

地震波在饱和土层界面的反射与透射^{*}

杨 峻 吴世明

(中国杭州 310027 浙江大学)

摘要 研究了地震波在两种饱和土层界面的反射与透射, 其中饱和土模型采用修改的 Biot 模型. 考虑土颗粒及孔隙流体的压缩性, 并考虑了孔隙流体与土骨架之间的粘性耦合作用, 文中首先从理论上推导了地震波在界面发生反射与透射时, 反射系数与透射系数的一般计算式, 尔后数值分析了第一 P 波入射时, 各模式的波反射系数和透射系数与入射角及频率的关系. 本研究对地震工程中的波动勘测技术、场地地震反应分析等领域具有理论及应用价值.

主题词 地震波 饱和土层 反射与透射

引言

在地震工程、地球物理及岩土工程等科学领域, 地震波在两种介质界面的反射与透射是重要的研究课题, 至今在理论及工程应用上虽然已有不少成果(吴世明等, 1992; Brekhovskikh, 1980; Wolf, 1989), 但这些研究主要还是基于土层为各向同性弹性固体这一假设, 而实际天然土层大多是一种流体饱和和多孔介质, 即所谓的饱和土. 其中可传播 3 种体波: 第一 P 波(P_1 波), 也称快纵波; 第二 P 波(P_2 波), 也称慢纵波和一种 S 波. 3 种波均是衰减、弥散波, 其各自的传播速度及衰减均与饱和土参数有关(Biot, 1962). 可以预见, 地震波在两种饱和土层界面的反射与透射较之在两种理想的各向同性弹性固体界面的情形要复杂得多.

Stoll 和 Kan(1981)研究了地震波由海水入射于海底沉积土时的反射与透射, 以解释海洋地震勘探资料; Deresiewicz 和 Levy(1967)、Hajra 和 Mukhopodhyay(1982)先后发表了地震波在弹性固体与饱和砂岩界面的反射与透射的研究成果, 但他们的研究忽略了饱和土中的粘性耦合效应, 与饱和土实际波动特征不符. 基于此, 本文研究了更一般、更复杂的情况, 即地震波以任意角度由一种饱和土层入射于另一饱和土层时的反射与透射. 其中饱和土模型采用实用的修改 Biot 模型(Biot, 1962; Philippacopoulos, 1987). 一方面可考虑土颗粒及孔隙流体的压缩性, 考虑土骨架与孔隙流体的粘性耦合作用; 另一方面忽略一些过于复杂、物理意义不明确的因素. 文中导出了地震波在两种饱和土层界面反射与透射时, 各模式波反射系数与透射系数的一般计算式, 尔后给出了有意义的数值算例分析.

^{*} 1995-07-03 收到初稿, 1995-11-21 收到修改稿并决定采用.

1 理论推导

1.1 饱和土波动方程的势函数表示

由修改的 Biot 模型, 位移形式的饱和土波动方程可表示为 (Biot, 1962; Philippacopoulos, 1987)

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu + \alpha^2 M) \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}) + \alpha M \text{grad}(\text{div} \mathbf{w}) = \rho_f \ddot{\mathbf{u}} + \rho_f \ddot{\mathbf{w}} \quad (1a)$$

$$\alpha M \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}) + M \text{grad}(\text{div} \mathbf{w}) = \rho_f \ddot{\mathbf{u}} + \frac{\rho_f}{n} \ddot{\mathbf{w}} + \frac{\eta}{k} \dot{\mathbf{w}} \quad (1b)$$

式中, \mathbf{u} , \mathbf{w} 分别为土骨架位移矢量和流体相对于土骨架的位移矢量; ρ_f 为流体密度, ρ 为饱和土密度, $\rho = (1-n)\rho_s + n\rho_f$. 其中, ρ_s 为土颗粒密度, n 为饱和土孔隙率; η 为流体粘滞系数, k 为饱和土渗透系数 (单位为 m^2); λ , μ 为土骨架的 Lamé 常数; α , M 为表征土颗粒和孔隙流体压缩性的常数.

