

各向异性动力学方程反演新算法^{*}

杨顶辉¹⁾ 滕吉文²⁾ 张中杰²⁾

1) 中国北京 100083 石油大学地球科学系

2) 中国北京 100101 中国科学院地球物理研究所

摘要 基于各向异性介质中的动力学波动方程组, 并利用多波多分量观测数据, 发展了一种适用于直接反演介质弹性参数和密度或地震波速度的动力学反演新算法. 由于这种方法充分地利用全波场信息, 因此反演结果十分可靠. 为了证实这种方法的有效性和适用范围, 基于拟 SH 波方程, 并选取了不同的初始模型, 对地震波速度进行了反演, 结果表明: 即使初始模型参数的扰动量达到 12.3% 时, 仍能获得相当好的结果. 此外, 由于方法构造的特殊性, 使得这种方法的向量化和并行化计算非常容易实现.

主题词 各向异性 动力学反演 多分量观测资料

引言

反演地球内部介质参数是认知地球内部结构的重要途径. 从总体上来讲, 反演方法主要分为两大类: 一类是从运动学的角度出发, 利用速度、距离和时间等运动学参数, 通过对反演模型系统的特性分析, 建立时空 $t-x$ 关系. 比如目前较为流行的走时反演 (Hirahara, Inshikawa, 1984; Byun, Corrigan, 1990; Červený, Simões-Filho, 1991; Jech, Pšenčík, 1992), 其实质就是建立在射线追踪的基础上. 它的主要特点是, 运算量小、精度高. 但这种方法有一定的缺点, 主要表现在, 由于走时反演仅仅利用了地震波走时, 导致了反演结果可信度的降低; 另一类是从动力学方程出发, 利用一系列的正演模拟, 反复修正其反演参数, 以达到收敛之目的. 这种方法虽然能直接反演各种不同的模型参数, 但存在三大主要的不足: ① 反演结果强烈依赖于初始模型; ② 由于这种方法利用了最小二乘原理以建立迭代方程 $G^T G \Delta X = G^T \Delta U$, 其中的 G 由位移分量对反演参数的偏导数所组成. 一般情况下, 这些偏导数均为非线性泛函, 通常人们是直接利用位移分量的改变量与反演参数的改变量之比来线性化这些泛函, 这种处理本身带来了巨大的误差, 因此, 如何克服这一缺点将是本文的主要内容之一; ③ 直接反演方法的运算量强烈依赖于正演模型的运算量.

根据上述分析, 本文直接从动力学方程组出发, 建立了一套新的直接反演方法. 对于直接反演方法中存在的第 1 个问题, 可采用由华罗庚和王元 (1978) 提出的均匀布点方法以尽可能地解决其不唯一性问题, 有关这一点, 我们将在另文中讨论; 对于第 2 个问题, 通过对原波动方程组求偏导数, 建立关于以位移分量对模型各参数的偏导数为变量的二阶偏微分方程组, 然后直接利用正演方法求出其比较精确的迭代矩阵, 从而实现其反演过程; 对

^{*} 1996-05-10 收到初稿, 1996-11-11 收到修改稿, 1996-11-22 决定采用.

于第 3 个问题，本文采用了速度较快且精度较高的“交替模拟算法”(杨顶辉等，1996)。

1 直接反演方法的基本原理

直接反演方法的实质是在附加约束条件 $U(\bar{C})=U_{\text{obs}}$ 下，通过一系列的正演模拟以使下列泛函：

$$J(\bar{C}) = \| U(\bar{C}) - U_{\text{obs}} \|^2 \tag{1}$$

极小化。其中 U 是模型参数 \bar{C} 的非线性函数，事实上，弹性波方程可以写成如下形式

$$U = -\tilde{L}^{-1}(\bar{C})\tilde{F}$$

其中 U 为位移， \tilde{F} 为力源项， \tilde{L}^{-1} 为 3×3 的偏微分算子矩阵，且为 \tilde{L} 的逆算子，其元素为

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{11} &= L_{11} - \rho \partial^2 / \partial t^2, \quad \tilde{L}_{22} = L_{22} - \rho \partial^2 / \partial t^2, \quad \tilde{L}_{33} = L_{33} - \rho \partial^2 / \partial t^2, \\ \tilde{L}_{ij} &= L_{ji}, \text{ 如果 } i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

