

# 地震区划结果随机场特征 \*

高孟潭 潘 华

(中国北京 100081 国家地震局地球物理研究所)

## 摘 要

检验具有概率含义的地震区划图是人们比较关心的问题之一. 如何用实际的地震样本资料直接检验区划图, 目前尚无比较好的方法. 作者从随机场的理论出发, 首先定义了地震区划结果随机场的概念, 然后采用蒙特卡洛方法证明了地震区划结果随机场的均值具有各点历经的特性, 即在一定的条件下地震区划结果随机场的空间平均值以概率 1 收敛于集平均值, 并等于地震区划图的超越概率值. 据此, 作者提出了用实际样本的空间分布的平均值, 检验具有概率含义的地震区划图的方法. 用近 15 年的实际地震产生的地震烈度资料和近 50 年的实际地震产生的烈度资料, 按本文提出的方法, 初步检验了中国地震烈度区划图(1990 版), 认为该地震区划图基本上是合理的. 本文提出的方法也可以用于其它可以用随机场理论描述的场所.

关键词 随机场; 地震区划; 烈度; 空间平均值; 概率

## 1. 引 言

编制全国新的地震区划图(1990 年版)采用了地震危险性概率分析方法(时振梁等, 1991), 区划图上标出的值为 50 年内超越概率为 0.1 的烈度值. 如果用  $X(s_i) = 1$  表示场点  $s_i$  在未来 50 年内地震烈度超越区划图上所标出的值, 用  $X(s_i) = 0$  表示场点  $s_i$  在未来 50 年内地震烈度不超越区划图上所标出的值, 则对给定场点,  $X(s_i)$  为一随机变量. 在未来 50 年内, 每个场点的  $X(s_i)$  可取 1 或取 0, 但这个空间分布不能用一个确定的函数(或数值分布)来描述. 这种特性与随机过程描述的现象非常类似, 因此, 有可能利用随机过程的研究成果, 建立描述  $X(s_i)$  的方法. 为此, 作者首先建立了随机场的概念, 并提出一系列相应的分析方法, 并据此研究了地震区划结果随机场的基本特征, 特别详细分析了集平均和空间平均的关系, 讨论了用实际地震产生的地震烈度空间分布来检验区划结果的可能性.

## 2. 地震区划结果随机场及其描述

### 2.1 区划结果随机场

设  $E$  是随机试验,  $S = \{e\}$  是它的样本空间, 如果对于每一个  $e \in S$ , 总可以依一定的规则确定一个空间分布函数

\* 国家地震局地球物理研究所论著 93A0002.

1991 年 8 月 2 日收到本文初稿, 1992 年 2 月 7 日决定采用.

$$X(e, s) \quad s \in S \quad (1)$$

与之对应,对于所有的  $e \in S$  来说就得到一簇空间  $s$  的函数.我们称此簇空间  $s$  的函数为随机场,而簇中每一个函数称为该随机场的样本函数.

根据上述定义,我们进一步建立地震区划结果随机场的概念.给定场点地震烈度值是否超过区划图标示的值是一随机事件,用  $X(e, s)$  表示,其样本空间为  $\{1, 0\}$ ,值 1 表示超过,值 0 表示不超过.对于未来 50 年内的一个可能的地震序列,可以得到  $X(e, s)$  的一次样本实现,用  $X_i(s)$  来表示,  $X_i(s)$  可等于 1 或等于 0.由区划图的定义,对给定的场点有

$$P\{X(e, s) = 1\} = 0.1 \quad P\{X(e, s) = 0\} = 0.9 \quad (2)$$

区划图的编制,是针对空间离散分布做出的,即  $s$  是按格点  $(0.2^\circ \times 0.2^\circ)$  分布的,所以地震区划结果随机场为离散参数随机场.

为了简便,以后的叙述中,将  $X(e, s)$  简写成  $X(s)$ .

## 2.2 随机场的数字特征

随机场的分布函数簇能完善地刻画随机场的统计特性.然而对地震区划结果随机场而言,建立这个函数簇几乎是不可能实现的.因此,有必要与随机过程理论一样(帕普力斯 1984; 浙江大学数学系高等数学教研组编, 1979)引入随机场的基本数字特征.