将位移场作势函数分解

$$\mathbf{u} = \text{grad} \varphi_s + \text{curl} \boldsymbol{\psi}_s \quad (2a)$$

$$\mathbf{w} = \text{grad} \varphi_f + \text{curl} \boldsymbol{\psi}_f \quad (2b)$$

式中, φ_s , $\boldsymbol{\psi}_s$ 分别为土骨架部分标量势和矢量势; φ_f , $\boldsymbol{\psi}_f$ 分别为流体部分的标量势和矢量势. 对波动方程 (1) 两边取散度, 得

$$\mathbf{M} \ddot{\boldsymbol{\psi}} + C \dot{\boldsymbol{\psi}} - K_p L \boldsymbol{\psi} = 0 \quad (3a)$$

对波动方程 (1) 两边取旋度, 得

$$\mathbf{M} \ddot{\boldsymbol{\psi}} + C \dot{\boldsymbol{\psi}} - K_s L \boldsymbol{\psi} = 0 \quad (3b)$$

式中

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \rho & \rho_f \\ \rho_f & \frac{\rho_f}{n} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\eta}{k} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu + \alpha^2 M & \alpha M \\ \alpha M & M \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \nabla^2 & 0 \\ 0 & \nabla^2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varphi} = [\varphi_s \quad \varphi_f]^T$$

$$\boldsymbol{\psi} = [\boldsymbol{\psi}_s \quad \boldsymbol{\psi}_f]^T$$

显然, 耦合方程 (3a)、(3b) 分别描述了饱和土中 P 波和 S 波的传播特征. 设式 (3a)、(3b) 的平面波形式解为

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{Bmatrix} \varphi_s \\ \varphi_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_s \exp[i(\omega t - \mathbf{l}_p \cdot \mathbf{r})] \\ A_f \exp[i(\omega t - \mathbf{l}_p \cdot \mathbf{r})] \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\psi}_s \\ \boldsymbol{\psi}_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_s \exp[i(\omega t - \mathbf{l}_s \cdot \mathbf{r})] \\ B_f \exp[i(\omega t - \mathbf{l}_s \cdot \mathbf{r})] \end{Bmatrix} \quad (5)$$

式中, \mathbf{l}_p , \mathbf{l}_s 分别为 P 波和 S 波的波矢, \mathbf{r} 为位置矢. 将式 (4)、(5) 代入 (3a)、(3b) 可得 P 波和 S 波弥散方程

$$A\left(\frac{l_p}{\omega}\right)^4 + B\left(\frac{l_p}{\omega}\right)^2 + C = 0 \quad (6)$$

$$E\left(\frac{l_s}{\omega}\right)^2 + C = 0 \quad (7)$$

式中

$$A = (\lambda + 2\mu)M \quad B = (2\alpha\rho_f - \rho)M - (\lambda + 2\mu + \alpha^2 M)\left(\frac{\rho_f}{n} - i\frac{\eta}{k\omega}\right)$$

$$C = \rho\left(\frac{\rho_f}{n} - i\frac{\eta}{k\omega}\right) - \rho_f^2 \quad E = -\mu\left(\frac{\rho_f}{n} - i\frac{\eta}{k\omega}\right)$$

由式(6)可求得第一 P 波(P_1 波)和第二 P 波(P_2 波)的波矢量值 l_1, l_2 和两标量势振幅比

$$\delta_1 = \frac{A_{f_1}}{A_{s_1}} = \frac{(\lambda + 2\mu + \alpha^2 M)l_1^2 - \rho\omega^2}{\rho_f\omega^2 - \alpha M l_1^2} \quad (8a)$$

$$\delta_2 = \frac{A_{f_2}}{A_{s_2}} = \frac{(\lambda + 2\mu + \alpha^2 M)l_2^2 - \rho\omega^2}{\rho_f\omega^2 - \alpha M l_2^2} \quad (8b)$$

同理,由式(7)可求得

$$\delta_3 = \frac{B_f}{B_s} = \frac{\mu l_s^2 - \rho\omega^2}{\rho_f\omega^2} \quad (8c)$$

由式(6)、(7)的解可知,在饱和土中存在 3 种体波. 3 种波均为弥散、衰减波,其相速度和衰减与饱和土参数有关.

1.2 波场的势函数表示

如图 1 所示,设饱和土层 1 中频率为 ω 的 P_1 波以任意角度入射于饱和土层 2,则在土层 1,2 中分别存在反射 P_1 波、 P_2 波和 S 波及透射 P_1 波和 S 波.

