

# 地震活动的逾渗模型及临界状态的研究<sup>\*</sup>

柯善明 顾浩鼎 翟文杰

(中国沈阳 110031 辽宁省地震局)

**摘要** 利用现代非线性物理理论及震源理论,结合地震活动的特点,建立了地震活动的逾渗模型.把一次大地震孕育发展的过程看做一次逾渗相变过程,应用重正化群方法处理了逾渗相变.把逾渗相变中的相关长度为无穷大作为重正化群变换中的不动点,在不动点下计算系统的临界性质,得到了逾渗概率指数、相关长度指数等临界指数.利用 1975 年海城地震以及 1976 年唐山地震前后的地震活动资料,对两次地震的逾渗相变过程进行了讨论.

**关键词** 逾渗模型 地震活动 逾渗相变 重正化群方法 临界指数

## 引言

在以地震预报为主要目标的传统地震活动研究中,试图通过表象上不同性质地震活动的比较,寻找某种能够识别前兆地震活动的判据来预测大地震的发生,实际情况往往令人失望.对于大地震前的临震状态来说,虽然大地震本身的破裂过程没有本质不同,但前震活动却有很大差别.由地震活动演化研究的结果看(顾浩鼎,孙文福,1992),震源系统在临震状态下地震活动涨落可自行扩大的行为,意味着系统行为的不确定性和不可预测性.这就促使我们必须利用新理论、新方法来进行进一步研究复杂的地震活动现象,设法绕过不可预测行为这一困难,使地震预报向着更科学和更高的层次上发展.

逾渗模型是用以描述流体在无序介质中作随机扩展和流动的一个数学模型(Broadbent, Hammersley, 1957),例如流体在多孔介质中的流动就可以用逾渗模型来描述.假定在一个二维方形点阵上的座(键)可以被随机地占有,当占据概率达到某一临界值即逾渗阈值时,点阵上就会出现一个无限大集团,即逾渗集团.逾渗集团由相互联结的占据座(键)组成,称为座(键)逾渗.从物理上相变理论的角度看,当逾渗集团出现时就认为发生了一个逾渗相变,逾渗集团具有统计自相似结构,是一个典型的分形.逾渗相变是一个二级相变,逾渗概率是逾渗相变时的序参量.当占据概率小于逾渗阈值时,逾渗概率是恒等于零的,这时点阵上的占据座(键)相互独立,存在是无序的;当占据概率大于逾渗阈值时,点阵上出现逾渗集团,这时占据座(键)之间不再独立,而是相互关联形成有序的空间结构,点阵上从无到有地出现了长程联结性.

<sup>\*</sup> 辽宁省科技基金(972016)和辽宁省地震局中青年科研基金(97-Q-02)资助课题.  
1998-12-24 收到初稿,1999-05-12 收到修改稿,1999-05-13 决定采用.

地震活动演化理论证明(顾浩鼎, 孙文福, 1992), 一般情况下的地震活动是无序的, 从而作为与这些事件联系的震源系统也是一种无序结构. 在这样一种无序结构中的地震活动的涨落是否可以用逾渗模型描述, 正是本文试图讨论的. 其实, 震源系统的破裂过程与逾渗相变过程是非常相似的. 我们知道, 一次大地震孕育发展的过程, 就是震前活动逐步发展到余震的过程, 总是要经历主震发生这一突变过程. 在一次大地震发生前, 其孕育区域内的中小地震的发生具有随机性, 它们的时空结构是无序的, 也就是说与中小地震的发生相联系的小尺度断裂活动也是无序的. 当小尺度断裂活动的关联程度逐渐增强而达到长程关联时, 大尺度的断裂活动有可能发生并产生大地震, 此时震源或地震活动所代表的系统经历的就是临界状态. 基于上述思路, 我们尝试利用逾渗模型来研究大地震发生前地震活动在临界状态下的特征, 无疑对地震预测的研究和发展具有重要意义.