### 2.2.1 均值

$$\mu_x(s_j) = E[X(s_j)] = \sum_{x_i=0}^1 x_i P\{X(s_j) = x_i\} \quad (3)$$

$\mu_x(s_j)$  是给定空间场点上的均值.根据地震区划结果随机场的定义,由(3)式可以推得

$$\mu_x(s_j) = P\{X(s_j) = 1\} = 0.1 \quad (4)$$

(4)式是讨论地震区划结果检验的重要关系式之一.  $\mu_x(s_j)$  称为集平均值,和后面引进的空间平均值不同.

### 2.2.2 方差

$$\sigma_x^2(s_j) = D[X(s_j)] = E\{[X(s_j) - \mu_x(s_j)]^2\} \quad (5)$$

不难推得,区划结果随机场的方差也一定是一个常数,其值为

$$\sigma_x^2(s_j) = \mu_x(s_j)[1 - \mu_x(s_j)] = 0.09 \quad (6)$$

根据(4)式和(6)式,我们可以断言,对于各个场点,观测值都以相同的偏差程度围绕相同的均值变化.均值和方差是刻画随机场在各个孤立场点统计特性的重要数字特征,为讨论两个场点之间的联系,还要引入相关函数的概念.

### 2.2.3 相关函数

令  $X(s_j)$  和  $X(s_k)$  为随机场  $X(s)$  在任意两个场点  $s_j$  和  $s_k$  的状态,相应地有  $P\{X(s_j) = x_j, X(s_k) = x_k\}$  为联合分布概率.称

$$R_x(s_j, s_k) = E[X(s_j)X(s_k)] = \sum_{x_j=0}^1 \sum_{x_k=0}^1 x_j x_k P\{X(s_j) = x_j, X(s_k) = x_k\} \quad (7)$$

为随机场的相关函数.可以证明,方差可以用相关函数和均值来表示.

## 2.3 随机场的均匀性

与随机过程中的平稳性概念相类似,可以建立随机场均匀性概念.均匀随机场的  $n$  维

分布函数对任意整数应满足关系式

$$\begin{aligned} P_n\{X(s_1) = x_1, X(s_2) = x_2, \dots, X(s_n) = x_n\} \\ = P_n\{X(s_1 + l) = x_1, \dots, X(s_n + l) = x_n\} \end{aligned} \quad (8)$$

(8)式表明均匀随机场的统计特征不随空间坐标变化,其均值和方差为常数,而相关函数仅与场点之间的距离有关。

我们定义,对给定的随机场,如果

$$E[X(s)] = \text{常数} \quad (9)$$

$$\text{且} \quad E[X^2(s)] < +\infty, E[X(s_j)X(s_j + l)] = R_x(l) \quad (10)$$

则称  $X(s)$  为广义均匀随机场。

根据(4)式和(6)式可知,由于均值和方差都是常数,所以只要地震区划结果随机场的相关函数只是场点之间距离的函数,它就是一个广义均匀的随机场。

## 2.4 各点历经性

定义: 设  $X(s)$  为一均匀随机场,

$$(1) \text{ 如果 } \langle X(s) \rangle = E[X(s)] = \mu_x \quad (11)$$

依概率 1 成立,则称场  $X(s)$  的均值具有各点历经性。

$$(2) \text{ 如果 } \langle X(s)X(s+l) \rangle = E[X(s)X(s+l)] = R_x(l) \quad (12)$$

依概率 1 成立,则称场  $X(s)$  的自相关函数具有各点历经性。

(3) 如果  $X(s)$  的均值和自相关函数都具有各点历经性,则称  $X(s)$  是广义各点历经随机场。

其中尖括号表示对场点求平均,如

$$\langle X(s) \rangle = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x(s_j) \quad (13)$$

根据上述讨论,如果地震区划结果随机场的均值具有各点历经性,则随机场样本函数的均值应趋于  $\mu_x$ ,即等于 0.1。参照随机过程理论关于平稳随机过程各态历经性的定理,不难证明广义均匀随机场的均值具有各点历经性的充要条件为

