

双相各向异性介质中弹性波传播 伪谱法数值模拟研究^{*}

刘 洋 李承楚

(中国北京 102200 石油大学地球科学系)

摘要 当地下介质存在各向异性时,在观测坐标系下的弹性参数与自然坐标系下的弹性参数不一定相同.首先,根据势能密度和耗散能密度与坐标轴无关的原理,推导出了双相各向异性介质中观测坐标系下弹性参数与自然坐标系下弹性参数之间的关系;然后,从任意双相各向异性中弹性波波方程出发,得出了该方程的伪谱法数值解法;最后,通过数值模拟,观测到了存在于双相各向异性介质中的 4 类波,即快纵波、慢纵波、快横波和慢横波.在双相各向异性介质中,SV 波传播的波前面上仍然存在波面尖角,这些尖角在界面上要发生反射和透射.另外,数值模拟结果中可见转换慢纵波和慢纵波的转换波.

关键词 双相各向异性 自然坐标 观测坐标 弹性参数 数值模拟 伪谱法

引言

双相各向异性介质中弹性波传播规律的研究,在地球物理勘探和地震工程等领域具有广泛的实际意义. Biot(1955, 1956, 1962)奠定了双相介质波动传播理论的基础. Biot 双相各向异性理论假定:固体骨架是统计各向异性的,孔隙中充满着各向同性、具有粘滞性和可压缩性的流体,骨架和流体之间存在相对位移,固体和流体的接触面可以形成摩擦. 根据 Biot 理论,在双相各向异性介质中,存在两类纵波和两类横波:第 1 类纵波,即快纵波,类似于无孔隙单相各向异性介质中的纵波;第 2 类纵波,即慢纵波,具有较强的频散和衰减,并具有扩散过程的性质,类似于热传导过程. 两类横波类似于无孔隙单相各向异性介质中的横波. Zhu 和 McMechan(1991)通过对双相各向同性介质中弹性波波场的模拟,观测到了双相各向同性介质中的 3 类波,并且研究了孔隙度、渗透率和固流相之间的摩擦随空间变化对 3 类波的影响. Dai 等(1995)通过双相各向同性介质中弹性波传播有限差分数值模拟,分析得到了砂岩含不同流体时对反射波振幅的影响. 刘银斌等(1994)曾分析柱坐标系下横向各向同性介质弹性波传播特征. 魏修成(1995)对双相各向异性介质中弹性波进行了进一步的研究,并进行了有限差分数值模拟. 刘洋和李承楚(1999)计算分析了频率对双相横向各向同性介质中弹性波的相速度、衰减、双相振幅比和偏振特征的影响.

为了深入研究弹性波在双相各向异性介质中的传播规律,本研究首先根据势能密度和

^{*} 中国石油天然气总公司“九五”重点科技攻关项目资助.
1999-05-18 收到初稿, 1999-10-18 收到修改稿并决定采用.

耗散能密度与坐标轴无关的原理, 推导出了双相各向异性介质中, 在观测坐标系下弹性参数与在自然坐标系下弹性参数之间的关系; 然后, 推导出了双相各向异性介质中波动方程的伪谱法数值解法; 最后, 利用伪谱法数值模拟方法, 观测到了双相各向异性介质中 4 类弹性波、SV 波波面尖角、横波分裂以及波的反射和透射现象。

1 观测坐标系与自然坐标系下弹性参数的关系

在各向同性介质中, 由于介质沿各个方向的弹性性质是完全相同的, 所以弹性参数的描述在不同坐标系下都是相同的。而在各向异性介质中, 不同坐标系下对弹性参数的描述则不一定相同。

1.1 观测坐标系与自然坐标系

自然坐标系是指由本征方程所描述的坐标系, 其对称主轴同最小水平应力方向一致, 3 个坐标轴方向就是其本征方向, 所以有时也把自然坐标系称为本征坐标系或局部坐标系。