## 1 地震活动的逾渗模型

逾渗模型在描述系统的临界现象方面已得到了广泛应用. 地震学者曾经利用逾渗模型研究破裂连通等问题(Bebbington *et al.*, 1989; Robertson *et al.*, 1995). 最新研究成果表明, 地震破裂过程的极端简化情形相当于一个键逾渗模型(Wu, 1998). 因此, 我们可将空间位置相邻的中小地震活动看作键连通集团, 通过逾渗阈值附近的集团分布及结构的研究, 讨论系统发生逾渗相变的临界特征.

我们将一次大地震孕育发展过程所依附的地质环境作为整体的广义震源系统(顾浩鼎, 孙文福, 1992), 并将其模拟为由破裂强度  $\sigma_f$  的基本孕震块体组成的二维阵列. 我们可以将此过程中发生的中小地震, 与基本孕震块体所发生的断裂活动联系起来. 根据岩石破碎的研究成果, 可以假定基本孕震块体的破裂概率满足二次 Weibull 分布

$$p(\sigma_f \leq a\sigma) = p_a = 1 - \exp[-(a\sigma)^2] \quad (1)$$

其中,  $x = \sigma/\sigma_0$ ,  $\sigma$  为作用应力,  $\sigma_0$  为基本孕震块体的参考强度,  $a$  为尺度参数. 因此  $\sigma_f < \sigma$  的概率, 即基本孕震块体的破裂概率为

$$p_1 = 1 - \exp(-x^2) \quad (2)$$

当破裂概率  $p_1$  达到某一临界值即逾渗阈值  $p_c$  时, 系统就会出现一个由相互连通着的破裂基本孕震块体组成的贯穿整个阵列的无限大集团, 即逾渗集团, 此时系统发生了逾渗相变. 在相变时序参量是重要的物理量. 它描述了系统的有序程度, 在逾渗模型中序参量为逾渗概率. 当破裂概率为  $p_1$  时, 阵列上任一基本孕震块体属于逾渗集团的概率称为逾渗概率, 写成  $p_\infty(p_1)$ . 当  $p_1$  小于逾渗阈值  $p_c$  时, 由于系统不存在逾渗集团, 逾渗概率是恒等于零的, 此时系统只存在一些有限大小的由若干破裂基本孕震块体组成的集团. 而当  $p_1$  大于逾渗阈值后, 系统将出现逾渗集团, 逾渗概率  $p_\infty(p_1)$  会随着  $p_1$  的增加而很快地增大. 这表示无限大集团吞并了其它有限大小的集团, 整个阵列被一个无限大集团所占领. 在逾渗阈值附近, 可将逾渗概率表示为(Stanley, 1985)

$$p_\infty(p_1) \sim |p_1 - p_c|^\beta \quad (3)$$

其中,  $\beta$  称为逾渗概率指数.

在逾渗相变中, 另一个重要物理量是相关长度  $\xi$ . 在我们的系统中, 它是指同一集团中两个基本孕震块体之间的平均距离. 当系统的破裂概率未达到  $p_c$  时, 系统的关联长度是有

限大小的,最大的破裂尺度就是关联长度.在相变临界点时,由于逾渗集团的存在促使系统关联长度也趋于无穷大,即出现了长程关联,远远大于基本孕震块体的破裂将导致系统发生宏观突变.在逾渗阈值附近,相关长度可表示为

$$\xi \sim |p_1 - p_c|^{-\nu} \quad (4)$$

其中,  $\nu$  为相关长度指数.

上面我们讨论了系统在逾渗阈值处的几个临界指数,这些量不仅描述了系统在临界状态时的特征,而且与逾渗集团的分维数有关系,可表示为(高安秀树,1986)

$$D = d - \frac{\beta}{\nu} \quad (5)$$

其中,  $D$  为逾渗集团的分维数,  $d$  为空间维数.在相变临界点处,由于逾渗集团的存在,系统的分维数与逾渗集团的分维数相差很小.随着破裂概率的增大,逾渗集团吞并了其它有限大小集团,整个系统被一个无限大集团所占领,因此,系统的分维数将逐渐向空间维数靠近.