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} [R_x(0) + \sum_{i=1}^{N-1} 2(1 - \frac{i}{N}) R_x(i)] = \mu_x^2 \quad (14)$$

其中,  $R_x(i)$  为相关函数。实际上,均值满足各点历经性并不需要“相关函数仅为两点之间距离的函数”这一假定,而只需要满足下列充要条件:

$$E[X(s)] = \mu_x \quad (15)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^N R_x(s_i, s_n) = \mu_x^2 \quad (16)$$

第一个条件表示随机场的一维概率分布为均匀分布,区划结果随机场恰好满足这个条件。因此,要证明区划结果随机场的均值具有各点历经性,只要证明(16)式的成立。

## 3. 区划结果随机场样本函数的生成

根据地震区划图(1990年版)的概率计算模型,建立任意两点的联合概率分布函数,进

而确定两点的相关函数,然后再讨论区划结果随机场的均匀性和各点历经性,这种作法无疑是相当困难的.在本文研究中,我们采用蒙特卡洛方法产生区划结果随机场样本.具体方法如下:

(1)由地震带遵从泊松过程的假定,按每个地震带的年平均发生率和 50 年的时间段,用蒙特卡洛方法确定每个地震带可能发生的地震数目.

(2)对每个地震带,根据其  $b$  值和震级上限  $M_u$ ,用蒙特卡洛方法确定每次地震的震级.

(3)对每个地震带的每个地震,按其所属地震震级档的空间分布函数,用蒙特卡洛方法确定该地震所属的潜在震源区.

(4)根据潜在震源区内地震空间分布均匀的假定,由蒙特卡洛方法确定地震的经、纬度坐标.

(5)根据潜在震源区的方向性函数,按蒙特卡洛方法确定每个地震影响场烈度等值线长轴走向.

(6)用衰减关系,将经上述步骤随机产生的一组地震换算成每个场点的烈度值,对每个场点取一个最大值.

(7)将所得烈度值与区划图上的标定值比较以确定随机场样本  $X(s)$  取 1 还是取 0.

以上各个步骤中所采用的所有参数,均与地震区划图(1990 年版)的参数相同.因此,按上述方法产生的样本,同地震区划图结果是属于一个母体的,它们应具有同样的统计性质.

#### 4. 区划结果随机场的均匀性和各点历经性的讨论

由第 2 节的分析结果可知,讨论区划结果随机场的均匀性和各点历经性,首先必须计算任意两点的相关函数,由随机样本计算相关函数的公式为

$$R_x(s_k, s_j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(s_k) x_i(s_j) \quad (17)$$

本研究中所抽取的样本总数  $N$  为 1000. 图 1 是分别沿经线方向和沿纬线方向滑动计算得到的两个固定距离点之间的相关函数,其目的是考察相关函数与场点之间的距离的关系.由图 1 可以看出,  $R_x(s_k, s_j)$  不仅是场点之间距离的函数,而且与场点的具体位置有关.因此可以断言,区划结果随机场不具有广义均匀性特征.

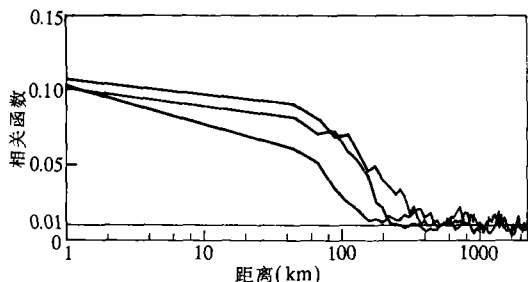


图 1  $n$  个典型场点的相关函数随距离变化曲线

图 2 为几条沿经线和纬线方向相关函数随距离变化的曲线,计算结果表明,当距离很近时,相邻场点发生的事件是相容的,即一个场点的烈度超过了区划图上所给定的值,则相邻的另一个场点很可能会超过区划图上所给定的值.当距离很远时,  $R_x(s_k, s_j)$  则趋于 0.01, 即趋于  $\mu_x^2$ . 相距几百 km 之内的场点是不独立的,但相关程度随距离逐渐减弱.