自然坐标系在实际地层中是客观存在的, 不依赖于人为确定的观测坐标系。观测坐标系是指人们在实际观测或数值模拟中确定的坐标系。

当观测坐标系与自然坐标系不重合时, 观测坐标系与自然坐标系的关系如图 1 所示。图 1 中, $oxyz$ 为观测坐标系, $ox_1x_2x_3$ 为自然坐标系, oA 为 oxy 与 ox_1x_2 两平面的交线, 箭头方向表示角度取正值的方向。

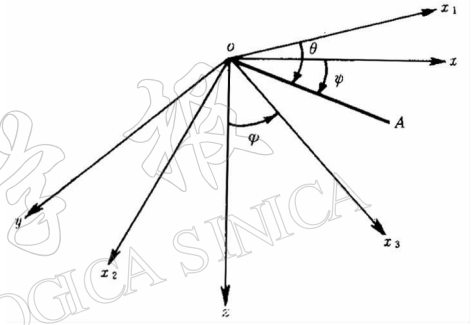


图 1 观测坐标系与自然坐标系关系示意图

观测坐标系与自然坐标系之间的坐标变换关系为

$$(x, y, z)^T = \mathbf{A}(x_1, x_2, x_3)^T \quad (1)$$

其中, 上标 T 表示对矩阵的转置, 变换矩阵 \mathbf{A} 的表达式为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta - \cos\varphi\sin\psi\sin\theta & -\cos\psi\sin\theta - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta & \sin\varphi\sin\psi \\ \sin\psi\cos\theta + \cos\varphi\cos\psi\sin\theta & -\sin\psi\sin\theta + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta & -\sin\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad (2)$$

则可推导出观测坐标系下的应变 e' 与自然坐标系下的应变 e 的关系为

$$e = \mathbf{M}^T e' \quad (3)$$

其中, $e = (e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy})^T$, $e' = (e'_{xx}, e'_{yy}, e'_{zz}, e'_{yz}, e'_{zx}, e'_{xy})^T$, 变换矩阵 \mathbf{M} 为坐标变换矩阵 \mathbf{A} 的 Bond 变换矩阵 (Winterstein, 1990)。为叙述方便, 观测坐标系下相应的位移、应变和弹性参数均带有上角标。

1.2 双相各向异性介质中的弹性参数

双相各向异性介质的弹性参数由固相参数矩阵 \mathbf{C} 、流相参数向量 \mathbf{Q} 、固流相耦合参数 \mathbf{R} 和耗散参数矩阵 \mathbf{B} 来描述 (Biot, 1956)。其中, $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{6 \times 6}$, $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6)^T$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{3 \times 3}$, \mathbf{B} 和 \mathbf{C} 均为对称阵。

在自然坐标系下, 双相各向异性介质的应变能密度 PE 可表示为

$$PE = (\boldsymbol{\sigma}^T e + \varepsilon_s)/2 \quad (4)$$

其中, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{xy})^T$ 表示固体骨架应力张量, s 表示孔隙流体有效压力, ε

是孔隙流体的应变, \mathbf{e} 为固相应变张量.

在双相各向异性介质中, 介质中应力与应变的关系满足广义虎克定律

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}^T & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \epsilon \end{pmatrix} \quad (5)$$

其中, \mathbf{C} 为固体骨架的弹性参数, $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{6 \times 6}$; R 为孔隙流体的弹性参数; \mathbf{Q} 为表征固体体积与流体体积变化之间耦合关系, $\mathbf{Q} = (Q_i)_{1 \times 6}$.

将式(5)代入式(4)并化简得

$$PE = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{C}^T \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \epsilon + \frac{1}{2} R \epsilon^2 \quad (6)$$

在上式中, 等式右边第 1 项表示固相应变能密度, 第 2 项表示固流耦合相应变能密度, 第 3 项表示流相应变能密度.