## 2 利用重正化群方法研究地震活动的逾渗相变

用传统的数学方法描述一个处于临界状态的物理系统时,首先,将面临无限大自由度的困难,因为有无限多的粒子或大大小小的裂隙等等;其次,如何只用几个临界参量就可以描述系统中与不同尺度相联系的状态涨落.重正化群方法正是在克服传统方法无法解决上述问题的基础上提出的一种简化相态涨落行为的技术.应用这一方法,系统首先要满足无标度性要求.对于我们面临的要描述无数同大大小小裂隙相联系的大小地震事件的一个广义震源系统而言,顾浩鼎等讨论过这一系统在临界点时地震活动的自行扩大涨落的行为,并证明了系统行为与破裂尺度无关(顾浩鼎,孙文福,1992;顾浩鼎,陈运泰,1997).事实上震源系统包容了大大小小的各种破裂尺度,从而允许使用重正化群方法.重正化群的目的在于简化系统相态涨落行为的描述,而能获得系统在临界点状态的定量描述.系统在发生二级相变的临界点处,它的相关长度是趋于无穷大的.无穷大相关长度与地球介质的宏观整体破裂一致,系统具有尺度变换下的不变性即标度不变性,这时系统必然具有自相似性.我们可以利用标度不变性求出系统在临界点处的各种临界指数.

我们选取含有 4 个方形排列的基本孕震块体为一处理单元(见图 1).在计算中引入了单元内块体之间应力转移的机制,并假定单元内所有块体都破裂单元才破裂.为量度由应力转移而造成的块体的破裂,使用了条件概率  $p_{a,b}$ .它表示当应力  $(a-b)\sigma$  被转移到具有  $b\sigma$  应力的未破裂块体时,块体发生破裂的概率,可表示为(Smalley, Turcotte, 1985)

$$p_{a,b} = \frac{p(b\sigma < \sigma_f \leq a\sigma)}{p(\sigma_f > b\sigma)} \quad (6)$$

通过计算可求得

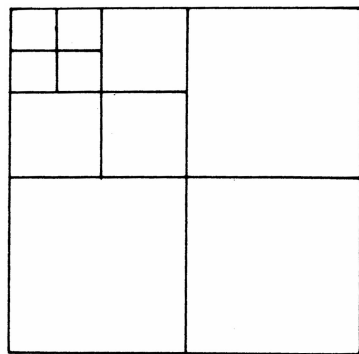


图 1 每个单元含有 4 个基本孕震块体的二维震源模型

$$p_{a,b} = \frac{p_a - p_b}{1 - p_b} \tag{7}$$

因此，我们得到新的重正化后的阵列结构，并且得到新的阵列概率  $p_1'$  与  $p_1$  的关系，即重正化群变换公式[请见附录公式(7)]

$$\begin{aligned} p_1' = & p_1^4 + 4p_1^3(p_4 - p_1) + 6p_1^2(p_2 - p_1)^2 + 12p_1^2(p_2 - p_1)(p_4 - p_2) + \\ & 4p_1(p_{4/3} - p_1)^3 + 12p_1(p_{4/3} - p_1)^2(p_4 - p_{4/3}) + 12p_1(p_{4/3} - p_1) \times \\ & (p_2 - p_{4/3})^2 + 24p_1(p_{4/3} - p_1)(p_2 - p_{4/3})(p_4 - p_2) = R(p_1) \end{aligned} \tag{8}$$

在临界点处，重正化群变换后的相关长度仍然是无穷大，因此  $p_1 = p_c$  是重正化群变换的不动点，式(8)可写成

$$p_c = R(p_c) \tag{9}$$

由式(9)可解出 3 个不动点  $p_c = 0, 0.170\ 7, 1$ 。其中  $p_c = 0, 1$  是稳定不动点； $p_c = 0.170\ 7$  是不稳定不动点，是一个相变临界点。

