

和泰名, 李世愚, 张洪魁, 赵玉林, 钱复业. 2011. 滑动弱化模型下的库仑应力变化与远程触发问题. 地震学报, 33(2): 165-186.

He Taiming, Li Shiyu, Zhang Hongkui, Zhao Yulin, Qian Fuye. 2011. Coulomb failure stress change in slip-weakening model and remote triggering of earthquakes. *Acta Seismologica Sinica*, 32(2): 165-186.

滑动弱化模型下的库仑应力变化 与远程触发问题^{*}

和泰名^{1),*} 李世愚¹⁾ 张洪魁²⁾ 赵玉林¹⁾ 钱复业¹⁾

1) 中国北京 100081 中国地震局地球物理研究所

2) 中国北京 100080 北京市地震局

摘要 地震断层破裂在周围固体介质中能产生静态附加应力场。当依据库仑破裂准则和破裂模型推测构造应力变化, 用以判断能否触发某处断层破裂时, 这种应力变化称作“库仑破裂应力变化”。一次地震产生的“库仑应力变化”被认为能影响下一次地震的发生。讨论了计算“库仑应力变化”所采用的不同模型, 指出伏尔泰拉错动模型不能真实反映震源参数, 因而所给出的静态附加应力场存在重大缺陷。线弹性断裂力学模型可以与真实应力降联系起来, 但不能给出震源参数的约束范围, 也存在破裂端部应力奇异性问题。用滑动弱化模式不仅可以消除应力奇异性, 而且可以对震源参数给出较合理的约束条件。理论分析表明, 计算库仑破裂应力变化必须考虑到模型选择的合理性。另外, 无论是哪种模式, 利用固体格架破裂计算大地震的库仑应力变化在远场的量值都很低, 在一般情况下似乎不足以影响下一次远场地震的发生, 迄今为止的岩石试验和实际观测资料也尚不支持这个假说。鉴于全球的地震活动有远场相互关联和呼应, 对大地震的远场静态触发作用的解释需要找出其它途径。

关键词 震源物理 震源力学 库仑破裂应力 地震触发 滑动弱化模型

doi: 10.3969/j. issn. 0253-3782. 2011. 02. 005 中图分类号: P315. 3⁺3 文献标识码: A

Coulomb failure stress change in slip-weakening model and remote triggering of earthquakes

He Taiming^{1),*} Li Shiyu¹⁾ Zhang Hongkui²⁾ Zhao Yulin¹⁾ Qian Fuye¹⁾

1) Institute of Geophysics, China Earthquake Administration, Beijing 100081, China

2) Earthquake Administration of Beijing Municipality, Beijing 100080, China

Abstract: Seismic fault failure can generate additional static stress in surrounding solid medium. The stress change, calculated by using certain fault model and following Coulomb fracture criteria, with the aim at testing if it can trigger other fault failures, is called Coulomb failure stress (CFS) change. It is commonly believed that the CFS change generated by an earthquake can affect the

* 基金项目 国家自然科学基金项目(40474018)和中国地震局地球物理研究所中央级公益性科研院所基本科研业务专项(DQJB09A01)资助。中国地震局地球物理研究所论著 11AC1003。

收稿日期 2009-12-26 收到初稿, 2010-07-21 决定采用修改稿。

† 通讯作者 e-mail: hetaiming@gmail.com

occurrence of other remote earthquakes. This paper examines and compares the calculations of CFS change in using three different models. Since the Volterra dislocation model can not accurately represent the source parameters, the additional static stress field given by this model has major flaws. The linear elastic fracture mechanics model can be related to the real stress drop, but can not give the limit range of the source parameters. In addition, it also has the problem of stress singularity at crack ends. The slip-weakening model not only eliminates the stress singularity, but also gives more reasonable constraints on source parameters. However, quantitative analysis shows that in calculating CFS changes the rationality of the fault model must be taken into account, and that for any above model the calculated CFS change induced by a major earthquake in far-field is very low, being not enough to influence the occurrence of another remote earthquake. Up to now rock experiments and actual observations do not support the hypothesis that the Coulomb stress generated by an earthquake can affect the occurrence of a next remote earthquake. Therefore, we need to find new ways to interpret the remote correlation of seismic activities around the world and the cause of static remote triggering of major earthquakes.

Key words: physics of earthquake source; mechanics of earthquake source; Coulomb failure stress; seismic triggering; slip-weakening model

引言

地震断层破裂在周围固体介质中能产生静态附加应力场。当依据库仑破裂准则和破裂模型推测构造应力变化，用以判断能否触发某处断层破裂时，这种应力变化被称作“库仑破裂应力变化”，简称“库仑应力变化”。它是指前面地震产生的静态应力变化张量投影到后续地震的断层面和滑动方向上，利用库仑-莫尔准则，综合考虑到正应力、孔隙压力和摩擦系数的影响得到周围断层破裂危险性增加或减少的判断(万永革等, 2002)。近年来，“库仑应力变化”被广泛应用于分析一次地震的发生对于震源周围地区地震活动性的影响(Harris, 1998, 2000)。这种影响甚至被用来解释超远程相关现象。所谓超远程相关，是指一个地震事件可以影响到几千千米甚至更远的地震事件或其前兆物理场的变化(Ruff, 2002; Hill *et al*, 1993)。这个距离不仅大大超出主震震源破裂长度，也大大超出了该主震的余震区的范围。其影响时间可以从震后几个小时到几个月甚至几年之久。本文的主要目的是说明，目前对库仑应力变化的计算主要是考虑断层固体格架破裂产生的附加应力场，即使是在这一部分，也存在模型选择的问题，需要从基础上加以澄清。不失一般性，本文只讨论纯Ⅱ型破裂，其结果不难推广到Ⅲ型或复合型破裂。

破裂周围全部应力场的系统计算在一般断裂力学论著中很少涉及。这是因为断裂问题多半与材料强度有关，主要关注裂纹端部附近的应力场，特别是应力强度因子的计算和测量，而破裂周围应力场的计算对于地学来说则比较重要。这方面的内容最早可以追溯到丸山卓男(Maruyama, 1969)的工作。这些计算结果间接地包含了一部分库仑应力变化的内容。目前，许多有关库仑应力变化的文献是利用伏尔泰拉(Volterra)错动和索米亚那(Somigliana)错动理论给出裂纹应力场的分布(Harris, 1998, 2000; 万永革等, 2002)。我们将在本文指出，伏尔泰拉错动模型存在重大缺陷。另外，Maruyama(1969)的文章也出现

了一些失误, 即假定裂纹面的法向位移间断可以为负数, 这样就导致了裂纹两面的介质互相侵入的情况, 这在物理上是不能接受的。另外, 随着震源理论的发展, 特别是滑动弱化模式和凹凸体模式的提出, 使得破裂面上的应力(降)如何取值以及应力(降)不均匀分布对库仑应力变化的影响, 需要从基础上加以讨论。总之, 不能简单地将 Maruyama(1969)的结果直接使用。库仑应力变化张量的各个分量需要重新绘制, 而库仑应力变化的最大剪应力和最大主应力则必须重新计算和绘图。

与 Maruyama(1969)以及当前许多研究者的假定不同的是, 我们不是从错动模型的错动假定出发, 而是从边界应力条件出发, 来导出裂纹应力场和位移场。这样在叙述的逻辑上更符合因果律。其次, 本文直接考察断层面上的应力降引起的附加应力场, 与 Maruyama(1969)将载荷作用在板边的计算得到的总应力场相比有所不同。我们的评估首先参照 Maruyama(1969)的工作, 同时给出修正和补充。

仿照 Maruyama(1969)的做法, 采用简化模型, 假定介质为连续、均匀、各向同性的, 在无限大板中心有一个裂纹, 裂纹长度为 $2a$, 设立裂纹坐标系 x, y , o 为裂纹中点, 将 oxy 平面设定为复平面, 记 $z = x + iy$, $i = \sqrt{-1}$ 。记 r_0 为点 $P(x, y)$ 距离裂纹中心的距离, θ_0 为极角, r_1 和 r_2 分别为点 $P(x, y)$ 距离裂纹两个端部的距离, θ_1 和 θ_2 分别为矢径 r_1 和 r_2 的极角(图 1)。于是 $z = r_0 e^{i\theta_0}$, $z - a = r_1 e^{i\theta_1}$, $z + a = r_2 e^{i\theta_2}$ 。

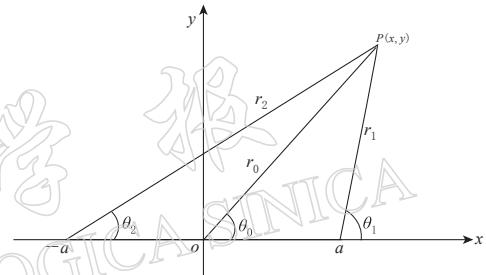


图 1 极坐标 $r_0, \theta_0, r_1, r_2, \theta_1, \theta_2$

Fig. 1 $r_0, \theta_0, r_1, r_2, \theta_1$ and θ_2 in polar coordinate

1 伏尔泰拉错动模型

Maruyama(1969)首先计算了伏尔泰拉错动^①(即假定断层两盘的错动量处处是一个常数)所产生的应力场。地震断层的位移间断在 3 个分量上分别用 x 轴方向 Δu , y 轴方向 Δv 和 z 轴方向 Δw 来表示。位移间断值可以从地震破裂在地表露出比较明显的情况下测得, 然后在整个地震断层上取平均值, 也可以用震源破裂参数的运动学反演得到。例如, 如能测得地震矩 M_0 , 由 $M_0 = \mu \bar{D}A$ 即得到平均错动量为

$$\bar{D} = \frac{M_0}{\mu A} \quad (1)$$

式中, μ 为岩石的剪切模量, A 为地震断层的总面积。以一个纯剪切断层为例, 假定断层两盘的剪切位移是右旋的, 其位移间断(错动)量处处是一个常数 $\Delta u = U$, 而法向位移间断为 $\Delta v = 0$ 。Maruyama(1969)给出了相应的应力函数为

$$\varphi(z) = \frac{\Delta \tau_0 a}{4i} [\ln(z - a) - \ln(z + a)] \quad (2)$$

其中

$$\Delta \tau_0 = \frac{4\mu U}{\pi(\kappa + 1)a} \quad (3)$$

^① 为避免和固体物理中的“位错”混淆, 这里采用“错动”或“位移间断”。

我们称作名义应力降。上式中 μ 为剪切模量, $\kappa=3-4\nu$ (平面应变), 或 $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$ (平面应力), ν 为泊松比。将式(2)代入柯洛索夫-木斯海里什维里公式, 可以得出各个附加的应力和位移分量为

$$\begin{cases} \frac{\sigma_{xx}^c + \sigma_{yy}^c}{2} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \\ \frac{\sigma_{xx}^c + \sigma_{yy}^c + i\tau_{xy}^c}{2} = -\varphi'(\bar{z}) + \overline{\varphi'(z)} - (z - \bar{z}) \overline{\varphi''(z)} \\ 2\mu(u^c + i\nu^c) = \kappa\varphi(z) - \varphi(\bar{z})\bar{\omega} - (z - \bar{z})\bar{\omega} \overline{\varphi'(z)} \end{cases} \quad (4)$$