类似地, 我们可以得到观测坐标系下的应变能密度为

$$PE' = \frac{1}{2} \mathbf{e}'^T \mathbf{C}'^T \mathbf{e}' + \mathbf{e}'^T \mathbf{Q}' \epsilon' + \frac{1}{2} R' \epsilon'^2 \quad (7)$$

由于固相应变能密度、固流耦合相应变能密度和流相应变能密度均不随坐标系的变化而变化, 而且流体是各向同性的, 并且利用式(3), 以及任意的 \mathbf{e}' 均满足应变能密度相等, 所以必有

$$\begin{cases} \mathbf{C}' = \mathbf{M} \mathbf{C} \mathbf{M}^T \\ R' = R \\ \mathbf{Q}' = \mathbf{M} \mathbf{Q} \end{cases} \quad (8)$$

自然坐标系和观测坐标系下的耗散能密度 DE 和 DE' 分别为

$$DE = (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})^T \mathbf{B} (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) / 2 = (\bar{\mathbf{u}}' - \mathbf{u}')^T \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{A}^T (\bar{\mathbf{u}}' - \mathbf{u}') / 2 \quad (9)$$

$$DE' = (\bar{\mathbf{u}}' - \mathbf{u}')^T \mathbf{B}' (\bar{\mathbf{u}}' - \mathbf{u}') / 2 \quad (10)$$

其中, \mathbf{u} 是固相位移向量, 且 $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)^T$; $\bar{\mathbf{u}}$ 是流相位移向量, 且 $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z)$.

同理, 根据耗散能密度不随坐标系变化而变化的原理, 对于任意的 $(\bar{\mathbf{u}}' - \mathbf{u}')$, 要满足耗散能密度相等, 必有

$$\mathbf{B}' = \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{A}^T \quad (11)$$

2 弹性波波动方程

根据 Biot 理论, 双相各向异性介质中弹性波波动方程为

$$\begin{cases} \sum_{k,p,q=1}^3 \frac{\partial^2 (c_{ikpq} u_p)}{\partial x_k \partial x_q} + \sum_{q=1}^3 \frac{\partial (Q_{iq} \epsilon)}{\partial x_q} = \frac{\partial^2 (\rho_{11} u_i + \rho_{12} \bar{u}_i)}{\partial t^2} + \sum_{p=1}^3 b_{ip} \frac{\partial (u_p - \bar{u}_p)}{\partial t} \\ \sum_{p,q=1}^3 \frac{\partial^2 (Q_{pq} u_p)}{\partial x_i \partial x_q} + \frac{\partial (R \epsilon)}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 (\rho_{12} u_i + \rho_{22} \bar{u}_i)}{\partial t^2} - \sum_{p=1}^3 b_{ip} \frac{\partial (u_p - \bar{u}_p)}{\partial t} \end{cases} \quad (12)$$

其中, ϵ 表示流相的体应变, $\epsilon = \sum_{p=1}^3 (\partial \bar{u}_p / \partial x_p)$, $i = 1, 2, 3$; c_{ikpq} 为固相弹性参数, Q_{ip} 为固流耦合相弹性参数, R 为流体弹性参数, b_{ip} 为耗散系数, ρ_{11} , ρ_{12} 和 ρ_{22} 为固相、耦合相和流相的质量密度参数; u_p 为固相位移分量, \bar{u}_p 为流相位移分量. 通过符号简化, 则在双相各向异性介质中, 可由固相弹性参数矩阵 \mathbf{C} 、耦合相弹性参数矩阵 \mathbf{Q} 、流相参数 R 和耗散系数矩阵 \mathbf{B} 等弹性参数来描述. 其中, \mathbf{C} 为 6×6 阶对称矩阵, \mathbf{Q} 为 1×6 阶矩阵, R 为一个数,

B 为 3×3 阶矩阵. C , Q 和 B 都是指在观测坐标系下介质的弹性参数.