将  $p_1'$  在临界点附近作泰勒展开

$$p_1' = p_c + \lambda(p_1' - p_c) + o(p_1' - p_c)^2 \tag{10}$$

由式(4)得

$$\nu = \frac{\ln g}{\ln \lambda} = 0.808\ 4 \tag{11}$$

其中， $g = \xi'/\xi = 2$  为重正化后相关长度的相对变化。

$$\lambda = \left( \frac{dp_1'}{dp_1} \right)_{p_1=p_c} = 2.357$$

同样，可以求得  $\beta = 0.428\ 9$ 。

逾渗集团在临界点的分维数可由公式(5)求得

$$D = d - \frac{\beta}{\nu} = 1.470 \tag{12}$$

以上我们利用重正化群方法，计算了地震活动的逾渗过程在逾渗阈值处的各种临界指数。我们可以利用大地震发生前后的地震活动资料，通过临界指数来讨论大地震发生的各种临界条件。

3 震例研究

我们利用 1975 年海城地震与 1976 年唐山地震前后的地震活动资料，对地震活动的逾渗模型进行实际应用研究，定量地讨论一次大地震发生前震源系统地震活动的临界状态。

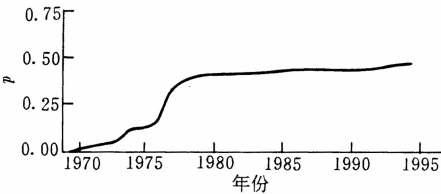


图 2 海城地震逾渗相变过程的破裂概率随时间的变化曲线

对于海城地震我们选取东经  $122^{\circ} \sim 124^{\circ}$ ，北纬  $40^{\circ} \sim 42^{\circ}$  作为研究区域。将研究区域划分为  $0.2^{\circ} \times 0.2^{\circ}$  的小区域作为基本孕震单元。孕震区域和基本孕震单元的划分依赖于所选取震级的震源尺度。选取的研究时间为地震活动开始明显增强的 1970~1995 年。在计算中，我们选择震级下限为  $M_L = 3.0$ 。

我们首先计算了孕震区域内基本孕震单元的发震(基本孕震单元发生断裂活动)概率  $p$ ，

孕震单元的发震概率是发生过地震的基本孕震单元占基本孕震单元总数的百分比. 图 2 给出了 1970 年~1995 年的  $p$ - $t$  图. 从图中可以看出, 1975 年 2 月  $p$  值增大到逾渗阈值  $p_c=0.1707$  附近, 至此, 海城地震发生. 随着余震活动  $p$  值的迅速增大, 至 1995 年 12 月  $p$  值已达到 0.46. 图 3 给出了逾渗阈值附近的逾渗相变图. 从图中可以看出, 此时已形成了一个从上到下的由破裂基本孕震单元组成的无限大集团, 即逾渗集团. 逾渗阈值附近的逾渗概率指数、相关长度指数及分维数等可由公式(3)、(4)及(5)求得, 结果列于表 1.

表 1 海城地震逾渗阈值附近的数值计算结果

年-月-日	$p$	$\beta$	$\xi$	$\nu$	$D$
1975-02-03	0.17	0.3315	31.70	0.4787	1.307
1975-02-03	0.18	0.4362	37.43	0.7743	1.437
1975-02-04	0.19	0.4980	37.33	0.9171	1.457
1975-02-04	0.20	0.4858	53.71	1.128	1.569
1975-02-04	0.21	0.5131	53.18	1.227	1.582

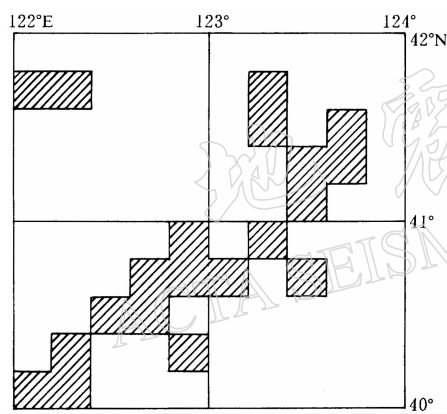


图 3 海城地震逾渗相变过程中形成的逾渗集团( $p=0.20$ )