在破裂面的上表面, $y=0$, $\theta_1=\pi$, $\theta_2=0$, 将式(2)代入式(4)的第三式可以得到 $u^+=[1/(\kappa+1)] \cdot (U/2\pi)(\kappa+1)(\theta_1-\theta_2)=U/2$ 。同样, 在破裂面下表面, $y=0$, $\theta_1=-\pi$, $\theta_2=0$, $u^-=-U/2$, 可以得到位移间断为 $\Delta u=u^+-u^-=U$ 。由此可知, 所设应力函数可以满足破裂面位移间断为常数的内边界条件。将式(2)代入式(4)可以得到伏尔泰拉错动模型中应力分量的辐角计算式

$$\frac{\sigma_{xx}^c + \sigma_{yy}^c}{2} = \frac{\Delta\tau_0 a}{2} \left(-\frac{1}{r_1} \sin\theta_1 + \frac{1}{r_2} \sin\theta_2 \right) \quad (5)$$

$$\frac{\sigma_{xx}^c - \sigma_{yy}^c}{2} = \frac{\Delta\tau_0 a}{2} \left(-\frac{1}{r_1} \sin\theta_1 + \frac{1}{r_2} \sin\theta_2 \right) + y \left(-\frac{1}{r_1^2} \cos 2\theta_1 + \frac{1}{r_2^2} \cos 2\theta_2 \right) \quad (6)$$

$$\tau_{xy}^c = \frac{\Delta\tau_0 a}{2} \left[\frac{1}{r_1} \cos\theta_1 - \frac{1}{r_2} \cos\theta_2 + y \left(-\frac{1}{r_1^2} \sin 2\theta_1 + \frac{1}{r_2^2} \sin 2\theta_2 \right) \right] \quad (7)$$

最大附加剪切应力为

$$\tau_{\max}^c = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}^c - \sigma_{yy}^c}{2} \right)^2 + (\tau_{xy}^c)^2} \quad (8)$$

最大附加主应力为

$$\sigma_1^c = \frac{\sigma_{xx}^c + \sigma_{yy}^c}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}^c - \sigma_{yy}^c}{2} \right)^2 + (\tau_{xy}^c)^2} \quad (9)$$

τ_{xy}^c , τ_{\max}^c 和 σ_1^c 的等值线分别显示在图 2a, b, c 中。其中取 $2\Delta\tau_0=100$, 其目的是为了便于与后面的线弹性断裂力学模型相比对。

从式(7)进一步得出, 裂纹所在平面($\theta_2=0$)破裂面外部分($\theta_1=0$)和破裂面上($\theta_1=\pi$)的附加剪应力分别为

$$\tau_{xy}^c(x) = \begin{cases} \frac{\Delta\tau_0 a^2}{x^2 - a^2} & \theta_1 = 0, |x| > a \quad (\text{破裂面外}) \\ \frac{\Delta\tau_0 a^2}{a^2 - x^2} & \theta_1 = \pi, |x| < a \quad (\text{破裂面上}) \end{cases} \quad (10)$$

由上式可以看出, 在破裂面上中心位置, 即 $y=0$, $x=0$ 处, $\tau_{xy}^c=\Delta\tau_0$ 。因此名义应力降就是破裂面中心的附加剪切应力, 它正好为极小值。参照有关文献(Knopoff, Chen, 2009), 取 $\mu=3 \times 10^4$ MPa, $\kappa=3-4\nu$, $\nu=0.25$, $a=310$ km, $U=1.5$ m(汶川 $M_S 8.0$ 地震)

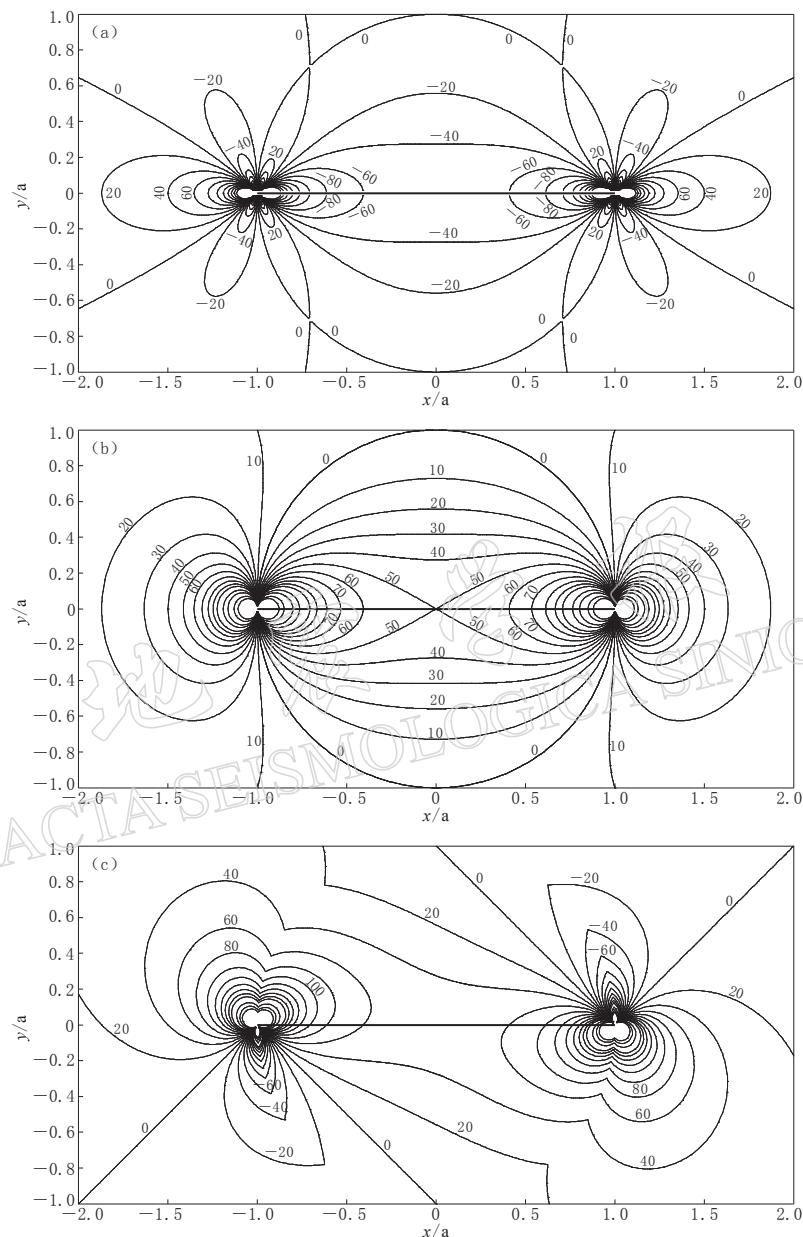


图2 伏尔泰拉模型附加应力 τ_{xy}^c 等值线(a), 最大附加剪切力 τ_{\max}^c 等值线

(b) 和最大附加主张应力 σ_t^c 等值线(c)图. 取 $2\Delta\tau_0 = 100$

Fig. 2 Additional stress τ_{xy}^c contour (a), additional maximum shear stress τ_{\max}^c contour (b) and additional maximum tensile stress σ_t^c contour (c) of the Volterra dislocation model, putting $2\Delta\tau_0 = 100$

(陈运泰等, 2008), 得该次地震 $\Delta\tau_0 \approx 0.184$ MPa.

由式(10)可以看出, 当一个动点从裂纹面内部接近裂纹左右两个端部, 即 $y=0$, $x \rightarrow \pm a$ 时, $\tau_{xy}^c \rightarrow -\infty$. 当动点从裂纹面外部接近裂纹左右两个端部, 即 $y=0$, $x \rightarrow \pm a$ 时, $\tau_{xy}^c \rightarrow +\infty$. 因此 τ_{xy}^c 在破裂端部成为二类间断点. 由式(10)导出的裂纹面上的载荷(应力降)为

$\Delta\tau(x) = -\tau_{xy}^c(|x| < a)$. 这样导出的所谓“应力降”不仅在破裂端部是奇异的，而且在全破裂面上的积分也是奇异的。这在物理上是无法接受的，因为真实应力降必然为有限值。显然，用伏尔泰拉错动模型很难反映出破裂面上的实际应力降。这不仅扭曲了震源参数，还严重扭曲了断层面附近的应力分布。

图 3 给出了伏尔泰拉错动模型中破裂所在平面上($y=0$)的错动分布和附加应力，其中 τ_{xy}^c 以 $\Delta\tau_0$ 作为归一。

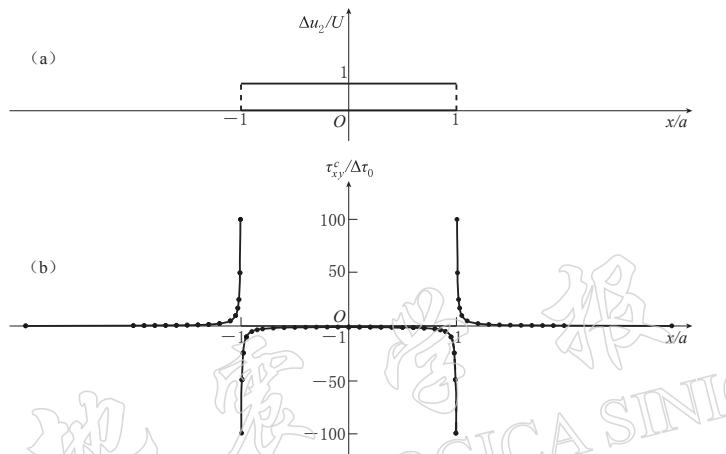


图 3 伏尔泰拉错动模型中破裂所在平面上的错动分布(a)和附加应力(b)

Fig. 3 Dislocation distribution (a) and the additional stress (b) on the fault plane deduced from Volterra dislocation model