图 3 是用(16)式计算得到的结果,

纵坐标为

$$F(N) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^N R_x(s_i, s_n) \quad (18)$$

横坐标表示参与计算的场点总数. 该图给出的结果表明, 当  $N$  足够大时,  $F(N)$  将趋于直线  $F(N) = \mu_x^2$ . 图 3a 是用 224 个场点计算的结果, 图 3b 是用 140 个场点计算的结果.

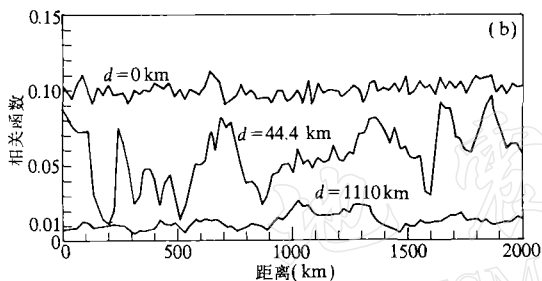
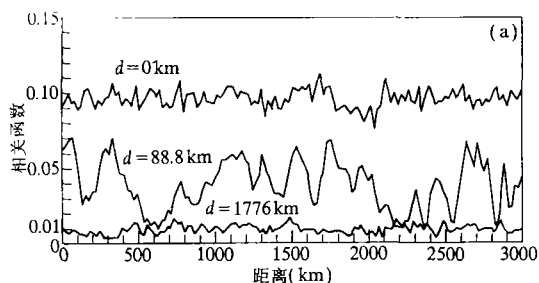


图2 相关函数与场点之间的距离 $d$ 的关系及其空间非均匀性. (a)相关函数沿纬线方向的变化; (b)相关函数沿经线方向的变化

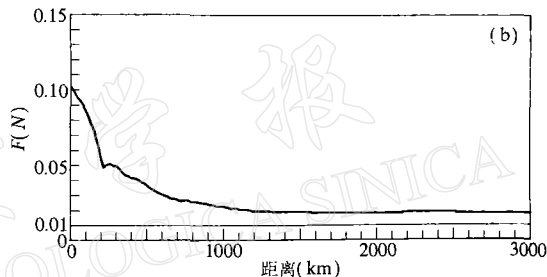
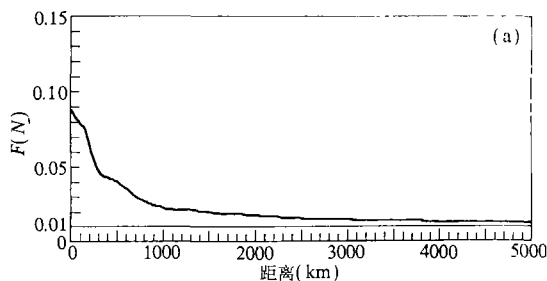


图3  $F_N$ 随空间尺度变化曲线  
(a)沿纬线方向; (b)沿经线方向

场点越多,  $F(N)$  越趋于  $\mu_x^2$ . 该结果表明, 区划结果随机场的均值具有各点历经性, 并据此可以推断, 当  $N$  足够大时, 可以用空间平均值代替集平均值  $\mu_x$ , 而根据(4)式, 集平均值  $\mu_x$  恰好等于给定场点 50 年内烈度超越区划图上所标出值的概率  $P\{X(s) = 1\}$ ; 进一步可以推论, 每一个区划结果随机场的样本的空间平均值应该依概率 1 等于  $P\{X(s) = 1\}$ , 即等于 0.1. 这个结果是用实际地震的烈度分布检验区划图的理论依据. 但是, 必须注意到, 参加空间平均的场点的范围, 至少包括半径为 600–700 km 的空间区域. 这是由相关函数分布的形式所决定的. 在局部区域内, 空间平均值可能与集平均值有较大的区别. 例如, 如果发生了小概率的大震级地震, 则必然使局部范围内的烈度值超过区划图上所标的值, 这是由区划图给出的概率水平所决定的.