3 波动方程伪谱法的数值解法

波动方程伪谱法的数值解法是采用富里叶变换方法计算对空间的偏导数, 采用差分方法计算对时间的偏导数. 该方法相对于有限元和有限差分而言, 可使用较大网格. 相对于有限差分而言, 无频散误差、精度高, 而且利用快速富里叶变换 (FFT) 计算空间导数, 速度也较快.

3.1 富里叶变换法求空间导数的原理

设函数 $g(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 的富里叶正变换为 $G(k_{x_1}, k_{x_2}, \dots, k_{x_m})$, 则

$$g(x_1, x_2, \dots, x_m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} G(k_{x_1}, k_{x_2}, \dots, k_{x_m}) e^{-i(k_{x_1}x_1 + k_{x_2}x_2 + \dots + k_{x_m}x_m)} dk_{x_1} dk_{x_2} \dots dk_{x_m} \quad (13)$$

两边对 x_1 取 n_1 阶导数, 对 x_2 取 n_2 阶导数, \dots , 对 x_m 取 n_m 阶导数, 则有

$$\frac{dg^{(n_1+n_2+\dots+n_m)}(x_1, x_2, \dots, x_m)}{dx_1^{n_1} dx_2^{n_2} \dots dx_m^{n_m}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} (-ik_{x_1})^{n_1} (-ik_{x_2})^{n_2} \dots (-ik_{x_m})^{n_m} \times \\ G(k_{x_1}, k_{x_2}, \dots, k_{x_m}) e^{-i(k_{x_1}x_1 + k_{x_2}x_2 + \dots + k_{x_m}x_m)} dk_{x_1} dk_{x_2} \dots dk_{x_m} \quad (14)$$

若令 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $\mathbf{k} = (k_{x_1}, k_{x_2}, \dots, k_{x_m})$, 则用富里叶变换求解空间导数的过程为

$$g(\mathbf{x}) \xrightarrow{\text{FFT}} G(\mathbf{k}) \rightarrow (-ik_{x_1})^{n_1} (-ik_{x_2})^{n_2} \dots (-ik_{x_m})^{n_m} G(\mathbf{k}) \xrightarrow{\text{FFT}^{-1}} \frac{dg^{(n_1+n_2+\dots+n_m)}(\mathbf{x})}{dx_1^{n_1} dx_2^{n_2} \dots dx_m^{n_m}} \quad (15)$$

3.2 波动方程伪谱法的数值解法

对于时间导数, 我们采用二阶中心差分法求解; 对于空间导数, 采用快速富里叶变换方法求解. 则双相各向异性介质中弹性波伪谱法数值模拟的递推方程为

$$\mathbf{u}(t + \Delta t) = (\mathbf{G} - 0.5\Delta t\mathbf{H})^{-1} [(\Delta t)^2 \mathbf{d}t + 2\mathbf{G}\mathbf{u}t - (\mathbf{G} + 0.5\Delta t\mathbf{H})\mathbf{u}(t - \Delta t)] \quad (16)$$

其中

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho_{11}\mathbf{I} & \rho_{12}\mathbf{I} \\ \rho_{12}\mathbf{I} & \rho_{22}\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & -\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z, \bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z)^T \quad (19)$$

$$\mathbf{d} = (d_x, d_y, d_z, \bar{d}_x, \bar{d}_y, \bar{d}_z)^T \quad (20)$$

\mathbf{I} 为 3×3 阶单位矩阵; $d_x(t)$, $d_y(t)$, $d_z(t)$, $\bar{d}_x(t)$, $\bar{d}_y(t)$ 和 $\bar{d}_z(t)$ 分别为双相各向异性介质中弹性波波动方程(12)中与空间导数有关的项(即方程左边项), 上标 T 表示转置, Δt 表示时间步长.