2 线弹性断裂力学模型

2.1 裂纹面上的载荷为均匀分布

考虑板边受到剪切应力 $\tau_{xy}^\infty = \tau_b$ ，并在裂纹面产生滑动，摩擦力降低到滑动摩擦力 τ_d 的问题，记 τ_s 为介质抗剪切强度，这里 τ_s 和 τ_d 均为常数。记 $\Delta\tau_e = \tau_s - \tau_d$ ，叫做有效应力降。假定在临界破裂时破裂面上的剪切应力先是上升到 τ_s ，然后下降到 τ_d (暂时不考虑破裂停止后的断层面愈合)，则地震辐射波中反映的是有效应力降 $\Delta\tau_e$ ，而库仑应力变化则反映的是静态应力降 $\Delta\tau = \tau_b - \tau_d (0 < |x| < a)$ 。记

$$\gamma = \frac{\tau_b - \tau_d}{\tau_s - \tau_d} \quad (11)$$

为无量纲应力降，静态应力降即为

$$\Delta\tau = \gamma \cdot \Delta\tau_e \quad (12)$$

目前，主要还是从地震波记录推算出有效应力降 $\Delta\tau_e$ 。Kanamori 和 Anderson(1975)提出了尺度不变性。所谓尺度不变性，是指地震破裂的有效应力降 $\Delta\tau_e$ 都是有限值，与地震震级无关，或者说与地震破裂的尺度无关。最近的研究结果是，Kanamori(1994)的估计是 $\Delta\tau_e \approx 2-20$ MPa，Ohnaka(2003)的估计是 $\Delta\tau_e \approx 1-100$ MPa，Rice 等(2005)的估计是 $\Delta\tau_e \approx 100$ MPa。

记破裂周围的总应力分量为 σ_{xx} , σ_{yy} 和 τ_{xy} 。鉴于所假设的模型为对称或反对称的，因

此本文采用的应力函数为威斯特嘎德函数 Z (Westergaard, 1939; 范天佑, 1978; 尹祥础, 1985). 假定体力势为零, 应力函数 U 与应力分量之间的关系满足

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (13)$$

设 U_1 , U_2 和 U_3 分别为 x , y 的调和函数, 则不难证明

$$U(x, y) = U_1 + xU_2 + yU_3 \quad (14)$$

一定满足双调和方程 $\nabla^4 U = 0$, 此时平衡方程和变形协调方程自动满足. 设复应力函数 $Z(z)$ 为解析函数. 记 Z' , Z'' , ..., 为其导数; \tilde{Z} , $\tilde{\tilde{Z}}$, ..., 表示它的积分. 根据解析函数的性质, 其导数和积分仍为解析函数, 其实部和虚部均为调和函数. 它们以式(14)形式的组合也一定满足双调和方程, 并与应力分量存在式(13)形式的关系.

我们将裂纹附加应力场 σ_{ij}^c ($i, j=1, 2$) 的威斯特嘎德应力函数直接取成

$$Z_{II}^c = \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1 \right) \Delta\tau \quad (15)$$

裂纹周围的附加应力分量为

$$\begin{cases} \frac{\sigma_{xx}^c + \sigma_{yy}^c}{2} = \text{Im}Z_{II}^c \\ \frac{\sigma_{xx}^c - \sigma_{yy}^c}{2} = \text{Im}Z_{II}^c + y\text{Re}Z_{II}^c \\ \tau_{xy}^c = \text{Re}Z_{II}^c - y\text{Im}Z_{II}^c \end{cases} \quad (16)$$

位移分量为

$$\begin{cases} 2\mu u^c = \left(\frac{\kappa+1}{2} \right) \text{Im}\tilde{Z}_{II}^c + y\text{Re}Z_{II}^c \\ 2\mu v^c = -\left(\frac{\kappa+1}{2} \right) \text{Re}\tilde{Z}_{II}^c - y\text{Im}Z_{II}^c \end{cases} \quad (17)$$

总应力为

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^c \quad \sigma_{yy} = \sigma_{yy}^c \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^c + \tau_{xy}^\infty = \tau_{xy}^c + \tau_b \quad (18)$$

边界条件为: 当 $z \rightarrow \infty$, $\sigma_{xx}^c = \sigma_{yy}^c = \tau_{xy}^c = 0$. 这样, 总应力 $\tau_{xy} = \tau_b$. 在裂纹表面上 ($z = x \pm i0$, $|x| < a$), $\tau_{xy}^c = -\Delta\tau$. 不难验证式(15)可以满足本问题的边界条件.

图 4a 显示的是 II 型裂纹的附加应力 τ_{xy}^c 等值线. 与 Maruyama(1969)的图 2a 对比, 可以看出在形状上相似, 但是数值上整体减少一个常数 $\tau_{xy}^\infty = \tau_b = 100$.

将式(15)代入式(16)和式(17), 并写成极坐标的形式, 就得到附加应力和位移的全场式, 并进行数值计算. 我们采用的算法与 Maruyama(1969)的不同, 但结果是一致的.

由附加应力分量进一步得到附加应力的最大剪切应力 τ_{max}^c 由式(8)给出, 最大附加张应力 σ_1^c 由式(9)给出. 从式(8)和式(9)可以看出, τ_{max}^c 和 σ_1^c 与库仑应力变化张量的各个分量都不是简单的线性关系, 因此不能从 Maruyama(1969)的结果中减去本底应力直接求出, 必须重新计算. 计算 τ_{max}^c 和 σ_1^c 得到的等值线见图 4b 和图 4c. 将本文的结果与 Maruyama(1969)的图 2b 和图 2c 比较, 可以看出无论是形状还是数值确实都不相同.

将图 4a—c 与图 2a—c 比对, 可以看出线弹性断裂力学模型与伏尔泰拉模型的 τ_{xy}^c ,

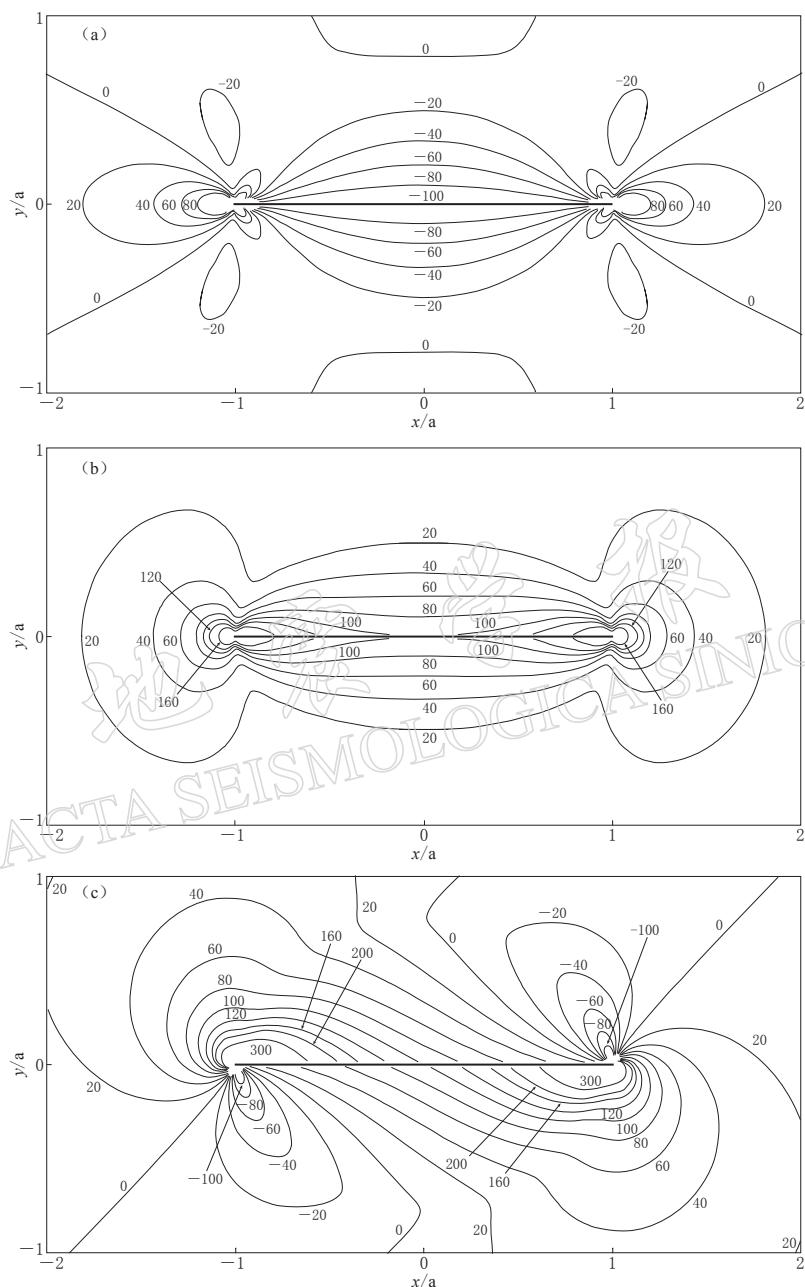


图 4 线弹性断裂力学模型Ⅱ型裂纹的附加应力 τ_{xy}^c 等值线(a), 附加最大剪应力 τ_{\max}^c

等值线(b)和附加最大主张应力 σ_1^c 等值线(c)图. 裂纹面上的应力降为 $\Delta\tau=100$

Fig. 4 Additional stress τ_{xy}^c contour (a), additional maximum shear stress τ_{\max}^c

contour (b) and additional maximum tensile stress σ_1^c contour (c) of a

type-II crack, with stress drop $\Delta\tau=100$ on crack surface

τ_{\max}^c 和 σ_1^c 的分布在 r_0-a 的范围内量级上大体相近, 但形态有所不同. 在接近破裂端部差异就比较大了.