界面两侧的波场可表示为

(1) $Z < 0$ 部分. 入射 P_1 波

$$\varphi_s = A_{i1} \exp[i(\omega t - l_{i1x} \cdot x - l_{i1z} \cdot z)] \quad (9a)$$

$$\varphi_f = \delta_1 A_{i1} \exp[i(\omega t - l_{11x} \cdot x - l_{11z} \cdot z)] \quad (9b)$$

反射 P 波(包括 P_1 波和 P_2 波)

$$\varphi_s = A_{r1} \exp[i(\omega t - l_{r1x} \cdot x + l_{r1z} \cdot z)] + A_{r2} \exp[i(\omega t - l_{r2x} \cdot x + l_{r2z} \cdot z)] \quad (9c)$$

$$\varphi_f = \delta_1 A_{r1} \exp[i(\omega t - l_{r1x} \cdot x + l_{r1z} \cdot z)] + \delta_2 A_{r2} \exp[i(\omega t - l_{r2x} \cdot x + l_{r2z} \cdot z)] \quad (9d)$$

反射 S 波

$$\psi_s = A_{rs} \exp[i(\omega t - l_{rsx} \cdot x + l_{rsz} \cdot z)] \quad (9e)$$

$$\psi_f = \delta_3 A_{rs} \exp[i(\omega t - l_{rsx} \cdot x + l_{rsz} \cdot z)] \quad (9f)$$

(2) $Z > 0$ 部分. 透射 P 波(包括 P_1 波和 P_2 波)

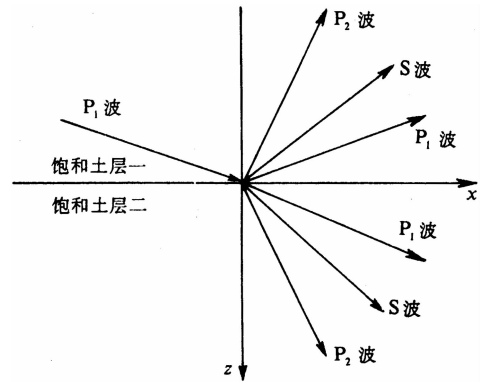


图 1 第一 P 波在界面的反射与透射

$$\varphi_s' = A_{t1} \exp[i(\omega t - l_{t1x} \cdot x - l_{t1z} \cdot z)] + A_{t2} \exp[i(\omega t - l_{t2x} \cdot x - l_{t2z} \cdot z)] \quad (10a)$$

$$\varphi_f' = \delta_1' A_{t1} \exp[i(\omega t - l_{t1x} \cdot x - l_{t1z} \cdot z)] + \delta_2' A_{t2} \exp[i(\omega t - l_{t2x} \cdot x - l_{t2z} \cdot z)] \quad (10b)$$

透射 S 波

$$\psi_s' = A_{ts} \exp[i(\omega t - l_{tsx} \cdot x - l_{tsz} \cdot z)] \quad (10c)$$

$$\psi_f' = \delta_3' A_{ts} \exp[i(\omega t - l_{tsx} \cdot x - l_{tsz} \cdot z)] \quad (10d)$$

式(9)~(10)中，下标 1, 2, s 分别表示 P_1 波、 P_2 波和 S 波；下标 x, z 分别表示各波矢沿 x 方向、 z 方向的分量；下标 i, r, t 分别表示入射、反射和透射； $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ 和 $\delta_1', \delta_2', \delta_3'$ 分别为土层 1, 2 的参数，由式(8)确定(对于不同土层应采用相应土层的参数)。

1.3 反射系数和透射系数的计算式

在两种饱和土层界面，存在以下连续条件：

应力连续 $\sigma_z|_{z=0^-} = \sigma_z'|_{z=0^+} \quad \tau_{xz}|_{z=0^-} = \tau_{xz}'|_{z=0^+} \quad (11a)$

位移连续 $u_x|_{z=0^-} = u_x'|_{z=0^+} \quad u_z|_{z=0^-} = u_z'|_{z=0^+} \quad (11b)$

流量连续 $w_z|_{z=0^-} = w_z'|_{z=0^+} \quad (11c)$

孔压连续 $p_f|_{z=0^-} = p_f'|_{z=0^+}$

式中， p_f 为孔隙流体压力。

饱和土各物理量与势函数关系可表示为(Philippacopoulos, 1987)

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_z &= (\lambda + \alpha^2 M) \nabla^2 \varphi_s + \alpha M \nabla^2 \varphi_f + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial x \partial z} \right) \\ \tau_{xz} &= \mu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial z^2} \right) \\ u_z &= \frac{\partial \varphi_s}{\partial z} + \frac{\partial \psi_s}{\partial x} \\ u_x &= \frac{\partial \varphi_s}{\partial x} - \frac{\partial \psi_s}{\partial z} \\ w_z &= \frac{\partial \varphi_f}{\partial z} + \frac{\partial \psi_f}{\partial x} \\ p_f &= -M(\nabla^2 \varphi_f + \alpha \nabla^2 \varphi_s) \end{aligned} \right. \quad (12)$$