其中， L_{ij} 的形式参见附录。

因此，从数学的角度来看，求非线性泛函 $J(\bar{C})$ 的极小值，实际上就是寻找一优化变换算子 $\tilde{L}^{-1}(\bar{C})$ 来逼近算子 $-U_{\text{obs}}\tilde{F}^{-1}$ 。

在实际处理时，可以通过 Taylor 展式获得直接反演方法的迭代方程

$$\Delta \bar{C} = (\bar{A}^T \bar{A} + \lambda I)^{-1} \bar{A}^T \Delta U \tag{2}$$

其中 λ 为阻尼因子， I 为一单位矩阵，Jacobian 矩阵 $\bar{A}=\partial U/\partial \bar{C}$ 。

2 Jacobi 矩阵的确定方法

本文以二维情况下横向各向同性(TI)介质(实为含有 5 个弹性常数的特殊各向异性介质)中的地震波方程组为例，说明本文提出的动力学反演算法。在二维 $x-z$ 笛卡尔坐标系里，TI 介质中的地震波方程组为

$$N \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + L \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + f_y \tag{3a}$$

$$A \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + (F + L) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} + L \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + f_x \tag{3b}$$

$$L \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + (F + L) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + C \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + f_z \tag{3c}$$

其中， $A=c_{11}$ 、 $N=c_{66}$ 、 $L=c_{44}$ 、 $F=c_{13}$ 、 $C=c_{33}$ ，为介质弹性常数； ρ 为介质密度； u_x 、 u_y 和 u_z 表示位移分量。由方程(3)可得

$$(N \frac{\partial^2}{\partial x^2} + L \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \frac{\partial u_y}{\partial N} = - \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \tag{4a}$$

$$(N \frac{\partial^2}{\partial x^2} + L \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \frac{\partial u_y}{\partial L} = - \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \tag{4b}$$

$$(N \frac{\partial^2}{\partial x^2} + L \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \frac{\partial u_y}{\partial \rho} = \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} (N \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + L \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} - f_y) \tag{4c}$$

$$[\mathbf{P} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbf{Q} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \mathbf{R} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mathbf{I} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}] \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{A}} = - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{A}} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2} \quad (5a)$$

$$[\mathbf{P} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbf{Q} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \mathbf{R} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mathbf{I} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}] \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{C}} = - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{C}} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial z^2} \quad (5b)$$

$$[\mathbf{P} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbf{Q} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \mathbf{R} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mathbf{I} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}] \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{F}} = - \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{F}} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x \partial z} \quad (5c)$$

其中,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & F+L \\ F+L & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_z \end{bmatrix}^T$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

如果直接反演速度, 同样可由方程(3)得:

$$\begin{cases} (v_h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + v_v^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \frac{\partial u_y}{\partial v_h} = -2v_h \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \\ (v_h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + v_v^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \frac{\partial^2 u_y}{\partial v_h} = -2v_v \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\tilde{\mathbf{P}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \tilde{\mathbf{Q}} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \tilde{\mathbf{R}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mathbf{I} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial v_A} = - \frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}}{\partial v_A} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2} \\ (\tilde{\mathbf{P}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \tilde{\mathbf{Q}} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \tilde{\mathbf{R}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mathbf{I} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial v_F} = - \frac{\partial \tilde{\mathbf{Q}}}{\partial v_F} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x \partial z} \\ (\tilde{\mathbf{P}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \tilde{\mathbf{Q}} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \tilde{\mathbf{R}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mathbf{I} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial v_C} = - \frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}}{\partial v_C} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial z^2} \end{cases}$$