从图 4a—c 可以看出, 库仑应力变化的分布是各向异性的. 为了更直观地说明库仑应

力变化在远场的衰减情况, 我们选取一个比较有代表性的方向来显示。取裂纹所在的平面。由于 τ_{xy}^c 在这个平面上是对称分布的, 因此只需要取 $\theta_0=0$, 即 $x \geq 0$, $y=0$ 即可。代入式(16)中的第三式, 就得到

$$\tau_{xy}^c = \Delta\tau \left(\frac{r}{\sqrt{r_1 \cdot r_2}} \cos \frac{\theta_1}{2} - 1 \right) \quad (19)$$

将 $r=x$, $r_1=x-a$, $r_2=a+x$ 代入式(19), 得到裂纹面外的剪应力为

$$\tau_{xy}^c = \gamma \Delta\tau_e \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} - 1 \right) \quad (20)$$

取 $\theta_1=\pi$, 代入式(19), 得到裂纹面内的剪应力为 $\tau_{xy}^c = -\Delta\tau = -\gamma\Delta\tau_e$ 。将式(15)代入式(17), 在破裂面上表面, $y=0$, $\theta_1=\pi$, $\theta_2=0$, 裂纹面的位移为

$$\begin{cases} u^+ = (\Delta U_0/2) \sqrt{1 - (x/a)^2} \\ v^+ = (V_0/2) \cdot x \end{cases} \quad (21a)$$

在破裂面下表面, $y=0$, $\theta_1=-\pi$, $\theta_2=0$, 裂纹面的位移为

$$\begin{cases} u^- = -(\Delta U_0/2) \sqrt{1 - (x/a)^2} \\ v^- = (V_0/2) \cdot x \end{cases} \quad (21b)$$

于是裂纹上下面的位移间断为

$$\begin{cases} \Delta u_2(x) = u^+ - u^- = \Delta U_0 \sqrt{1 - (x/a)^2} \\ \Delta v_2(x) = v^+ - v^- = 0 \end{cases} \quad (21c)$$

式中, $\Delta U_0 = \left(\frac{\kappa+1}{2}\right) a \Delta\tau$, $V_0 = \left(\frac{\kappa-1}{2\mu}\right) \Delta\tau$.

需要注意的是, II型破裂面的 y 方向位移分量 v , 虽然它在破裂面上的位移间断为零, 但上下破裂面上各自的位移值 v^+ 和 v^- 却不为零。

由式(21c)还可以得出 $\Delta u_2(x)$ 在破裂面上的积分平均值为

$$\bar{D} = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} \Delta u_2(x) dx = \frac{\pi}{4} \Delta U_0 = \left(\frac{\kappa+1}{8\mu}\right) \pi a \Delta\tau \quad (22)$$

由上式可以得出

$$\Delta\tau = \frac{8\mu}{(\kappa+1)\pi a} \bar{D} \quad (23)$$

上式往往也写成 $\Delta\tau = \eta' \mu \bar{D} / a$. 其中 η' 为表征断层面几何形状的数值因子, 它与断层模式有关。对于本文的平面内(II型)剪切破裂, $\eta' = 8/\pi(\kappa+1)$. 这样, 线弹性断裂力学就解决了断层面上的平均错动与静态应力降之间的关系, 而这在伏尔泰拉错动模型中是无法说清的。将式(23)与式(3)比较, 可以看出式(23)中的 \bar{D} 相当于伏尔泰拉模型中的 U , 两者都是破裂面上位移间断的(积分)平均值。式(23)中的动态应力降 $\Delta\tau$ 与式(3)中名义应力降 $\Delta\tau_0$ 的当量为

$$\Delta\tau = 2\Delta\tau_0 \quad (24)$$

将 $\kappa=3-4\nu$ (平面应变)代入式(23), 并利用弹性常数之间的关系 $\nu=\lambda/2(\lambda+\mu)$ (尹祥

础, 1985), 就得到 $\eta' = (4/\pi)(\lambda + \mu)/(\lambda + 2\mu)$. 这个结果与斯达尔模式(Starr, 1928; Aki, Richards, 1980)的表述一致. 图 5 显示了线弹性断裂力学模型中破裂所在平面上的错动分布和附加应力.

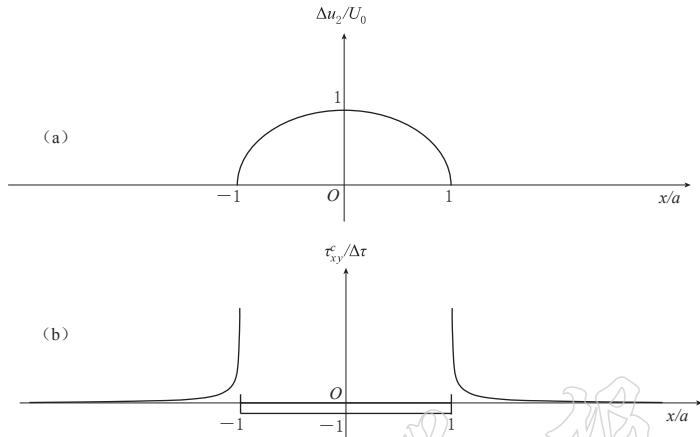


图 5 线弹性断裂力学模型中破裂所在平面上的错动分布(a)和附加应力(b)

Fig. 5 Displacement (a) and additional stress (b) on crack surface in linear elastic fracture mechanics model

从图 5 可以看出, 线弹性断裂力学模型存在破裂端部前缘的应力奇异性. 另外, 线弹性断裂力学模型不能给出分数应力降 ν 的取值范围. 这个问题要由滑动弱化模式来解答.

2.2 裂纹面上的载荷为非均匀分布

这里只讨论裂纹面上的载荷对于中心轴对称分布的情况, 中心轴即图 1 中的 y 轴. 若破裂面上的摩擦力不是均匀的, 记为 $\tau(x)$, 则等效载荷为 $\Delta\tau(x) = \tau_b - \tau(x)$, 称为动态应力降. 附加应力场的威斯特嘎德应力函数为

$$Z_{II_s} = \frac{2z}{\pi \sqrt{z^2 - a^2}} \int_0^a \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{z^2 - \xi^2} \Delta\tau(\xi) d\xi \quad (25)$$

根据对称性, 裂纹两个端部的应力强度因子是一样的(尹祥础, 1985): $K_{II} = \lim_{z \rightarrow a} Z_{II_s} / \sqrt{2\pi(z-a)}$. 将式(25)代入, 得到应力强度因子为

$$K_{II}^+ = K_{II}^- = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} \int_0^a \frac{\Delta\tau(\xi)}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} d\xi \quad (26)$$

取 $y=0$, 即 $z=x+i0$, 代入式(25)和式(16)中的第三式, 就得到裂纹所在平面上的外部剪应力分布为

$$\tau_{xy}(x) = \frac{2x}{\pi \sqrt{x^2 - a^2}} \int_0^a \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{x^2 - \xi^2} \Delta\tau(\xi) d\xi \quad |x| > a \quad (27)$$

将式(25)取不定积分, 得到

$$\tilde{Z}_{II_s} = \frac{2}{\pi} \int \frac{2z}{\pi \sqrt{z^2 - a^2}} \int_0^a \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{z^2 - \xi^2} \Delta\tau(\xi) d\xi \quad (28)$$

注意, 上式中的二重积分的次序不能任意交换, 否则会导致不正确的结果. 将式(28)代入式(17), 分别得到破裂上下两个面的位移, 进一步得到破裂面的位移间断. 其具体步

骤将在后面结合具体模型加以说明.

3 滑动弱化模式

3.1 内聚力的引入

滑动弱化模式最初由 Ida(1972), 以及 Palmer 和 Rice(1973)在滑坡问题中提出. 滑动弱化模式是一个宏观概念, 它是微观意义上的 Barenblatt 的内聚力模型在宏观中的推广. 图 6 表现的就是破裂面上的应力与破裂面的位移间断之间的函数关系示意, 即

$$\tau = \tau(\Delta u) \quad (29)$$

这个关系式叫做摩擦本构关系. 在滑动弱化模型中, 由于裂纹面上存在摩擦力, 尤其是滑动弱化区域内的高摩擦应力, 产生负值的应力强度因子(K_{II}), 与外载产生的应力强度因子(正值)相抵, 从而消除了裂纹端部的应力奇异性, 使端部的应力成为有限值. 因此可以说, 滑动弱化模型是内聚力模型在剪切裂纹情况下的应用与发展. 在滑动弱化模式里, 断层端部的应力不再是奇异的, 断层端部表面能的吸收也与介质直接相关, 这两个物理上的合理性都得到了体现. 因此, 滑动弱化模式比经典的线弹性模式更加接近实际.

Chen 和 Knopoff(1986)计算了破裂面上应力降处处给定, 且线性分布(图 7)的模型, 以及位移间断线性分布, 而应力降非线性分布两种模型的解析解. 何昌荣(He, 1995)讨论了式(29)更普遍的情况, 他计算了小尺度滑动弱化带内在给定介质强度与位移间断本构关系情况下的代数形式的数值近似解. 计算结果表明, 滑动弱化带内的应力分布对于本构关系的曲线形状很敏感, 所计算的结果往往表现出高度非线性, 而滑动弱化带的尺度对于本构关系的曲线形状却不敏感.

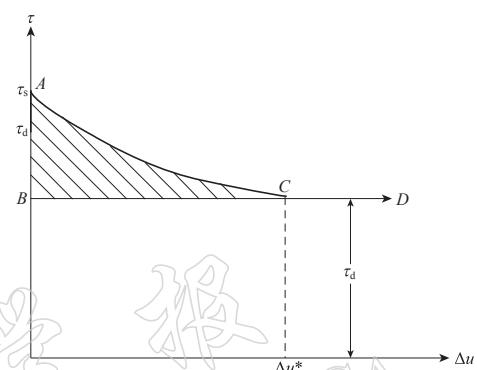


图 6 滑动弱化模式

Fig. 6 Slip-weakening model

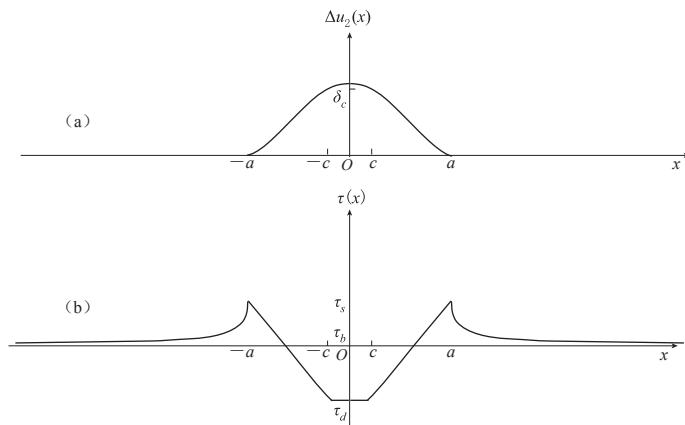


图 7 平面内剪切裂纹所在平面上的错动与应力的静态分布示意图

Fig. 7 Schematic of the slip and static stress on the plane of an in-plane shear crack