将式(9)、(10)、(12)代入式(11)，并根据 Snell 定律

$$l_{i1x} = l_{r2x} = l_{rx} = l_{t1x} = l_{t2x} = l_{tx} \quad (13)$$

令 $A_d=1$ ，经化简得

$$PA = Q \quad (14)$$

式中

$$A = [A_{r1} \quad A_{r2} \quad A_{rs} \quad A_{t1} \quad A_{t2} \quad A_{ts}]^T$$
$$Q = [l_{i1x} \quad l_{i1z} \quad (\lambda_{c1} + \alpha_1 M_1 \delta_1) l_{i1}^2 - 2\mu_1 l_{i1x}^2 \quad 2\mu_1 l_{i1x} l_{i1z} \quad \delta_1 l_{i1z} \quad \delta_1 l_{i1}^2 M_1 + \alpha_1 M_1 l_{i1}^2]^T$$

式中， $\lambda_{c1} = \lambda_1 + 2\mu_1 + \alpha_1^2 M_1$ ； $\lambda_1, \mu_1, \alpha_1, M_1$ 是饱和土层 1 的弹性常数。[P]_{6×6} 各元素参见附录。

求解方程组(14)即可求得 P_1 波、 P_2 波和 S 波的土骨架部分势函数的反射系数 A_{r1} ， A_{r2} ， A_{rs} 和透射系数 A_{t1} ， A_{t2} 和 A_{ts} 。

2 数值算例分析

饱和土层 1, 2 的有关参数如表 1 所示.

表 1 饱和土层 1, 2 的参数

	λ / $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$	μ / $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$	α	M / $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$	ρ_f / $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	ρ_s / $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	n	η / $\text{Pa} \cdot \text{s}$	k / m^2
土层 1	2.22×10^7	2.21×10^7	0.999 0	3.21×10^9	1 000	2 650	0.6	10^{-3}	10^{-11}
土层 2	2.62×10^7	2.61×10^7	0.998 8	6.44×10^9	1 000	2 650	0.27	10^{-3}	10^{-10}

取频率 $f=100 \text{ Hz}$, 两种饱和土中 3 种体波相速度及衰减如表 2 年示. 入射角的变化对反射系数、透射系数的影响如图 2、图 3 所示.

表 2 3 种波速及衰减

	波速/ $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$			波衰减/ $\text{dB} \cdot \text{m}^{-1}$		
	P_1 波	P_2 波	S 波	P_1 波	P_2 波	S 波
土层 1	1 404.5	28.5	115.4	2.9×10^{-3}	189.95	8.95×10^{-2}
土层 2	1 725.2	87.5	109.1	5.99×10^{-2}	48.96	0.68

由图 2、图 3 可见, 入射角对反射系数和透射系数的影响较大. 随着入射角度的增大, 反射 P_1 波幅值逐渐增大, 透射 P_1 波幅值也逐渐增大; 并当入射角约为 55° 时, 透射 P_1 波幅值达到最大. 尔后随着入射角的增大, 其幅值逐渐减小. S 波的反射系数和透射系数在入射角约为 60° 时达到最大, P_2 波的反射和透射系数较 P_1 波和 S 波的都要小得多. 同时可看到, 当入射角为 0° , 即波垂直入射时, 无反射 S 波及透射 S 波; 当入射角为 90° , 即掠入射时, 只有反射 P_1 波存在, 这与弹性固体情况相似, 与实际预想是一致的.

设 P_1 波以 30° 入射, 频率的变化范围为 $50 \text{ Hz} \sim 900 \text{ kHz}$. 首先计算两种饱和土层中 3 种体波的相速度和衰减的变化范围, 如表 3 所列. 反射系数、透射系数与频率的关系如图 4、图 5 所示.