4 弹性波传播特征的观测

4.1 4 类波的观测

含流体定向裂隙是一种典型的双相横向各向同性介质. 双相横向各向同性介质在自然坐标系下的弹性参数可由固相的 5 个独立弹性参数 c_{11} , c_{13} , c_{33} , c_{44} 和 c_{66} , 流相的一个独立参数 R , 固流耦合相的两个独立参数 Q_1 和 Q_3 , 以及两个独立的耗散系数参数 b_{11} 和 b_{33} 来描述(刘洋, 李承楚, 1999). 我们以表 1 的模型 1 为例, 介质为均匀双相横向各向同性, 裂隙面倾角为 60° , 测线与裂隙面成 45° 夹角, 震源位于模型中心. 利用双相各向异性介质中的

Christoffel 方程, 可以计算出 4 类波的速度面曲线(如图 2a 所示), 由内到外依次为慢纵波(P_2)、慢横波(S_2)、快横波(S_1)和快纵波(P_1). 图 2b 为伪谱法数值模拟得到的瞬时波场图(固相 x 分量初始位移激发), 可以看出, 瞬时波场中的 4 类波波前面与速度面曲线是一致的.

表 1 模型 1 参数

固相参数						流相参数		耦合参数			耗散参数	
c_{11}	c_{13}	c_{33}	c_{44}	c_{66}	ρ_{11}	R	ρ_{22}	Q_1	Q_3	ρ_{12}	b_{11}	b_{33}
26.4	6.11	15.6	4.38	6.84	2.17	0.331	0.191	1.14	0.953	-0.083	0.500	3.00

注: c_{ij} , R , Q_i 的单位为 $10^9 \text{ kg/m} \cdot \text{s}^2$; b_{ij} 的单位为 $10^6 \text{ kg/m}^3 \cdot \text{s}$; ρ_{ij} 的单位为 10^3 kg/m^3 .

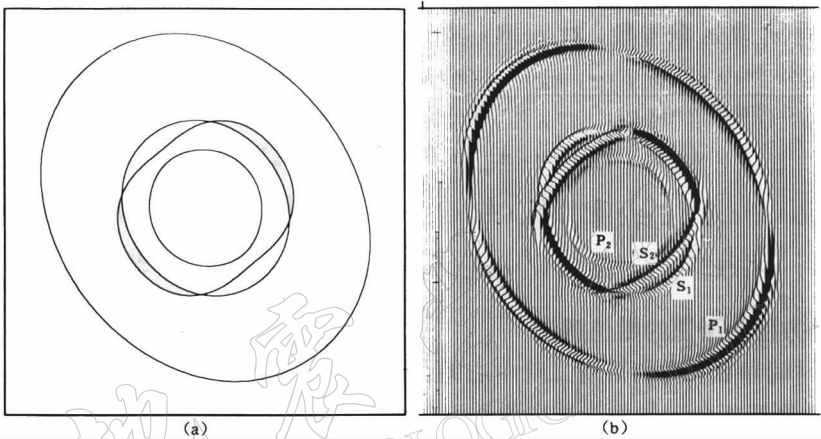


图 2 模型 1 中的 4 类波速度曲面和传播快照对比图(裂隙面倾角为 60° , 观测面与裂隙面成 45° 夹角, 传播快照为 $t=150 \text{ ms}$ 时的固相 x 分量)

4.2 横波分裂现象

在各向异性介质中, 由于两类横波速度大小之间存在差异, 一般都能观测到横波分裂现象(除两类横波速度相同的方向外). 在图 2b 中, 我们可清楚地看到横波分裂现象. 由于两类横波速度在 4 个特定传播方向上速度相等, 故在这 4 个方向上不发生横波分裂现象. 在其它方向, 可见两类横波分开现象.

4.3 SV 波传播特征

在各向异性介质中, SV 波在传播过程中, 波前面会出现波面尖角(White, 1982). 本研究数值模拟试验表明, 在双相各向异性介质中, 这种现象仍然存在. 以模型 2 为例, 如表 2 中, TIV(transverse isotropy with a vertical axis of symmetry)是指具有垂直对称轴的横向各向同性; TIH(transverse isotropy with a horizontal axis of symmetry)是指具有水平对称轴的横向各向同性; 测线方向与介质 2 的裂隙面成 45° 夹角, 固相 z 方向位移激发. 图 3 为不同时间的瞬时波场图, 图中上标 u 表示上行波, d 表示下行波. 从图 3 中可清晰地看到 SV 波的波面尖角. 这些波面尖角在界面上同样也发生反射和透射, 使波场变得更加丰富、复杂.