利用恒等式^①

$$\frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{x^2 - \xi^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} - \frac{x^2 - a^2}{(x^2 - \xi^2) \sqrt{a^2 - \xi^2}} \quad (30)$$

代入式(26), 得到裂纹所在平面上的外部附加剪切应力为

$$\tau_{xy}^e(x) = \frac{2x}{\pi \sqrt{x^2 - a^2}} \int_0^a \frac{\Delta\tau(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} - \frac{2x \sqrt{x^2 - a^2}}{\pi} \int_0^a \frac{\Delta\tau(\xi) d\xi}{(x^2 - \xi^2) \sqrt{a^2 - \xi^2}} \quad (31)$$

上式的第一项在 $x \rightarrow a$ 时呈现奇异性, 而第二项是非奇异的. 将式(26)代入上式第一项, 在 $x \rightarrow a$ 时的极限成为 $K_{II} / \sqrt{2\pi(x-a)}$, 恰好就是 τ_{xy} 的奇异项在 $\theta_0=0$ 的表达式. 在引入内聚力之后, 式(31)的奇异项(第一项)必然为零, 意味着必然满足

$$\int_0^a \frac{\Delta\tau(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} = 0 \quad (32)$$

这也意味着式(26)给出的总应力强度因子为零. 此时, 式(30)只余下非奇异项(第二项), 即

$$\tau_{xy}^e(x) = \frac{2x \sqrt{x^2 - a^2}}{\pi} \int_0^a \frac{\Delta\tau(\xi) d\xi}{(x^2 - \xi^2) \sqrt{a^2 - \xi^2}} \quad (33)$$

不难导出上式的渐进性质有: 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\tau_{xy}^e(x) \rightarrow 0$.

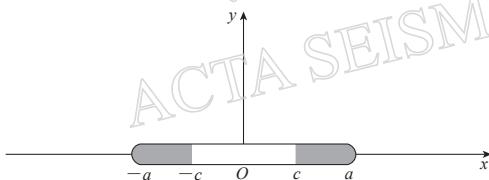


图 8 具有滑动弱化区的一个
二维平面内剪切裂纹

Fig. 8 Schematic in-plane shear crack with
slip-weakening zone $|c| < x < |a|$

考慮具有滑动弱化区的一个二维平面内剪切裂纹, 作为平面内剪切断层的模型(图 8). 裂纹长度为 $2a$. 图 6 中 τ_b 为预应力, τ_s 为静摩擦力的峰值, 或称介质抗剪切强度, τ_d 为滑动摩擦力. $\Delta\tau_e = \tau_s - \tau_d$ 称为有效应力降.

在破裂发生的临界条件和应力降处处给定(但不一定是线性分布)的情况下, 裂纹面($y=0$)上破裂区内应力的分布为

$$\tau'(x) = \begin{cases} \tau_d & 0 < x < c \\ \tau(x) & c < x < a \end{cases} \quad (34)$$

动态应力降是 $\Delta\tau(x) = \tau_b - \tau'(x)$ ($0 < x < a$), 将式(33)代入, 应力降就可以写成

$$\Delta\tau(x) = \begin{cases} \tau_b - \tau_d & 0 < x < c \\ \tau_b - \tau(x) & c < x < a \end{cases} \quad (35)$$

如果不存在滑动弱化区, 则对常数应力降 $\Delta\tau = \tau_b - \tau_d$ 的情形, 由式(26), 应力强度因子为 $K_{II0} = (\tau_b - \tau_d) \sqrt{\pi a}$. 在有内聚力的情况下, 总应力强度因子为

$$K_{II} = (\tau_b - \tau_d) \sqrt{\pi a} - \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} (\tau_b - \tau_d) \cos^{-1} \frac{c}{a} + \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} \int_c^a \frac{\Delta\tau(x)}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} d\xi \quad (36)$$

^① 吴明熙, 私人通訊.

上式等号右边第一项就是无内聚力的应力强度因子 K_{II0} , 第二和第三项就是内聚模量。在引入内聚力以后, 破裂端部应力的奇异项为零, 意味着总应力强度因子为零, 由此得出, 如果内聚模量

$$\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} \int_c^a \frac{\Delta\tau(x)}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} d\xi - \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} (\tau_b - \tau_d) \arccos \frac{c}{a} = (\tau_b - \tau_d) \sqrt{\pi a} = K_{II0} = K_{IIC} \quad (37)$$

时, 裂纹开始扩展。

对于实际地震断层来说, 破裂以压应力作用下的剪切为主, 破裂面上分布着大大小小的凹凸体, 使得破裂面上的应力降 $\Delta\tau(x)$ 多半为高度非线性的, 且分布极不均匀。但是由式(33)可以看出, $\Delta\tau(x)$ 是通过积分来影响破裂周围的应力场的。因此, $\Delta\tau(x)$ 的分布差异对破裂周围的应力分布没有实质性影响。由式(33)还可以看出, 对积分结果起主要作用的是应力降 $\Delta\tau(x)$ 在接近裂纹端部附近的值。

3.2 应力降线性分布的例子

由上一节叙述的理由, 我们在计算断层破裂时库仑应力变化, 特别是在考虑中、远场时, 可以采用简化的模型作为替代, 而不必关注应力分布函数的细节。因此本文只讨论应力降处处给定, 且线性分布(图 7)的情况。本文的模型与 Chen 和 Knopoff(1986)相似, 但本文讨论的是 II 型破裂, 而 Chen 和 Knopoff(1986)讨论的是 III 型破裂。另外, 本文采用的是威斯特嘎德应力函数方法, 而不是边界积分方程方法。

裂纹面($y=0$)上破裂区内应力的分布为

$$\tau(x) = \begin{cases} \tau_d & 0 < x < c \\ \tau_s - (\tau_s - \tau_d) \frac{a-x}{a-c} & c < x < a \end{cases} \quad (38)$$

式中各参量的意义与 3.1 节相同。动态应力降则可以写成

$$\Delta\tau(x) = \begin{cases} (\tau_s - \tau_d) \gamma & 0 < x < c \\ (\tau_s - \tau_d) \left(\gamma + \frac{c}{a-c} - \frac{x}{a-c} \right) & c < x < a \end{cases} \quad (39)$$

式中, γ 为无量纲应力降, 见式(11)。将式(39)代入式(33), 逐项积分, 得到附加应力中的剪切分量为

$$\tau_{xy}^e(x) = (\tau_s - \tau_d) [-\gamma + T(a, x, c)] \quad |x| > a \quad (40)$$

其中

$$T(a, x, c) = \frac{2}{\pi(a-c)} \left[x \cdot \arctan \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{x^2 - a^2}} - c \cdot \arctan \frac{x}{c} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{x^2 - a^2}} \right] \quad (41)$$

在破裂面上($|x| < a$ 部分), 附加应力为

$$\tau_{xy}^e(x) = \tau(x) - \tau_b = -\Delta\tau(x) = -(\tau_s - \tau_d) \left(\gamma + \frac{c}{a-c} - \frac{x}{a-c} \right) \quad |x| < a \quad (42)$$

图 7 给出的是 $\tau_{xy}^e(x)$ 在裂纹所在平面的曲线, 从图中可以看出以下几个特征:

1) 由式(39)、式(40)和式(41)可以导出, 无论从破裂面外还是破裂面内, 只要 $x \rightarrow a$, 总有

$$\tau_{xy}^e(a) = (\tau_s - \tau_d)(1 - \gamma) \quad (43)$$

因此附加应力在破裂端部有界而且连续.

2) 由式(40)和式(41)容易导出

$$\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy}^c(x) = \frac{2\Delta\tau_e}{\pi(a-c)} \left[\arctan \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{x^2 - a^2}} - \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \right] \quad (44)$$

因此, 当 $x \rightarrow a$, $\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy}^c(x) \rightarrow -\infty$; 当 $x \rightarrow \infty$, $\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy}^c(x) \rightarrow 0$.

将式(39)代入式(33), 逐项积分, 并令 $\epsilon = c/a$, 得到

$$\gamma = \frac{2(\sqrt{1-\epsilon^2}) - \epsilon \cdot \arccos \epsilon}{\pi(1-\epsilon)} \quad (45)$$

方程(45)的解是一个单调、单值函数. 这个方程是破裂端部的应力为非奇异的必然结果, 因此也是端部应力非奇异的基本条件.

将式(39)代入式(28), 逐项积分, 得到

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{II,s} = & \frac{2}{\pi} \frac{\tau_s - \tau_d}{a-c} \left[-\frac{\pi c^2}{4} - \frac{\pi}{2} \gamma(a-c) \cdot z + A \sqrt{z^2 - a^2} + \right. \\ & \left. \frac{z^2 + c^2}{2} \frac{1}{2i} \ln \frac{\sqrt{z^2 - a^2} + i\sqrt{a^2 - c^2}}{\sqrt{z^2 - a^2} - i\sqrt{a^2 - c^2}} - cz \cdot \frac{1}{2i} \ln \frac{c \sqrt{z^2 - a^2} + iz \sqrt{a^2 - c^2}}{c \sqrt{z^2 - a^2} - iz \sqrt{a^2 - c^2}} \right] \end{aligned} \quad (46)$$

其中, $A = (\pi/2)\gamma(a-c) + c \cdot \arccos(c/a) - \sqrt{a^2 - c^2}/2$. 将式(44)的条件代入, 得到 $A = \sqrt{a^2 - c^2}/2$.