表 3 频率变化时波速和衰减的变化范围

	波速/ $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$			波衰减/ $\text{dB} \cdot \text{m}^{-1}$		
	P_1 波	P_2 波	S 波	P_1 波	P_2 波	S 波
土层 1	1 404.5~1 557	20.2~223.2	115.4~144.4	$7.3 \times 10^{-4} \sim 50$	134.6~1 480	$2.2 \times 10^{-2} \sim 1.021$
土层 2	1 719.7~1 878	65.7~141.3	108.9~116.2	$1.6 \times 10^{-2} \sim 1.2$	36.8~79	0.2~14.1

由图可见, P_1 波的反射和透射系数受频率的影响不大, 而 S 波和 P_2 波受频率的影响相对较明显. 进一步分析发现, 各模式的波反射和透射系数在某个频率段有较明显的波动. 经计算发现这一频段与饱和土的特征频率相吻合: 土层 1 的特征频率为 $9\,500 \text{ Hz}$, 土层 2 的特征频率为 430 Hz . 其中特征频率只与饱和土参数有关(Biot, 1962). 当频率很低时, P_2 波的反射系数与透射系数趋于零, 这与 P_2 波的传播特征相符.

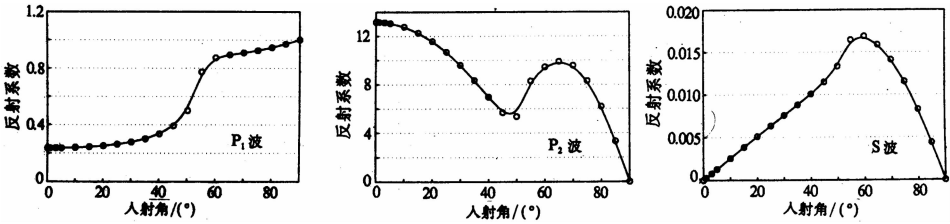


图 2 反射系数与入射角的关系

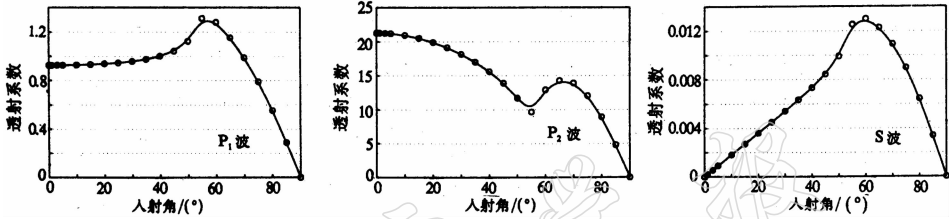


图 3 透射系数与入射角的关系

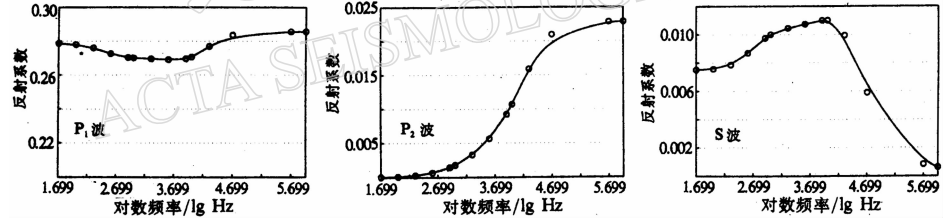


图 4 反射系数与频率的关系

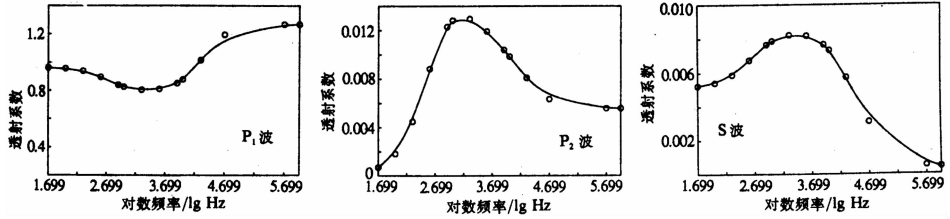


图 5 透射系数与频率的关系

3 结论

本文采用修改的 Biot 模型，研究了地震波在两种饱和土层界面的反射与透射。文中从理论上推导了地震波以任意角度入射时的反射系数和透射系数的一般算式，数值计算了第一 P 波入射时反射系数和透射系数与入射角及频率的关系。结果表明，入射角对反射系数

和透射系数影响较大；在两种饱和土层特征频率段，反射系数和透射系数变化相对显著；当频率较低时，第二 P 波的反射系数和透射系数很小，但无论如何，第二 P 波总会携带一部分能量。需要说明的是，采用类似方法可分析 S 波入射时的情况。限于篇幅，本文从略。