表 2 模型 2 双相各向异性介质弹性参数

介 质	固相参数						流相参数		耦合参数			耗散参数	
	c_{11}	c_{13}	c_{33}	c_{44}	c_{66}	ρ_{11}	R	ρ_{22}	Q_1	Q_3	ρ_{12}	b_{11}	b_{33}
介质 1 (双相 TIV)	26.4	6.11	15.6	4.38	6.84	2.17	0.331	0.191	1.14	0.953	-0.083	0.500	3.00
介质 2 (双相 TIH)	52.2	12.3	30.9	9.83	12.1	2.77	0.791	0.255	0.770	0.700	-0.100	875	7 000

注： c_{ij} , R , Q_i 的单位为 $10^9 \text{ kg/m} \cdot \text{s}^2$; b_{ij} 的单位为 $10^6 \text{ kg/m}^3 \cdot \text{s}$; ρ_{ij} 的单位为 10^3 kg/m^3 .

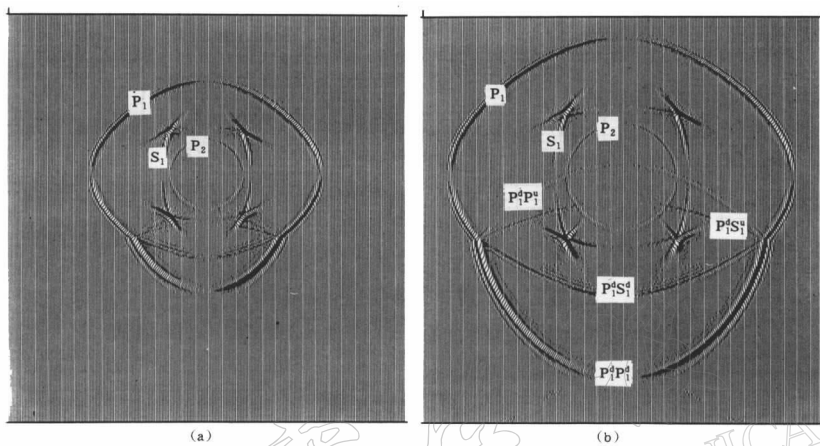


图 3 模型 2 不同时刻弹性波传播快照

4.4 反射与透射

为了观测到慢纵波在界面上的反射与透射，仍以模型 2 为例. 采用 VSP(地面激发，井中接收)观测方式，震源与井所组成的观测面与介质 2 裂隙面的夹角为 45° ，震源到界面的距离为 400 m，井与震源的水平距离为 200 m，第 1 个检波器到震源的垂直距离为 0 m，检波器间距为 10 m.

图 4 为模型 2 固相 z 方向位移激发的 VSP 两分量记录. 图中可见快纵波、SV 波和慢纵波的反射与透射. 这 3 类波在界面发生反射时，又各自反射或转换成了这 3 类波；而这 3 类波在界面处发生透射后，在介质 2 中产生的慢纵波，由于其衰减很大(耗散系数大)，所以在 VSP 记录上未能观测到.

5 结论

在双相各向异性介质中，存在着 4 类弹性波，它们分别是快纵波、慢纵波、快横波和慢横波. SV 波传播的波前面上仍然存在波面尖角，这些尖角在界面上要发生反射和透射. 在双相各向异性分界面上，非慢纵波要转换生成慢纵波，慢纵波也要转换成非慢纵波. 当耗散系数很大时，慢纵波衰减很大，所以一般难以记录到慢纵波. 基于双相各向异性介质模型的波动方程数值模拟结果，将更接近于地震波在实际介质中的传播情况，这将有助于提高研究地震波在地下介质中传播规律的精度.