对于 1976 年唐山地震, 我们选取的研究范围为东经  $117^{\circ}\sim 119^{\circ}$ , 北纬  $38.6^{\circ}\sim 40.6^{\circ}$ , 研究时间为 1972 年 6 月~1980 年, 基本孕震单元的划分和震级下限的选取与海城地震相同. 图 4 和图 5 分别给出了唐山地震的  $p$ - $t$  图及逾渗相变图. 从图 4 可以看到, 在 1976 年 2 月,  $p$  值已达到逾渗阈值附近. 随着 1976 年 7 月唐山地震的发生,  $p$  值迅速增大至 1980 年已达到的 0.54. 从图 5 可以看到, 在逾渗阈值附近, 形成了一个从左到右的由破裂基本孕震单元组成的逾渗集团. 逾渗阈值附近的各种临界指数等结果列于表 2.

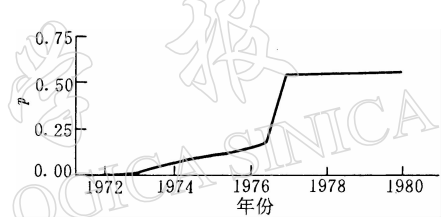


图 4 唐山地震逾渗相变过程的破裂概率随时间的变化曲线

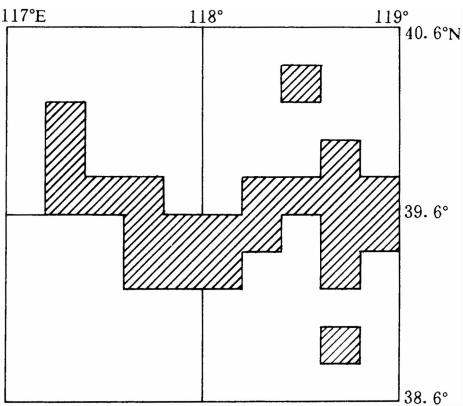


图 5 唐山地震逾渗相变过程中形成的逾渗集团( $p=0.22$ )

计算结果表明, 无论海城地震还是唐山地震, 在逾渗相变过程中, 震前地震活动在逾渗阈值附近所遵循的规律是相同的, 即主震发生前地震活动的逾渗概率指数及相关长度指

数均由低值逐渐增大而跃过逾渗概率临界指数(0.428 9)及相关长度临界指数(0.808 4),并且随着发震概率  $p$  的逐渐增大,逾渗集团的分维数及震源系统的相关长度也逐渐增大.

表 2 唐山地震逾渗阈值附近的数值计算结果

年-月-日	$p$	$\beta$	$\xi$	$\nu$	$D$
1976-02-22	0.17	0.3315	33.25	0.4823	1.313
1976-07-28	0.18	0.4922	34.72	0.7583	1.351
1976-07-28	0.19	0.5591	36.28	0.9097	1.385
1976-07-28	0.20	0.6006	54.17	1.131	1.469
1976-07-28	0.21	0.6304	56.89	1.248	1.495
1976-07-28	0.22	0.5847	57.62	1.347	1.566

4 讨论与结论

(1) 虽然海城地震和唐山地震发生前的地震活动有着显著的差别,但它们的震前活动所遵循的规律并无明显的不同.海城地震发生前丰富的前震活动大多发生在破裂的基本孕震单元之内,而使发震概率并无明显的增加.对于唐山地震而言,则恰恰相反,无任何可觉察的前震活动.但作为震源系统整体,破裂概率早在 1976 年 2 月就已达到逾渗阈值.从这一意义讲,震源系统从 1976 年 2 月~1976 年 7 月唐山地震发生一直处于临界状态.与海城地震比较,它们在临界点表现出涨落不同的自行扩大行为,也表现出系统行为不同的不可预测性.

(2) 通过对某区域内逾渗阈值附近的地震活动的各种临界指数的研究,我们可以对中短期内该区域是否有大地震的发生作出定量判别,为地震预报提供参考指标.作为逾渗相变序参量的逾渗概率是相变时逾渗集团大小的量度,相关长度是系统内破裂基本孕震单元相互关联程度的量度.因此,逾渗相变的临界指数具有明显的物理意义,它们分别达到逾渗概率和相关长度等临界指数是系统发生宏观突变的必要条件,但是宏观突变的最终发生将取决于震源系统在临界点处各种因素对涨落的影响.