式(46)中因子 $\sqrt{z^2 - a^2}$ 的辐角式为 $\sqrt{z^2 - a^2} = \sqrt{r_1 r_2} e^{\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)}$. 在破裂面上表面, $y=0$, $\theta_1=\pi$, $\theta_2=0$, $r_1=a-x$, $r_2=a+x$, $\sqrt{z^2 - a^2} = i\sqrt{a^2 - x^2}$. 因此, 破裂面上表面的位移值为

$$\begin{cases} u^{c+} = \frac{\kappa+1}{4\mu} \frac{2}{\pi} \frac{\tau_s - \tau_d}{a-c} \left[A \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2 + c^2}{4} \ln \psi + cx \cdot \frac{1}{2} \ln \phi \right] \\ v^{c+} = \frac{\kappa-1}{4\mu} \frac{2}{\pi} \frac{\tau_s - \tau_d}{a-c} \left[\frac{c^2}{2} + \gamma(a-c) \cdot x \right] \end{cases} \quad |x| < a \quad (47)$$

其中

$$\psi = \begin{vmatrix} \sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - c^2} \\ \sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{a^2 - c^2} \end{vmatrix} \quad \phi = \begin{vmatrix} x \sqrt{a^2 - c^2} + c \sqrt{a^2 - x^2} \\ x \sqrt{a^2 - c^2} - c \sqrt{a^2 - x^2} \end{vmatrix}$$

在破裂面下表面, $y=0$, $\theta_1=-\pi$, $\theta_2=0$, $\sqrt{z^2 - a^2} = -i\sqrt{a^2 - x^2}$, 因此

$$\begin{cases} u^{c-} = -u^{c+} \\ v^{c-} = v^{c+} \end{cases} \quad |x| < a$$

位移间断为

$$\begin{cases} \Delta u_2(x, 0) = u^{c+} - u^{c-} = \frac{\kappa+1}{2\mu} (\tau_s - \tau_d) U(a, x, c) \\ \Delta v_2(x, 0) = v^{c+} - v^{c-} = 0 \end{cases} \quad 0 < |x| < a \quad (48)$$

其中

$$U(a, x, c) = \frac{1}{\pi(a-c)} \left[\sqrt{(a^2 - c^2)(a^2 - x^2)} - \frac{x^2 + c^2}{2} \ln \psi + xc \ln \phi \right] \quad 0 < |x| < a \quad (49)$$

取 $\kappa=3-4\nu$ (平面应变)代入式(48), 破裂面上的位移间断也可以表示为

$$\Delta u_2(x, 0) = \frac{2(1-\nu)}{\mu}(\tau_s - \tau_d)U(a, x, c) \quad (50)$$

我们再次看到, II型破裂面的 y 方向位移分量 ν , 虽然它在破裂面上的位移间断为零, 但上下破裂面上各自的位移值 ν^+ 和 ν^- 却不为零.

与 Chen 和 Knopoff(1986)文中的式(34)比较, 可以看出本文的结果与他们的结果相似, 但本文讨论的是II型裂纹, 而不是III型, 因此多出个因子 $(1-\nu)$. 另外, 本文给出的是破裂面的位移间断, 而不是位移, 因此两者相差 2 倍.

根据模型的假定, 滑动弱化区内缘 $x=c$ 处的位移间断是临界值 δ_c , 即 $\Delta u_2(a, 0)=\delta_c$. 代入式(48)和(49), 取 $x=c$, 即

$$\frac{2\mu\delta_c}{(\kappa+1)(\tau_s - \tau_d)} = U(a, c, c) = a \cdot \frac{1 - \epsilon^2 + 2\epsilon^2 \ln \epsilon}{\pi(1 - \epsilon)} \quad (51)$$

上式就是用临界位移间断表示的破裂准则, 为后面叙述方便, 我们引入特征变量 λ_2 和 $\zeta(\epsilon)$, 将式(51)写成

$$\lambda_2 = a \cdot \zeta(\epsilon) \quad (52)$$

其中

$$\lambda_2 = \frac{2\mu\delta_c}{(\kappa+1)(\tau_s - \tau_d)} \quad (53)$$

表示特征距离, 而

$$\zeta(\epsilon) = \frac{1 - \epsilon^2 + 2\epsilon^2 \ln \epsilon}{\pi(1 - \epsilon)} \quad (54)$$

为无量纲参数. 将式(45)与式(52)联立, 以 λ_2 作为距离的量度单位, 在 γ , a 和 c 中只要有任意一个变量是确定的, 那么另外两个变量也就是唯一确定的, 其中 a 是 γ 的减函数. 记 $c_1=a-c$ 为滑动弱化区的长度, 可以看出 c_1 是 γ 的增函数(图 9). 图 9 与 Chen 和 Knopoff(1986)文中的图 4c 基本相同, 只是右纵轴(c_1/λ_2)的位置调整到与 a/λ_2 的下限重合. 另外, 出于断裂力学的习惯, 本文将符号 a 和 c 做了互换.

式(40)、式(45)和式(48)就是本文得到的解, 连同式(42)一起构成了破裂所在平面上的全部附加应力和位移间断分布. 图 7 显示的就是本文计算的II型(平面内剪切)裂纹所在平面上的应力与错动的静态分布示意图.

3.2.1 $c \rightarrow 0$ 的极限情况

对于本节采用的滑动弱化模式, 存在 γ_m 的上限, 当 $\gamma > \gamma_m$ 时解不存在. 这个 γ_m 相应

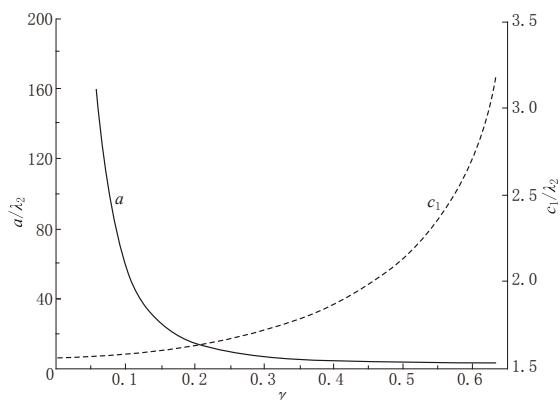


图 9 破裂半长度 a 和滑动弱化区的长度 c_1 作为 γ 的函数

Fig. 9 Crack half-length a and length of the slip-weakening zone c_1 as function of γ

于 $c \rightarrow 0$, 即 $\epsilon \rightarrow 0$ 的极限情况, 代入式(45), 得到

$$\gamma_m = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \gamma = \frac{2}{\pi} \quad (55)$$

由式(54), 利用洛必达(L'Hospital)法则得到(后面的极限和渐进式大都可以采用类似的方法推导)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \zeta(\epsilon) = \frac{1}{\pi} \quad (56)$$

代入式(52), 得到用临界位移间断表示的破裂准则为 $\lambda_2 = a/\pi$. 由此可以得出这种极限情况下的 a 值下限, 记为 $a(\gamma_m)$.

$$a(\gamma_m) = \pi \lambda_2 \quad (57)$$

取 $\mu = 3 \times 10^4$ MPa, $\kappa = 3 - 4\nu$ (平面应变), $\delta_c = 0.5$ m, $\nu = 0.25$, $\Delta\tau_e = 60$ MPa(Knopoff, Chen, 2009), 代入式(53)得到 $\lambda_2 \approx 250$ m; 代入式(57)得到 $a(\gamma_m) \approx 785$ m. 据郭增建等(1973)结果, 强震震级 M_s 与断层长度 $2a$ (单位为 km)的关系为: $M_s = 3.3 + 2.1\lg(2a)$. 因此上述破裂尺度相当于一次 3.7 级地震.

3.2.2 小尺度滑动弱化区的情况

当 $c_1 = (a - c) \ll a$ 时, 称 c_1 为小尺度滑动弱化区. $c_1 \rightarrow 0$ 相当于 $\epsilon = c/a \rightarrow 1$. 在 $c_1 \rightarrow 0$ 的情况下, 由式(54), 此时 $\zeta(\epsilon) \rightarrow 0$, 代入式(52), 可知此时有 $a \rightarrow \infty$. 上述的极限情况实际上不存在, 但说明若 c_1 足够小, 则 a 必须很大才能达到临界破裂的条件, 这种情况似乎出现在大地震发生的时候. 鉴于这种情况的重要性, 我们在下面做出更多的讨论.

1) 由式(52)和式(53)可以导出, c_1 的下限值为一个与介质有关的常数, 即

$$\lim_{c_1 \rightarrow 0} \frac{c_1}{\lambda_2} = \frac{\pi}{2} \quad (58)$$

如上节所述, 若取 $\lambda_2 \approx 250$ m, 则 $c_1 \approx 393$ m.

2) 由式(45)可导出, γ 在 $c_1 \rightarrow 0$ 的渐进式为

$$\gamma \approx \frac{2}{\pi} \arccos \epsilon \quad (59)$$

且 $\gamma \rightarrow 0$. 代入式(43)得到当 $c_1 \rightarrow 0$ 时, $\tau_{xy}^c(a) \rightarrow \Delta\tau_e$. 此时在破裂端部($x = a$)库仑应力变化可充分接近最大值 $\Delta\tau_e$.

3) 由式(40)可进一步得到当 $c_1 \rightarrow 0$ 时

$$\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy}^c(x) \rightarrow \frac{4\Delta\tau_e}{\pi \sqrt{x^2 - a^2}} \frac{1}{(1 - \epsilon^2)^{3/2}} \rightarrow -\infty \quad (\text{当 } c_1 \rightarrow 0) \quad (60)$$

不仅在 $x = a$ 处成立, 而且在 $|x| > a$ 处处成立. 即此时附加应力在 $|x| > a$ 处随距离增加衰减最快, 在稍远处就急剧接近于零.

4) 利用式(59), 代入式(41)可以导出在 $x \gg a$ 且 $c_1 \rightarrow 0$ 时, $T(a, x, c)$ 的渐进式为

$$T(a, x, c) \approx \frac{2}{\pi} \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \arccos \epsilon \quad (61)$$

将式(59)和式(61)代入式(40), 就得到在 $x \gg a$ 且 $c_1 \rightarrow 0$ 时, τ_{xy}^c 退化为渐进式

$$\tau_{xy}^c \approx \gamma \Delta\tau_e \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} - 1 \right) \quad (x \gg a) \quad (62)$$

上式与式(20)在形式上完全相同。因此,对于小尺度弱化区(强地震)的问题,可以用较简单的线弹性断裂力学模型作为退化形式来代替滑动弱化模型计算远场库仑应力变化,但必须先求出 γ 值。经过验算,替代方法造成的误差不超出2%(见4.1节)。

3.2.3 破裂所在平面上附加应力的分布与 $\epsilon=c/a$ 的关系

图10显示了 $\tau_{xy}^c(x)$ 在破裂所在平面上的分布曲线。由于图形对于 y 轴对称,这里只画出了右半部。其中 x 坐标以 a 为单位, $\tau_{xy}^c(x)$ 用 $\Delta\tau_e$ 作归一。这里只画了 $\epsilon=c/a=0, 0.5$ 和 0.99 三种不同的分布曲线。表1则列出了5种不同 ϵ 值的数值计算结果。从数值计算结果可以看出以下规律:① $\tau_{xy}^c(a)$ 随 ϵ 增加而增大;②当 $\epsilon<0.5$ 时, $\tau_{xy}^c(x)$ 随距离衰减较 $\epsilon=0$ 情况慢,但当 $\epsilon>0.5$ 时, $\tau_{xy}^c(x)$ 随距离衰减加快,尤其到 $\epsilon>0.99$ 以上, $a/\lambda_2>157.6$ (强地震)时, $\tau_{xy}^c(x)$ 随距离衰减达到急剧的程度。