这里

$$v_h = \sqrt{\frac{N}{\rho}} \quad v_v = \sqrt{\frac{L}{\rho}} \quad v_A = \sqrt{\frac{A}{\rho}} \quad v_F = \sqrt{\frac{F}{\rho}} \quad v_C = \sqrt{\frac{C}{\rho}}$$

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} v_A^2 & 0 \\ 0 & v_C^2 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 0 & v_F^2 + v_v^2 \\ v_F^2 + v_v^2 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} v_L^2 & 0 \\ 0 & v_C^2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}}{\partial v_A} = \begin{bmatrix} 2v_A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{Q}}}{\partial v_F} = \begin{bmatrix} 0 & 2v_F \\ 2v_F & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}}{\partial v_C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2v_C \end{bmatrix}$$

其中, v_v 和 v_h 表示垂直和水平相速度; v_A 、 v_C 与 v_F 分别表示水平射线速度、垂直射线速度和斜速度, 更详细的解释可参见 Byun 等(1990)的文章.

通过正演计算上述方程即可确定迭代矩阵.

3 反演算法

本算法利用三分量地震数据进行反演. 假如在地表(或井中)有 m 个检波器, 每一检波器的数据记录数为 n , 则可设理论值与观测数据的误差平方和为

$$e = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m (u_{yi, k}^{\text{obs}} - u_{yi, k}^{\text{cal}})^2, \quad (\text{对于 SH 波})$$

$$E = \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i=1}^m (u_{xi, k}^{\text{obs}} - u_{xi, k}^{\text{cal}})^2 + \sum_{i=m+1}^{2m} (u_{zi, k}^{\text{obs}} - u_{zi, k}^{\text{cal}})^2 \right] \quad (\text{对于弹性波})$$

Jacobi 矩阵的元素为:

(1) 对于 SH 波方程

$$g_{j_k, l} = \frac{\partial u_{yj_k}^{\text{cal}}(\mathbf{X})}{\partial x_l} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$$

$k=1, 2, \cdots, m, \quad j_k=1, 2, \cdots, n \times m, \quad l=1, 2, \cdots, M(M \text{ 为反演参数数目})$

(2) 对于 PSV 波方程

$$g_{j, l} = \begin{cases} \frac{\partial u_{xj}^{\text{cal}}(\mathbf{X})}{\partial x_l} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}, & \text{当 } j = 1, 2, \cdots, m, 2m+1, \cdots, 3m, \cdots, \\ & 2 \cdot n \cdot m - 2m + 1, \cdots, 2 \cdot n \cdot m - m, \\ \frac{\partial u_{zj}^{\text{cal}}(\mathbf{X})}{\partial x_l} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}, & \text{当 } j = m+1, \cdots, 2m, 3m+1, \cdots, 4m, \cdots, \\ & 2 \cdot n \cdot m - m + 1, \cdots, 2 \cdot n \cdot m, \\ & l = 1, 2, \cdots, M, \end{cases}$$

由于在某些特殊各向异性介质(如: TI 介质、立方体各向异性介质和正交各向异性介质)中, qSH 波与 qP 波和 qSV 波是分离的. 因此, 对于这些特殊各向异性介质问题, 本算法在具体实现时分两步进行: 第一步, 利用 qSH 波资料首先反演 qSH 波方程中的模型参数(如 TI 介质中的 N 、 L 和 ρ); 第二步, 利用 qP 波和 qSV 波资料反演 qPSV 波方程中的其余参数.