参 考 文 献

- 吴世明, 唐有职, 陈龙珠, 1992. 岩土工程波动勘测技术. 北京: 水利电力出版社. 200
- Biot M A, 1962. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. *J Appl Phys*, **33**: 1 482~1 498
- Brekhovskikh L, 1980. *Waves in Layered Media*. New York: Academic Press. 503
- Deresiewicz H, Levy A, 1967. The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid. X, Transmission through a stratified medium. *Bull Seism Soc Amer*, **57**: 381~392
- Hajra S, Mukhopodhyay A, 1982. Reflection and refraction of seismic waves incident obliquely at the boundary of a liquid-saturated porous solid. *Bull Seism Soc Amer*, **72**: 1 509~1 533
- Philippacopoulos A J, 1987. Waves in a partially saturated layered half-space, analytical formulation. *Bull Seism Soc Amer*, **77**: 908~923
- Stoll R D, Kan T K, 1981. Reflection of acoustic wave at a water-sediment interface. *J Acoust Soc Amer*, **70**: 149~156
- Wolf J P (著); 吴世明, 唐有职, 陈龙珠, 等(译), 1989. 土-结构动力相互作用. 北京: 地震出版社. 358

附录

[P]_{6×6} 各元素表达式

$$\begin{aligned}
 P_{11} &= -l_{i1x} & P_{12} &= -l_{r2x} & P_{13} &= -l_{rsz} \\
 P_{14} &= l_{t1x} & P_{15} &= l_{t2x} & P_{16} &= -l_{tsz} \\
 P_{21} &= l_{i1z} & P_{22} &= l_{r2z} & P_{23} &= -l_{rsx} \\
 P_{24} &= l_{t1z} & P_{25} &= l_{t2z} & P_{26} &= l_{tsx} \\
 P_{31} &= -(\lambda_{c1} + \alpha_1 M_1 \delta_1) l_{i1}^2 + 2\mu_1 l_{i1x}^2 \\
 P_{32} &= -(\lambda_{c1} + \alpha_1 M_1 \delta_2) l_{r2}^2 + 2\mu_1 l_{r2x}^2 \\
 P_{33} &= 2\mu_1 l_{rsx} l_{rsz} & P_{34} &= (\lambda_{c2} + \alpha_2 M_2 \delta_1') l_{t1}^2 - 2\mu_2 l_{t1x}^2 \\
 P_{35} &= (\lambda_{c2} + \alpha_2 M_2 \delta_2') l_{t2}^2 - 2\mu_2 l_{t2x}^2 & P_{36} &= 2\mu_2 l_{tsx} l_{tsz} \\
 P_{41} &= 2\mu_1 l_{i1x} l_{i1z} & P_{42} &= 2\mu_1 l_{r2x} l_{r2z} & P_{43} &= \mu_1 l_{rsz}^2 - \mu_1 l_{rsx}^2 \\
 P_{44} &= 2\mu_2 l_{t1x} l_{t1z} & P_{45} &= 2\mu_2 l_{t2x} l_{t2z} & P_{46} &= -\mu_2 l_{tsz}^2 + \mu_2 l_{tsx}^2 \\
 P_{51} &= l_{i1z} \delta_1 & P_{52} &= l_{r2z} \delta_2 & P_{53} &= -l_{rsx} \delta_3 \\
 P_{54} &= l_{t1z} \delta_1' & P_{55} &= l_{t2z} \delta_2' & P_{56} &= l_{tsx} \delta_3' \\
 P_{61} &= -(l_{i1}^2 \delta_1 + \alpha_1 l_{i1}^2) M_1 & P_{62} &= -(l_{r2}^2 \delta_2 + \alpha_1 l_{r2}^2) M_1 \\
 P_{63} &= 0 & P_{64} &= (l_{t1}^2 \delta_1' + \alpha_2 l_{t1}^2) M_2 \\
 P_{65} &= (l_{t2}^2 \delta_2' + \alpha_2 l_{t2}^2) M_2 & P_{66} &= 0
 \end{aligned}$$

其中, $\lambda_{c1} = \lambda_1 + 2\mu_1 + \alpha_1^2 M_1$; $\lambda_{c2} = \lambda_2 + 2\mu_2 + \alpha_2^2 M_2$; $\lambda_1, \mu_1, \alpha_1, M_1$ 是饱和土层 1 的弹性常数; $\lambda_2, \mu_2, \alpha_2, M_2$ 是饱和土层 2 的弹性常数; $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ 及 $\delta_1', \delta_2', \delta_3'$ 分别是土层 1 和土层 2 的参数。