}=0$，$\tau_{xy_2}=1$. 则应力 1 的最大主应力 $\sigma_1^{(1)}$ 为 3，最小主应力 $\sigma_2^{(1)}$ 为 2，最大主应力方向与 x 轴夹角为 $\theta_1=90°$. 应力 2 的最大主应力 $\sigma_1^{(2)}$ 为 1，最小主应力 $\sigma_2^{(2)}$ 为 -1，最大主应力方向与 x 轴夹角为 $\theta_2=45°$. 如果简单地对两个夹角求平均，会得到应力之和最大主应力与 x 轴夹角为 67.5° 的错误结论，实际应力之和为 $\sigma_x=2$，$\sigma_y=3$，$\tau_{xy_1}=1$；最大主应力 σ_1 为 3.61，最小主应力 σ_2 为 1.39，最大主应力方向与 x 轴夹角 $\theta=58.3°$(图 3).

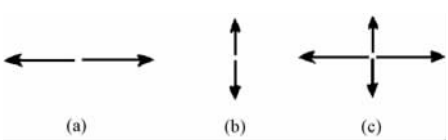

图 2 (a) 应力张量 1；(b) 应力张量 2；(c) 两个应力张量之和

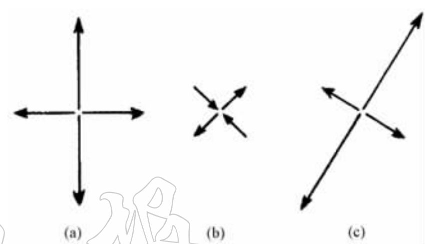

图 3 (a) 应力张量 1；(b) 应力张量 2；(c) 两个应力张量之和

总之，在应力求和或分解(即式(9)的运算)时，必须知道合计 3 个张量 9 个独立参量中的 6 个独立参量(直接用张量的分量给出，或以主应力大小、方向形式间接给出)，才能求另外 3 个参量.

3 主应力方位角求平均值的条件

上面谈到，一般情况下不能简单地对多个测量的主应力简单求平均值，那么，是否在一些特殊情况下应力之和的主应力方向等于各测量方位角的平均值呢？

我们知道，在以两个主应力分别为坐标轴的坐标系中，应力张量可表示为

$$\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2} & 0\\ 0 & \dfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2} & 0\\ 0 & -\dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}p & 0\\ 0 & p\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\Delta\sigma & 0\\ 0 & -\Delta\sigma\end{pmatrix} \tag{14}$$

其中，$p=(\sigma_1+\sigma_2)/2$，$\Delta\sigma=(\sigma_1-\sigma_2)/2$，分别为均匀静压平均应力和最大剪应力. 如果在地质问题中取 EW 方向为 x 轴，NS 方向为 y 轴，主应力与 x 轴夹角为 θ，则在该坐标系下该应力张量表达式为

$$\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p & 0\\ 0 & p\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\Delta\sigma\cos2\theta & \Delta\sigma\sin2\theta\\ \Delta\sigma\sin2\theta & -\Delta\sigma\cos2\theta\end{pmatrix} \tag{15}$$

主应力方向仅由上式右边第二项决定.

如果在一个地方第一次测量的结果为

$$\begin{pmatrix}\sigma_{x_1} & \tau_{xy_1}\\ \tau_{xy_1} & \sigma_{y_1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1 & 0\\ 0 & p_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\Delta\sigma^{(1)}\cos2\theta_1 & \Delta\sigma^{(1)}\sin2\theta_1\\ \Delta\sigma^{(1)}\sin2\theta_1 & -\Delta\sigma^{(1)}\cos2\theta_1\end{pmatrix} \tag{16}$$