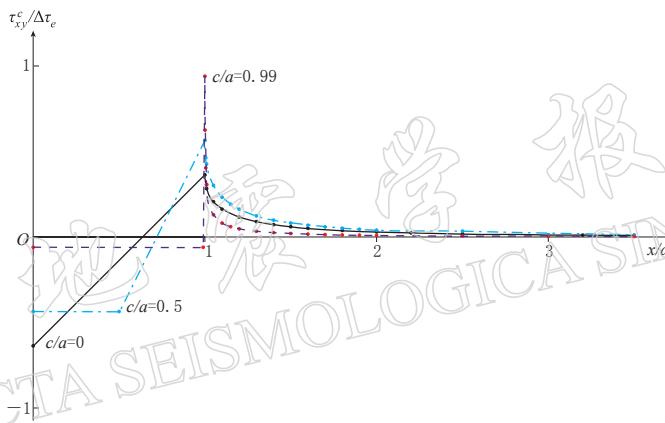


图10 滑动弱化模型破裂所在平面上的附加应力分布(右半部)

Fig. 10 Additional stress (right half) of the slip-weakening model on crack plane

表1 破裂面外附加应力的若干结果

Table 1 Different results of additional stress outside crack surface

x/a	$\tau_{xy}^c / \Delta\tau_e$				
	$c/a=0.0$	$c/a=0.1$	$c/a=0.5$	$c/a=0.9$	$c/a=0.99$
1.0	0.3633	0.4002	0.5640	0.8092	0.9399
2.0	0.03004	0.03291	0.03985	0.02670	0.009198
3.0	0.01242	0.01360	0.01628	0.01059	0.003611
4.0	0.006825	0.007472	0.008909	0.005742	0.001953
5.0	0.004322	0.004731	0.005632	0.003616	0.001228
8.0	0.001670	0.001828	0.002172	0.001388	0.0004709
10.0	0.001066	0.001167	0.001386	0.0008849	0.0003001

3.2.4 破裂停止后最终应力降产生的库仑应力变化

以上讨论的是破裂临界条件下动态应力降产生的附加应力。但破裂面上的应力实际上是随时间变化的(Yamashita, 1976)。图11显示的是破裂面上某一点在地震破裂前后所经历的剪切应力分量的变化。其中经历了: τ_b (震前区域应力), τ_s (滑动起始时达到介质抗剪切强度), τ_d (滑动摩擦应力), τ_1 (滑动停止后剪切应力因愈合而回升的终止值)。因此破裂停止后的最终应力降为 $\Delta\tau=\tau_b-\tau_1$ 。

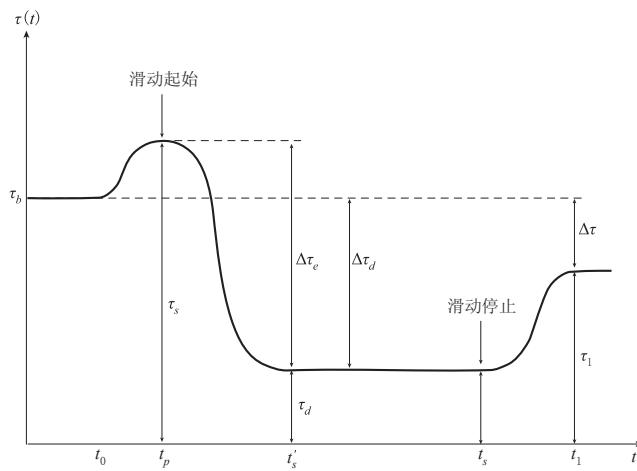


图 11 断层面上某点的剪切应力随时间的变化(引自 Yamashita, 1976; Knopoff, Chen, 2009)

Fig. 11 Shear stress variation with time at a point on crack surface
(by Yamashita, 1976; Knopoff, Chen, 2009)

我们假定破裂扩展停止以后, 破裂面上的应力分布是

$$\tau(x) = \begin{cases} \tau_1 & 0 < x < c' \\ \tau'_s - (\tau'_s - \tau_1) \frac{a-x}{a-c'} & c' < x < a \end{cases} \quad (63)$$

记 $\epsilon' = c'/a$,

$$\tau_1 = \tau_d + \alpha(\tau_s - \tau_d) \quad (64)$$

式中, α 为愈合系数, 且 $\tau_1 < \tau_b$, 因此 $\alpha < \gamma$.

$$\tau'_s = \tau_s - \beta(\tau_s - \tau_d) \quad (65)$$

式中, β 为松弛系数, 且 $\tau'_s > \tau_b$, 因此有 $\beta < 1 - \gamma$.

破裂面上的应力降是 $\Delta\tau(x) = \tau_b - \tau(x) (0 < x < a)$. 记 $\Delta\tau_1 = \tau_b - \tau_1$ 为最终应力降, 并记 $\gamma' = (\tau_b - \tau_1)/(\tau'_s - \tau_1)$ 为滑动停止后无量纲应力降, 可以看出

$$\gamma' = \frac{\gamma - \alpha}{1 - (\alpha + \beta)} \quad (66)$$

上式表明, γ' 在滑动停止后是随时间变化的. 最终应力降可以写成

$$\Delta\tau_1(x) = \begin{cases} (\tau'_s - \tau_1)\gamma' & 0 < x < c' \\ (\tau'_s - \tau_1)\left(\gamma' + \frac{c'}{a-c'} - \frac{x}{a-c'}\right) & c' < x < a \end{cases} \quad (67)$$

上式与式(39)在形式上十分相似, 因此采用与 3.1 节相同的步骤, 得到滑动停止后破裂的附加应力中的剪切分量为

$$\tau'_{xy}(x) = [1 - (\alpha + \beta)](\tau_s - \tau_d)[T(a, x, c') - \gamma'] \quad |x| > a \quad (68)$$

其中, $T(a, x, c')$ 是将式(41)中的 c 替换为 c' . 与式(45)类似, 有

$$\gamma' = \frac{2 \sqrt{1 - \epsilon'^2} - \epsilon' \cdot \arccos \epsilon'}{\pi(1 - \epsilon')} \quad (69)$$

上式的解也是一个单调、单值函数。这个方程仍然是破裂端部的应力为非奇异的必然结果，因此也是端部应力非奇异的基本条件。上式表明， $\epsilon' = c'/a$ 及 c' 在滑动停止后同样是随时间变化的。破裂面外的总应力为 $\tau'(x) = \tau_b + \tau'_{xy}^c(x)$ ($|x| > a$)。在破裂面内，附加应力(库仑应力变化)为

$$\tau'_{xy}^c(x) = \tau'(x) - \tau_b = -\Delta\tau_1(x) \quad |x| < a \quad (70)$$

又从破裂面内、外 $x \rightarrow a$ 时，

$$\tau'_{xy}^c(a) = \frac{1 - (\gamma + \beta)}{1 - (\alpha + \beta)}(\tau_s - \tau_d) \quad (71)$$

由 $\alpha < \gamma$, $\beta < 1 - \gamma$, 于是有 $\alpha + \beta < 1$, 且

$$1 > \frac{1 - (\gamma + \beta)}{1 - (\alpha + \beta)} > 0 \quad (72)$$

利用上式，将式(71)与式(43)相对比，显然在破裂端部

$$\tau'_{xy}^c(a) < \tau_{xy}^c(a) \quad (73)$$

由式(68)还可以得出，随着破裂面上的愈合和端部的应力松弛，必然有 $\alpha + \beta$ 逐渐趋向于 1。此时库仑应力变化 $\tau'_{xy}^c(x)$ 逐渐萎缩。

4 库仑应力变化能否触发远场的下一次地震？

4.1 3 种模型的对比

表 2 比较了 3 种模型的附加应力，在 $y/a=0$, $x/a=10$ 的位置，在第二和第三种模型中取 $\Delta\tau_e=60$ MPa(Knopoff, Chen, 2009)，参照滑动弱化模型(动态)取 $c/a=0.99$ 情况，利用式(45)算得此时 $\gamma=0.060028$ ；取 $\mu=3 \times 10^4$ MPa, $\kappa=3-4\nu$ (平面应变), $\delta_c=0.5$ m, $\nu=0.25$, $\Delta\tau_e=60$ MPa, 代入式(52)–(54)计算得到 $2a \approx 78.8$ km。据郭增建等(1973)给出的强震震级 M_s 与断层长度 $2a$ 的关系，上述破裂尺度相当于一次 7 级地震。分别用式(10)、(20)和式(40)计算得到附加应力 τ_{xy}^c ，如表 2 所示。

表 2 3 种模型的附加应力($y/a=0$, $x/a=10$)

Table 2 Additional stress from three crack models($y/a=0$, $x/a=10$)

模型	伏尔泰拉错动	线弹性断裂力学	滑动弱化(动态)
τ_{xy}^c /MPa	0.000 929	0.018 34	0.018 01

可以看出，3 种模型计算得到的远场附加应力中，伏尔泰拉错动模型比滑动弱化模型低估了一个量级还多，线弹性断裂力学模型在经过 γ 值修正后与滑动弱化模型的结果之间相互差别不大于 2%。显然，如果不经过修正而将 γ 值错取为 1，则传统的线弹性断裂力学模型会高估一个量级还多。但表 2 采用的是破裂动态激发过程的零频成分，如果将破裂停止后的破裂面愈合和端部应力松弛也计算进去，则对远场 τ_{xy}^c 的粗略估计至少还得在动态情况的基础上打 $1 - (\alpha + \beta)$ 的折扣。

4.2 触发下一次地震需要多大的力

从近年的超深井钻的原地测量中可以得到一些深部数据。例如德国的 KTB 计划完成的深井钻探在 8 km 深度注水试验结果显示，当注水压力增加 1 MPa 时即可诱发小震发生。表明该处已处于接近岩石破坏的临界状态(Zoback *et al.*, 2002)。可以看出，这个结果