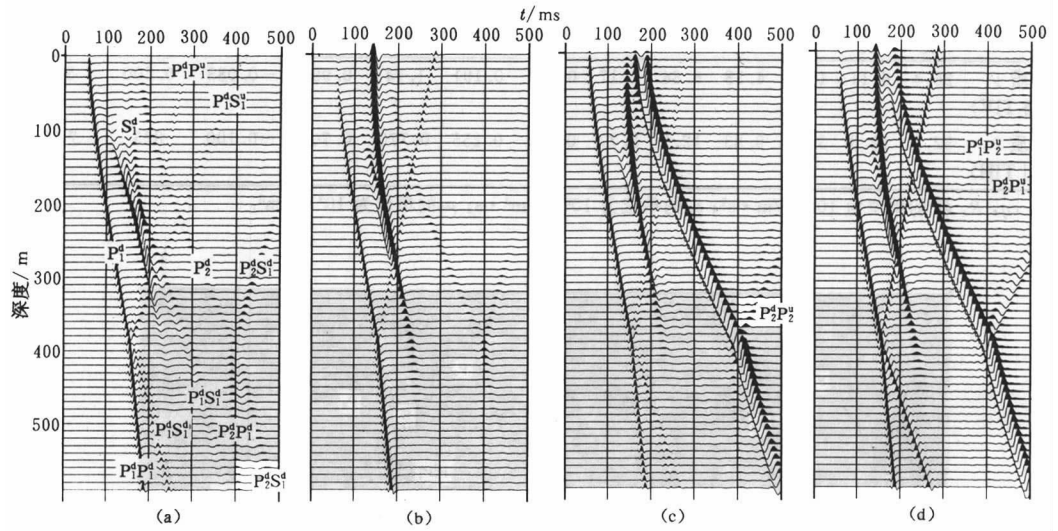


图 4 模型 2 的 VSP 合成记录

(a) 固相 x 分量; (b) 固相 z 分量; (c) 流相 x 分量; (d) 流相 z 分量

参 考 文 献

刘洋, 李承楚. 1999. 双相各向异性介质中弹性波传播特征研究. 地震学报, **21**(4): 367~373

刘银斌, 李幼铭, 吴如山. 1994. 横向各向同性多孔介质中的地震波传播. 地球物理学报, **37**(4): 499~514

《数学手册》编写组. 1997. 数学手册. 北京: 高等教育出版社, 327~330

魏修成. 1995. 双相各向异性介质中的地震波场研究: [学位论文]. 北京: 石油大学, 1~44

Biot M A. 1962. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. *J Appl Phys*, **33**: 1 482~1 498

Biot M A. 1956. Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid, part I: Low-frequency range. *J Acoust Soc Amer*, **28**: 168~178

Biot M A. 1955. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. *J Appl Phys*, **26**: 182~185

Dai N, Vafidis A, Kanasewich E R. 1995. Wave propagation in heterogeneous, porous media: A velocity-stress, finite-difference method. *Geophysics*, **60**: 327~340

Fornberg B. 1987. The pseudospectral method — comparisons with finite differences for the elastic wave equation. *Geophysics*, **52**(4): 483~501

Kosloff D D, Baysal E. 1982. Forward modeling by a Fourier method. *Geophysics*, **47**(10): 1 402~1 412

Siamak H. 1991. Acoustic modeling in fluid-saturated porous media. *Geophysics*, **56**: 424~435

White J E. 1982. Computed waveforms in transversely isotropic media. *Geophysics*, **47**: 771~783

Winterstein D F. 1990. Velocity anisotropic terminology for geophysicists. *Geophysics*, **55**: 1 070~1 088

Zhu X, McMechan G A. 1991. Numerical simulation of seismic responses of poroelastic reservoirs using Biot theory. *Geophysics*, **56**: 328~339