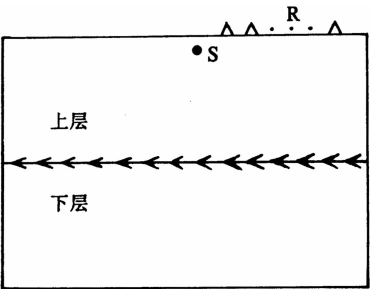


图 1 反演模型介质的几何形状, S 表示震源, R 为接收器

4 数值算例

为了检验本算法的有效性, 笔者利用 qSH 波地震记录对双层 TI 介质模型的速度参数进行了反演. 图 1 为 TI 介质中的反演模型, 其真实速度可描述为:

情形 1

上层介质: $v_{h1}=1\,976\text{ m/s}, \quad v_{v1}=1\,732\text{ m/s};$

下层介质: $v_{h2}=2\ 845\text{ m/s}$, $v_{v2}=2\ 488\text{ m/s}$.

情形 2

上层介质: $v_{h1}=2\ 490\text{ m/s}$, $v_{v1}=2\ 180\text{ m/s}$

下层介质: $v_{h2}=3\ 380\text{ m/s}$, $v_{v2}=3\ 000\text{ m/s}$.

为了考察本算法的适用范围,对情形 1,取不同的初始模型参数(表 1)进行反演试算,其反演结果参见图 2~4 和图 6~7. 对情形 2,本文取初始模型参数为:

上层介质: $v_{h1}=2\ 240\text{ m/s}$, $v_{v1}=2\ 000\text{ m/s}$;

下层介质: $v_{h2}=3\ 140\text{ m/s}$, $v_{v2}=2\ 800\text{ m/s}$.