## 5. 区划结果的检验

能否用实际地震所产生的地震烈度值的空间分布与区划图上的值做比较, 来检验地震区划结果的合理性, 是近来人们比较关心的问题. 有了上述的研究结果, 我们就可以很容易地回答这个问题. 因为这实质上就是能否用空间平均值代替集平均值的问题. 如果区划结果随机场均值具有各点历经性, 则这种作法是可取的, 否则是不可取的. 上一节证明了区划结果随机场的均值具有各点历经性. 因此, 将 50 年内实际发生的地震所产生的烈

度值与区划图上的值的比较结果(超过或不超过)看成是区划结果随机场的一次样本实现,那么,如果区划结果是合理的,则该样本的空间平均值应当依概率 1 趋于 0.1, 其偏差由下关系表示:

$$P\{|\mu_s-0.1|<\varepsilon\geq 1-(\frac{\sigma_s}{\varepsilon})^2\}$$

(19)

其中, $\varepsilon$ 为任意给定的值, $\sigma_s^2$ 用下式表示:

$$\sigma_s^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^N(X_i(s)-\mu_s)^2$$

(20)

此处, $\mu_s$ 为样本的空间平均值.如果由实际资料得到的  $\mu_s$  不满足(19)式,则可以推论区划结果合理性需要进一步地分析论证.为了使得(19)式对任意小的数  $\varepsilon$  都成立,必须有足够的  $N$  使  $\sigma_s$  趋于零.

区划图中所使用的资料虽然截止到 1986 年底,但自 1976 年以来全国强震的空间分布和时间分布没有重大的变化,因此,为尽可能多用一些样本,我们取 1976-1990 年内发生的地震.表 1 给出 1976 年 8 月份以后全国 4 级以上地震的统计分布表.近 15 年的时间内共发生 6 级以上的地震 83 次,因此,其平均活动水平并不比长期的地震活动水平低.

表 1 唐山地震后全国 4 级以上地震统计表

震 级	频 次	频 度	累 积 频 度	震 级	频 次	频 度	累 积 频 度
4.0	53	5.1	5.1	5.8	23	2.2	91.0
4.1	45	4.3	9.5	5.9	7	0.7	91.7
4.2	37	3.6	13.0	6.0	12	1.2	92.9
4.3	46	4.4	17.5	6.1	7	0.7	93.5
4.4	27	2.6	20.1	6.2	14	1.4	94.9
4.5	50	4.8	24.9	6.3	9	0.9	95.8
4.6	39	3.8	28.7	6.4	10	1.0	96.7
4.7	137	13.2	41.9	6.5	6	0.6	97.3
4.8	97	9.4	51.3	6.6	6	0.6	97.9
4.9	71	6.9	58.1	6.7	4	0.4	98.3
5.0	73	7.0	65.2	6.8	3	0.3	98.6
5.1	49	4.7	69.9	6.9	4	0.4	98.9
5.2	51	4.9	74.8	7.0	3	0.3	99.2
5.3	33	3.2	78.0	7.2	4	0.4	99.6
5.4	36	3.5	81.5	7.3	1	0.1	99.7
5.5	26	2.5	84.0	7.4	2	0.2	99.9
5.6	32	3.1	87.1	7.6	1	0.1	100.0
5.7	18	1.7	88.8	总计	1036	100.0	100.0

为得到 15 年超越概率,采用了如下的换算公式:

$$P_{15}=1-(1-P_{50})^{\frac{15}{50}}$$

(21)

其中, $P_{15}$ 为 15 年超越概率, $P_{50}$ 为 50 年超越概率.将  $P_{50}=0.1$  代入上式得 15 年超越概率  $P_{15}=0.031(\mu_x=0.031)$ .即 15 年内全国应有 3% 左右的场点的区划图上烈度值被超越.区划图的格点数约为 3 万,则被超越的场点应是 900 个场点左右.实际计算得到的  $\mu_s=0.028$ ,  $\sigma_s=0.028$ .该值与理论值是相当接近的.

在进行上面的检查同时,我们也使用了 1940 年以来的 50 年地震资料进行了计算,得到空间平均值  $\mu_s=0.118$ ,  $\sigma_s=0.104$ . 该结果与理论值也是相当接近的. 表 2 给出的统计结果表明,近 50 年所发生的 7 级地震,特别是 7.5 级以上地震的次数是高于平均水平的.