(3) 在实际应用当中,我们可以选取某一研究范围  $2^{\circ} \times 2^{\circ}$  作为研究区域,并划分  $0.2^{\circ} \times 0.2^{\circ}$  作为基本孕震单元,以 5 年左右为研究时间段,并以一年为步长滑动来计算研究区域内的发震概率,如发震概率达到逾渗阈值并且逾渗概率指数与相关长度指数均达到临界值,我们就可以得到这一区域在中短期内将有可能发生大地震的结论.当然,我们给出的仅是初步研究结果,还有待在今后的地震预报研究和实践中逐步充实完善.

(4) 从相变临界点附近逾渗集团的形成过程看,很容易使我们联想到以前的地震活动中提出的大地震发生前的有关地震活动条带和孕震空区等概念.事实上,一个集团不断增大而在逾渗阈值附近形成逾渗集团的过程,是可以通过地震活动的条带和空区等空间几何形态的变化来实现的,逾渗相变理论将有可能成为大地震前地震条带和孕震空区的形成机制和定量化研究的理论基础.

本研究得到吴忠良教授的热情支持和帮助,在此谨表诚挚的谢意.

## 参 考 文 献

- 高安秀树著. 1986; 沈步明, 常子文译. 1989. 分数维. 北京: 地震出版社, 42~63
- 顾浩鼎, 孙文福. 1992. 地震活动的自组织和演化. 地球物理学报, **35**(1): 25~36
- 顾浩鼎, 陈运泰. 1997. 地震空区的物理意义和震源系统的无标度性. 见: 陈运泰主编. 中国地震学研究进展. 北京: 地震出版社, 37~40
- Stanley H E. 1985. 重正化群与渗流理论. 物理学进展, **5**(1): 1~65
- Bebbington M, Vere-Jones D, Zheng X. 1989. Percolation theory: a model for rock fracture? *Geophys J Int*, **100**: 215~220
- Broadbent S R, Hammersley J M. 1957. Percolation processes. *Proceedings of the Cambridge Philosophical*, **53**: 629~641
- Robertson M C, Sammis C G, Sahimi M, *et al.* 1995. Fractal analysis of three-dimensional spatial distributions of earthquakes with a percolation interpretation. *J Geophys Res*, **100**: 609~620
- Smalley J R F, Turcotte D L. 1985. A renormalization group approach to the stickslip behavior of faults. *J Geophys Res*, **90**: 1 894~1 900
- Wu Z L. 1998. Implications of a percolation model for earthquake "nucleation". *Geophys J Int*, **133**: 104~110

## 附录 地震活动的逾渗相变过程中各种临界指数的计算

根据岩石破碎的研究成果, 可以假定基本孕震块体的破裂概率满足二次 Weibull 分布

$$p(\sigma_f \leq a\sigma) = p_a = 1 - \exp[-(a\sigma)^2] \quad (1)$$

其中,  $x = \sigma/\sigma_0$ ,  $\sigma$  为作用应力,  $\sigma_0$  为基本孕震块体的参考强度,  $a$  为尺度参数. 因此,  $\sigma_f < \sigma$  的概率, 即基本孕震块体的破裂概率为

$$p_1 = 1 - \exp(-x^2) \quad (2)$$

由式(1)和式(2)得

$$p_a = 1 - (1 - p_1)^{a^2} \quad (3)$$

为量度由应力转移而造成的块体的破裂, 引入条件概率  $p_{a,b}$ . 它表示当应力  $(a-b)\sigma$  被转移到具有  $b\sigma$  应力的未破裂块体时, 块体发生破裂的概率. 由条件概率的定义得到

$$p_{a,b} = \frac{p(b\sigma < \sigma_f \leq a\sigma)}{p(\sigma_f > b\sigma)} \quad (4)$$