第二次测量的结果为

$$\begin{pmatrix}\sigma_{x_2} & \tau_{xy_2}\\ \tau_{xy_2} & \sigma_{y_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_2 & 0\\ 0 & p_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\Delta\sigma^{(2)}\cos2\theta_2 & \Delta\sigma^{(2)}\sin2\theta_2\\ \Delta\sigma^{(2)}\sin2\theta_2 & -\Delta\sigma^{(2)}\cos2\theta_2\end{pmatrix} \tag{17}$$

当 $\Delta\sigma^{(1)}=\Delta\sigma^{(2)}=\Delta S$ 时，则它们的和为

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x_1} & \tau_{xy_1} \\ \tau_{xy_1} & \sigma_{y_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1+p_2 & 0 \\ 0 & p_1+p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\Delta S\cos(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2) & 2\Delta S\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2) \\ 2\Delta S\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2) & -2\Delta S\cos(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2) \end{pmatrix} \tag{18}$$

不难证明，这时的

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y} = \frac{\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)}{\cos(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)} = \tan(\theta_1+\theta_2) \tag{19}$$

即简单的对 θ_1 和 θ_2 求和做平均，即 $\theta'=(\theta_1+\theta_2)/2$ 恰好与应力之和的主应力方位角 θ 一致．其条件是各次测量的最大剪应力均相等．在 n 个应力求平均时，遵从相同的 $\Delta\sigma^{(i)}=\Delta S$ 的条件．

4　讨论和结论

以上分析可概括为：

1）应力状态的描述必须用应力张量；应力张量的运算，包括求和、分解或求平均值，必须对应力张量的分量进行．然而对于地质工作者应力分量的表示方法往往不够形象直观，难以直接了解其含义．

2）采用主应力的大小和方向提供了形象直观的描述应力状态的另一变通方法，然而不能对其大小方向直接进行代数运算．必须先转换为应力张量分量进行运算，再从结果重新计算主应力大小和方向．

具体对震源机制问题，如果我们知道地震矩张量，则可以对张量分量进行运算，包括求平均值，然后计算平均值的主应力大小方向．然而如果我们仅使用 P 波初动资料，仅仅知道主应力的方位，不知道主应力大小，原则上，特别在各测量主应力方位相差较大的情况下，是无法从同一小区域多个观测求主应力平均值的．仅在各应力张量的最大剪应力均相等条件下才能这样平均，但很难确保这种条件恰好会被满足．不过，如果测量的方位角数据比较集中，作为一种粗糙的处理方法，仍然可以采取这种做法．但在这样做的时候，应该了解这种做法的缺陷和不足．

以上原理，在其它一些问题中同样适用．例如，在同一钻孔中进行数次应力解除对结果求平均值；在测过绝对应力的台站上继续观测应力变化，计算变化后的应力状态；试图把应力张量分解为长波和短波分量；GPS 或 InSAR 测量一个时间段内的位移并计算相应的应变或应力变化量后，与原来的背景应力场叠加等等，都必须遵从同样的原则．在需要对应力张量的分量进行代数运算时，又仅知道主应力方向，而不知道它们的大小时，必须格外小心注意．

参　考　文　献

赵建涛，崔效锋，谢富仁．2002．唐山地震震源区构造应力场强度的初步分析[J]．地震学报，**24**(3)：268～276

Chen Peishan，Duda S J．1996．Fracture mechanics rupture model of earthquakes and an estimate of ambient shear stress [J]．*Phys Earth Planet Inter*，**93**(3-4)：299～308

Timshenko S P，Goodier J N．1970．*Theory of Elasticity*[M]．3rd ed．New York：McGraw Hill，477

Zoback M L，Zoback M D，Adams J，*et al*．1989．Global patterns of intraplate stress：A status report on the world stress map project of the International Lithosphere Program[J]．*Nature*，**341**：291～298

SUMMATION AND DECOMPOSITION OF PRINCIPAL STRESSES IN THE CRUST

Shi Yaolin

(*Computational Geodynamics Laboratory*，*Graduate School of Chinese Academy of Sciences*，*Beijing* 100039，*China*)

Key words：stress；tensor；earthquake mechanism