表 2 全国近 50 年 4 级以上地震统计表

震级	频次	频度	累积频度	震级	频次	频度	累积频度
4.0	53	1.8	1.8	6.1	18	0.6	92.1
4.1	45	1.6	3.4	6.2	25	0.9	93.0
4.2	37	1.3	4.7	6.3	39	1.4	94.4
4.3	46	1.6	6.3	6.4	19	0.7	95.0
4.4	27	0.9	7.3	6.5	34	1.2	96.2
4.5	50	1.7	9.0	6.6	11	0.4	96.6
4.6	40	1.4	10.4	6.7	8	0.3	96.9
4.7	317	11.4	21.5	6.8	19	0.7	97.6
4.8	398	13.9	35.3	6.9	5	0.2	97.7
4.9	202	7.0	42.4	7.0	18	0.6	98.4
5.0	362	12.6	55.0	7.1	5	0.2	98.5
5.1	126	4.4	59.0	7.2	10	0.3	98.9
5.2	145	5.1	64.5	7.3	11	0.4	99.3
5.3	172	6.0	70.5	7.4	5	0.2	99.4
5.4	85	3.0	73.4	7.5	4	0.1	99.6
5.5	181	6.3	79.8	7.6	3	0.1	99.7
5.6	60	2.1	81.9	7.7	4	0.1	99.8
5.7	55	1.9	83.8	7.8	2	0.1	99.9
5.8	115	4.0	87.8	8.0	2	0.1	100.0
5.9	23	0.8	88.6	8.6	1	0.0	100.0
6.0	84	2.9	91.5	总计	2866	100.0	100.0

通过以上检验,可以认为全国地震区划图是比较合理的. 因为刚刚过去的 50 年恰好是位于地震活动水平较高的时期,该区划图给出的结果有可能是偏于保守的.

如前所述,在取空间平均值时,必须包括一定的范围. 并不能否认在局部区域,空间平均值超过或远小于 0.1 的情况. 但在全国大的范围内,空间平均值必然依概率趋于 0.1.

6. 结 语

通过以上分析,我们可以得到如下几点结论:

(1)地震区划结果随机场具有均值各点历经性,因此,大范围的空间平均值就是每个场点的集平均值,又因为每个场点的集平均值恰好是场点的超越概率值,所以空间平均值依概率 1 收敛于场点的超越概率.

(2)地震区划结果随机场不满足广义均匀的定义,相关函数与场点所处的空间位置有关.

(3)对任意相邻的场点,事件是相容的,随着场点间距离的增加,事件逐渐趋于独立.

这种事件关系随距离的变化过程因区域而异. 因此, 不能用局部范围的空间平均值代替集平均值.

(4) 能够用空间平均值代替集平均值的空间区域的范围, 可以依(19)式确定. 局部区域空间平均值超过 0.1 是完全可能的. 但不能因此简单推断该区域的场点的超越概率不等于 0.1.

(5) 用近 15 年和 50 年的实际地震资料所作的检验表明, 新区划图给出的结果是合理的.

(6) 大地震对于某一个局部区域来说是小概率的事件, 但对于大的区域(如全国范围)可能是必然事件. 因此局部区域烈度值被突破是自然的. 但是, 对全国而言, 被超过的范围仍是我们所规定的 10% 左右. 因此, 除了利用区划图进行抗震设防外, 还必须加强短、临预报, 以进一步减少大地震所造成的损失.

将随机场的理论用于地震学的研究尚属于初步探索, 本文所提出的一系列新的概念和分析方法, 也可以用于地震学研究的其它领域, 并在应用中得到完善. 作者希望引起对随机场理论的广泛讨论.

### 参 考 文 献

- 帕普力斯, A., 1984. 概率、随机变量与随机过程, 139—386. 高等教育出版社, 北京.
- 时振梁、鄢家全、高孟潭, 1991. 地震区划原则和方法的研究——以华北地区为例. 地震学报, 13, 179—189.
- 浙江大学数学系高等数学教研组编, 1979. 概率论与数理统计, 139—192. 人民教育出版社, 北京.