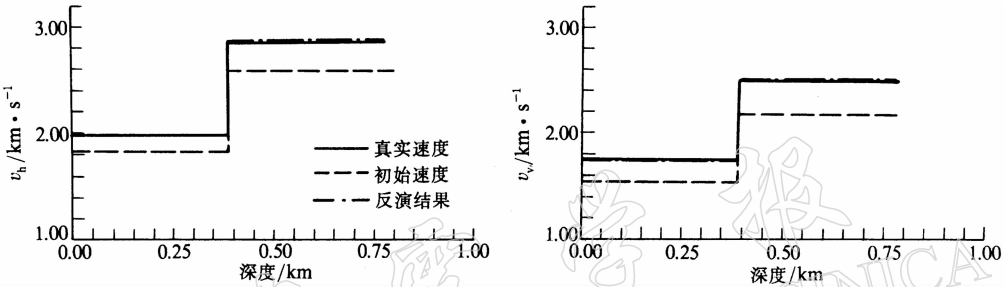


图 2 情形 1 的反演结果

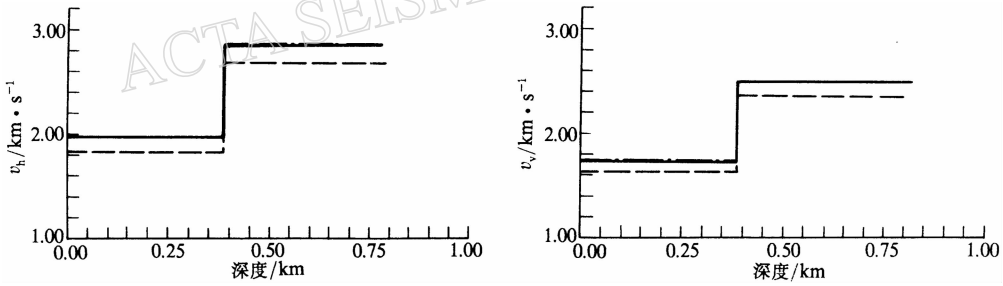


图 3 情形 1 的反演结果

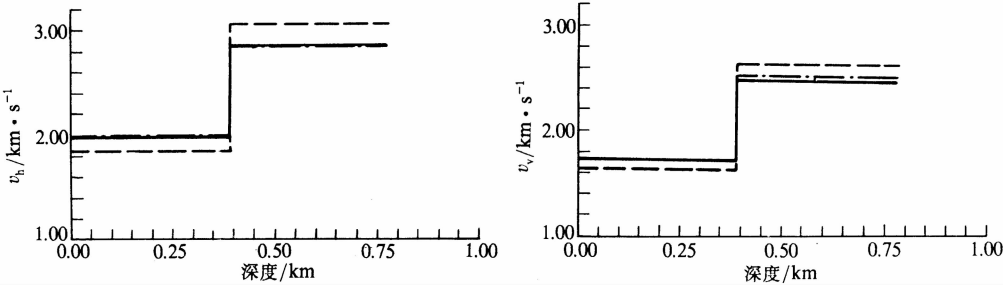


图 4 情形 1 的反演结果

其反演结果表现在图 5 中.

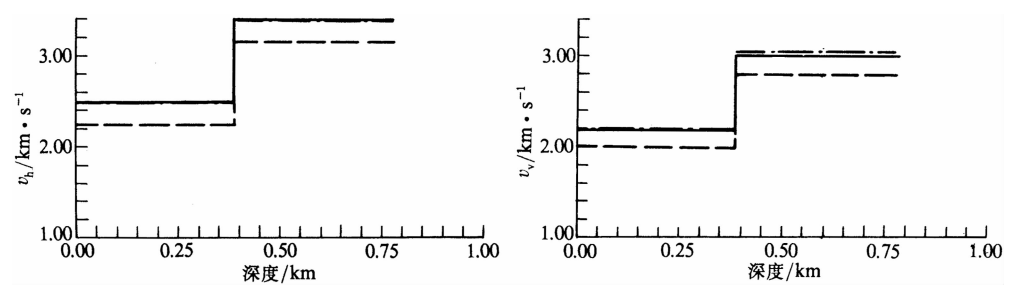


图 5 情形 1 和 2 的反演结果

表 1 TI 介质中不同初始模型参数

初始模型	层速度			
	$v_{h1}/\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	$v_{v1}/\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	$v_{h2}/\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	$v_{v2}/\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
1	1 826	1 543	2 582	2 182
2	1 830	1 630	2 680	2 360
3	1 850	1 640	3 050	2 650
4	1 759	1 512	2 488	2 116
5	1 670	1 470	2 400	1 980

从不同模型和取不同初始模型参数的反演结果(图 2~7)可以看出:当模型参数的扰动量达到 12.3% 时,仍能获得比较精确的反演结果.但是如果这种扰动量接近或超过 15% 时,那么将得不到好的反演结果,甚至于不能收敛到真值(图 6~7).