$p_a$  可由概率密度积分求出

$$p_a = \int_0^{a\sigma/\sigma_0} \frac{dp_1}{dx} dx$$

因此

$$p(b\sigma < \sigma_f \leq a\sigma) = \int_{b\sigma/\sigma_0}^{a\sigma/\sigma_0} \frac{dp_1}{dx} dx = p_a - p_b$$

$$p(\sigma_f > b\sigma) = 1 - p(\sigma_f \leq b\sigma) = 1 - p_b$$

因此, 由式(4)得到

$$p_{a,b} = \frac{p_a - p_b}{1 - p_b} \quad (5)$$

选取含有 4 个方形排列的基本孕震块体为一处理单元. 引入单元内块体之间的已破裂块体向未破裂块体应力转移的机制, 并假定单元内所有块体都破裂单元才破裂. 由此可得到重正化后的阵列概率  $p'_1$  与  $p_1$  的关系, 即重正化群变换公式

$$p'_1 = p_1^4 + 4p_1^3(1-p_1)p_{4,1} + 6p_1^2(1-p_1)^2[p_{2,1}^2 + 2p_{2,1}(1-p_{2,1})p_{4,2}] + 4p_1(1-p_1)^3\{p_{1/3,1}^3 + 3p_{4/3,1}^2(1-p_{4/3,1})p_{4,4/3} + 3p_{4/3,1}(1-p_{4/3,1})^2[p_{2,4/3}^2 + 2p_{2,4/3}(1-p_{2,4/3})p_{4,2}]\} \quad (6)$$

利用式(3)和式(5)得

$$\begin{aligned} p_1' = & p_1^4 + 4p_1^3(p_4 - p_1) + 6p_1^2(p_2 - p_1)^2 + 12p_1^2(p_2 - p_1)(p_4 - p_2) + \\ & 4p_1(p_{4/3} - p_1)^3 + 12p_1(p_{4/3} - p_1)^2(p_4 - p_{4/3}) + 12p_1(p_{4/3} - p_1) \times \\ & (p_2 - p_{4/3})^2 + 24p_1(p_{4/3} - p_1)(p_2 - p_{4/3})(p_4 - p_2) = R(p_1) \end{aligned} \quad (7)$$

其中,  $R(p_1)$  表示  $p_1$  的函数关系.

在临界点处, 重正化群变换后的相关长度仍然是无穷大, 因此,  $p_1 = p_c$  是重正化群变换的不动点, 式(7)可写成

$$p_c = R(p_c) \quad (8)$$

由式(8)可解出 3 个不动点  $p_c = 0, 0.1707, 1$ . 其中,  $p_c = 0, 1$  是稳定不动点;  $p_c \approx 0.1707$  是不稳定不动点, 是一个相变临界点.

将  $p_1'$  在临界点附近作泰勒展开

$$p_1' = p_c + \lambda(p_1' - p_c) + o(p_1' - p_c)^2 \quad (9)$$

其中

$$\lambda = \left( \frac{dp_1'}{dp_1} \right)_{p_1=p_c} \approx 2.357$$

因此, 由

$$p_{\infty}(p_1) \sim |p_1 - p_c|^{\beta}$$

得

$$p_{\infty} \sim \lambda^{\beta} p_{\infty}$$

$$\beta = \frac{\ln g_1}{\ln \lambda} \approx 0.4289 \quad (10)$$

由

$$\xi \sim |P_1 - p_c|^{-\nu}$$

得

$$\xi' \sim \lambda^{-\nu} \xi$$

$$\nu = \frac{\ln g_2}{\ln \lambda} \approx 0.8084 \quad (11)$$

其中,  $g_1 = p_{\infty}' / p_{\infty} \approx 1.444$ ,  $g_2 = \xi' / \xi = 2$ , 分别为重正化后逾渗概率及相关长度的相对变化.

逾渗集团在临界点的分维数可由上面结果求得

$$D = d - (\beta/\nu) \approx 1.470 \quad (12)$$

其中,  $d=2$  为空间维数.