比表 2 中列出的最大结果也还要高出两个量级。即使是未经 γ 值修正(即将 γ 值错取为 1)的线弹性断裂力学模型也只达到 KTB 钻井结果的 0.3。

5 讨论与结论

1) 在 3.2 节中讨论的 $a(\gamma_m)$ 尺度和 3.2.2 小节中讨论的 c_1 的下限值是以有效应力降 $\Delta\tau_e = \tau_s - \tau_d$ 和位移间断临界值 δ_c 值为固定的常数为前提的。然而我们必须说明, 这里所说的常数只有字面上的意义。在地震破裂过程中, 破裂面克服摩擦应力所做的非弹性功(上下两个表面)(Andrews, 1976, Aki, Richards, 1980)为

$$2G = \int_0^{\delta_c} [\tau(\Delta u) - \tau_d] d\Delta u \quad (74)$$

从字面上看, 有效应力降 $\Delta\tau_e = \tau_s - \tau_d$ 和位移间断临界值 δ_c 似乎都与断层长度 $2a$ 无关, 因而表面能 G 也与 $2a$ 无关, 在破裂过程中为一个不变量。但是 Andrews(1976)指出, 这个假定并不切合实际, 因为由大地震资料测到的 G 值为 10^1 J/cm^2 左右, 而由实验室测得的岩样的 G 值则为 10^{-4} J/cm^2 左右(Aki, Richards, 1980), 两者相差好几个量级, 因此, G 与 $2a$ 的关系是必须考虑的。Andrews 的解释是, 对于宏观断层来说, 它的端部包含着大量按体积分布的微裂纹, 这些微裂纹的总表面面积比起等积投影面积(即把宏观断层等效于一个平面)要大出几个量级, 因此 $\Delta\tau_e$ 及 δ_c 的值实际上应该是 $2a$ 的函数。随着断层增长, 其端部附近的微裂纹数量和塑性变形体积加大, 从而吸收的表面能量增加, 因此对于不同尺度的断层来说, $\Delta\tau_e$ 及 δ_c 的值都具有不同的内容, 它们与 G 的关系只具有形式上的意义。

2) 本文所说的“库仑应力变化”是指地震发生后的断层静态(或零频)附加应力变化, 而不是指地震破裂瞬间产生的非零频辐射应力波对远场地震的触发效应(其值比静态附加应力似乎要大得多)。由于地震破裂的静态附加应力在远场很低, 只有不到 0.01 MPa , 其远程相关效应早就有人(Hill *et al*, 1993)提出了质疑, 他们认为地震破裂的动态辐射应力波(主要是横波或瑞雷波到达的压缩相)可以解释远程触发现象, 但由于一次地震后对远场的触发作用往往可以持续几个星期, 因此仅仅用地震波辐射来解释远程触发作用仍然不够充分。就是说, 远场触发的机理可能并不唯一。当然, 对此也有不同看法, 有些学者认为不到 0.01 MPa 的应力变化可以触发地震(赵纪东, 2010), 甚至台风也可以触发某些地方的慢地震。这方面还不能说已有定论。

3) 本文的评估结果表明, 用库仑应力变化来解释地震的远程相关现象迄今还不能得到理论和观测资料的足够支持, 但库仑应力变化对近场的作用仍然是不能忽视的, 因此还是需要仔细选择模型和有关参数。我们的分析表明, 用伏尔泰拉错动模型尽管在计算上比较简便, 但存在诸多弊病, 它导致了破裂面上不应有的应力奇异性, 对库仑应力变化的近场的分布图象计算存在重大扭曲, 而且对远场的估计存在量级上的偏低。因此, 对于中、远场的库仑应力变化, 我们建议采用线弹性断裂力学模型来估算, 这样可以兼顾量级上的合理性和操作上的简便。如果能测出破裂面上的位移间断平均值 U , 则可以利用式(22): $\Delta U_0 = 4U/\pi$, 构筑成破裂面上位移间断的椭圆式分布 $\Delta u_2(x) = \Delta U_0 \sqrt{1 - (x/a)^2}$, 以及 $\Delta\tau = [(\kappa + 1)/2\mu a] \cdot \Delta U_0$, 进一步计算库仑应力变化。

4) 本文仅为模型意义上的概念性讨论和量级上的评估, 并不是定量的计算, 因此仅考虑了平面条件下, 传播介质为连续、各向同性、线弹性的情况。实际问题是三维的, 介质是

非连续、各向异性且非弹性的,远比本文的模型复杂得多。

5) 库仑应力变化在本质上是作为面力传递的。我们的分析表明,对面力在远场的传播作用可能是被不适当当地夸大了,而对其他力,包括体力和孔隙流体作用则估计不足。尽管在已有的工作中考虑了被触发的断层内的流体孔隙压力的变化,但是现有的模型对于震源体内的孔隙压力变化及其传播仍然研究不足。在应力分析边值问题的 Cauchy 方程的推导过程中,作为面力的应力项被保留,而体力项则因体元的体积是比体元表面积更高阶的小量还小,所以被略掉了。在弹性力学的震源区以外的运动方程(或波动方程)的推导过程中,作为面力的应力项被保留,而体力项则常常被略掉,因为,体力项被看作是常数。上述结论是在考察微观单元的快速运动的问题中导出的,对于宏观大尺度、长时间运动与变形的问题则不一定适用。在宏观的远场相关问题上,体力在时间和空间上的变化是用构造边界上块体体力所占总体积的积分来计算,因此面力与体力二者作用的比例会发生重大变化,甚至可能与微观问题相反,此时体力的作用可能比面力更大。地震的成因与构造块体的运动有关,对其分析必须把地球作为整体来考虑。相反地,仅仅采用局部的微观分析并无限制地外推就往往出现弊病。因为从整体上,构造块体受力情况不仅与断层运动有关,而且必然涉及到重力均衡和地球自转速率变化引起的惯性力,还要涉及到流体的孔隙压力作用等。而流体的孔隙压力在连通的条件下在远场的衰减远比库仑应力变化要慢。近年来,这些因素正在受到越来越大的重视,有可能为解释地震远程相关现象找出新途径(李世愚等,2009)。

参 考 文 献

- 陈运泰,许力生,张勇,杜海林,冯万鹏,刘超,李春来,张红霞. 2008. 2008年5月12日汶川特大地震震源特性分析报告[R/OL]. [2009-12-20]. www.cea-igp.ac.cn/汶川地震专题/地震情况/初步研究及考察结果(一)PDF.
- 范天佑. 1978. 断裂力学基础[M]. 北京: 江苏科学技术出版社: 510.
- 郭增建,秦保燕,徐文耀,汤泉. 1973. 震源孕育模式的初步探讨[J]. 地球物理学报, **16**(1): 43-48.
- 李世愚,张洪魁,和泰名,赵玉林,钱复业. 2009. 地球深部流体的状态及其在震源物理中的意义[J]. 物理, **38**(2): 680-689.
- 万永革,吴忠良,周公威,黄静,秦立新. 2002. 地震应力触发研究[J]. 地震学报, **24**(5): 533-551.
- 尹祥瑞. 1985. 固体力学[M]. 北京: 地震出版社: 512.
- 赵纪东. 2010. 气候变化可能触发地震和火山[J]. 国际地震动态, (1): 10-13.
- Aki K, Richards P G. 1980. *Quantitative seismology, theory and methods*[M]. San Francisco: W H Freeman and Company: 867.
- Andrews D J. 1976. Rupture velocity of plane-strain shear cracks[J]. *J Geophys Res*, **81**(B32): 5679-5687.
- Chen Y T, Knopoff L. 1986. Static shear crack with a zone of slip weakening[J]. *Geophys J R astr Soc*, **87**(3): 1005-1024.
- Harris R A. 1998. Introduction to special section: Introduction to special section: stress triggers, stress shadows, and implications for seismic hazards[J]. *J Geophys Res*, **103**(B10): 24347-24358.
- Harris R A. 2000. Earthquake stress triggers, stress shadows, and seismic hazard[J]. *Current Science*, **79**(9): 1215-1225.
- He C R. 1995. Slip-weakening constitutive relation and the structure in the vicinity of a shear crack tip[J]. *Pure Appl Geophys*, **145**(3-4): 747-757.
- Hill D P, Reasenberg P A, Michael A, Arabaz W J, Beroza G, Brumbaugh D, Brune J N, Castro R, Davis S, et al. 1993. Seismicity remotely triggered by the magnitude 7.3 Landers, California, earthquake[J]. *Science*, **260**(5114):

- 1617–1623.
- Ida Y. 1972. Cohesive force across the tip of a longitudinal shear crack and Griffith's specific surface energy[J]. *J Geophys Res*, **77**(20): 3796–3805.
- Kanamori H, Anderson D L. 1975. Theoretical basis of some empirical relation in seismology[J]. *Bull Seism Soc Amer*, **65**(5): 1073–1095.
- Kanamori H. 1994. Mechanics of earthquakes[J]. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, **22**(1): 207–237.
- Knopoff L, Chen Y T. 2009. Single couple component of the far field radiation from dynamical fractures[J]. *Bull Seism Soc Amer*, **99**(2B): 1091–1102.
- Maruyama T. 1969. Stress field in the neighborhood of a crack[J]. *東京大学地震研究所汇报*, **47**(1): 1–29.
- Ohnaka M. 2003. A constitutive scaling law and a unified comprehension for frictional slip failure, shear fracture of intact rock, and earthquake rupture[J]. *J Geophys Res*, **108**(B2), 2080, doi 10.1029/2000JB000123.
- Palmer A C, Rice J R. 1973. The growth of slip surfaces in the progressive failure of over-consolidated clay[J]. *Proc Roy Soc London Ser A*, **332**(1591): 527–548.
- Rice J R, Sammis C G, Parsons R. 2005. Off-fault secondary failure induced by a dynamic slip-rupture[J]. *Bull Seism Soc Amer*, **95**(1): 109–134, doi 10.1785/0120030166.
- Ruff L J. 2002. State of stress within the earth[M]//Lee W H K, Jennings P, Kisslinger C, Kanamori H eds. *International Handbook of Earthquake and Engineering Seismology*. Amsterdam: Academic Press for International Association of Seismology and Physics of the Earth's Interior, **81A**: 539.
- Starr A T. 1928. Slip in a crystal and rupture in a solid due to shear[J]. *Proc Comb Phil Soc*, **24**(04): 489–500.
- Westergaard H M. 1939. Bearing pressures and cracks[J]. *J Appl Mechan*, **6**: A49–A53.
- Yamashita T. 1976. On the dynamic process of fault motion in the presence of friction and inhomogeneous initial stress. Part I: Rupture propagation[J]. *J Phys Earth*, **24**: 417–444.
- Zoback M D, Zoback M L. 2002. State of stress in the earth's lithosphere[M]//Lee W H K, Jennings P, Kisslinger C, Kanamori H eds. *International Handbook of Earthquake and Engineering Seismology*. Amsterdam: Academic Press for International Association of Seismology and Physics of the Earth's Interior, **81A**: 559–568.