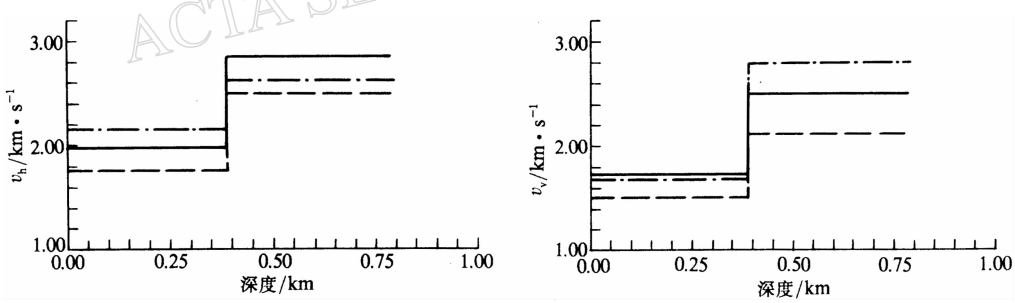


图 6 情形 1 初始扰动量超过 15% 的反演结果

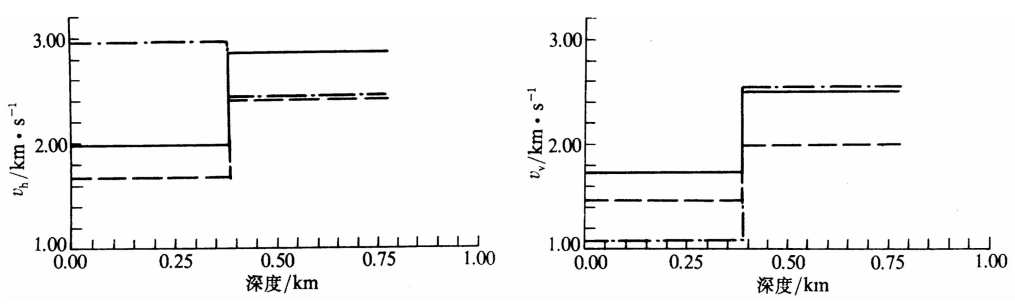


图 7 情形 1 不同初始参数值的反演结果

5 讨论与结论

走时反演虽然有不少优点,但仅仅利用单一信息(走时)是这种反演方法的本质,因而可信度较低.基于动力学方程并利用多分量地震数据的动力学反演方法,由于能充分利用各种 P(或 qP)波、S(或 qS)波以及转换波的共同信息而具有较高的可信度,发展潜力很大.笔者在这方面作了探索性的研究,发展了一种多波多分量的动力学反演方法.

从运算时间上看,似乎这种方法运算量较大.但事实上,由于迭代矩阵有较高的精度,从而加快了收敛速度.一般情况下,全局迭代 14 次左右即可收敛;另一方面,我们发现:确定 Jacobi 矩阵的方法与正演模拟原波动方程组的方法完全一致,因而,如果利用并行计算,运算量将会大大减小.从地球物理反演的发展趋势看,这种方法具有很大潜力.特别是对多参数反演,其优越性会更加突出.

总之,本文提出的这种方法具有如下优点:① 可直接反演弹性参数和介质密度或速度;② 非常容易实现并行化计算;③ 可靠性强、精度高、速度较快;④ 适用范围广、稳定性好.

此外,根据数值反演结果,我们发现,当初始模型参数的扰动量达到 12.3% 时,仍能获得相当精确的反演结果.当然,这种扰动量不能超过 15%.

参 考 文 献

华罗庚,王元,1978.数论在近似分析中的应用.北京:科学出版社.248
杨顶辉,滕吉文,张中杰,1996.各向异性问题数值模拟中的交替算法.地震学报,18(1):48~54
Byun B S, Corrigan D, 1990. Seismic traveltime inversion for tranverse isotropy. *Geophysics*, **55**: 192~200
Červený V, Simoes-Filho I A, 1991. The traveltime perturbations for seismic body waves in factorized anisotropic inhomogeneous media. *Geophys J Int*, 10~7, 219~229
Hirahara K, Inshikawa Y, 1984. Travel-time inversion for three-dimensional P-wave velocity anisotropy, *J. Phys. Earth*, **32**: 197~218
Jech J, Psencik I, 1992. Kinematic inversion for qP- and qS-waves in inhomogeneous hexagonally symmetric structures, *Geophys. J. Int.*, **108**: 604~612

附录: 偏微分算子 L

L 为 3×3 的对称偏微分算子,其表达式如下:

$$\begin{aligned} L_{11} &= c_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{55} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2c_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + 2c_{56} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + 2c_{15} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ L_{22} &= c_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2c_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + 2c_{24} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + 2c_{46} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ L_{55} &= c_{55} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{44} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2c_{45} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + 2c_{34} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + 2c_{35} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ L_{23} &= c_{56} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{24} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{34} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (c_{25} + c_{46}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (c_{23} + c_{44}) \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + (c_{36} + c_{45}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ L_{31} &= c_{15} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{46} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{35} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (c_{14} + c_{56}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (c_{36} + c_{45}) \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + (c_{13} + c_{55}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ L_{21} &= c_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{45} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (c_{25} + c_{46}) \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + (c_{14} + c_{56}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \end{aligned}$$

$$L_{ij} = L_{ji} \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, 3)$$

其中, c_{ij} 表示介质弹性参数.