

文章编号: 0253-3782(2007)03-0240-10

# 旋转椭球面上的应变与转动张量表达<sup>\*</sup>

刘序俨<sup>1),\*</sup> 黄声明<sup>1)</sup> 梁全强<sup>2)</sup>

1) 中国福州 350003 福建省地震局

2) 中国厦门 361021 厦门地震勘测研究中心

**摘要** 以旋转椭球体面上某点为原点建立一个大地坐标单位活动坐标架。通过平移, 使活动坐标架的原点与以椭球中心为原点的笛卡尔单位标架的原点相重合。然后再通过两次标架旋转, 使活动坐标架与笛卡尔单位标架完全重合。本文给出了使两个单位标架相重合的转换关系式, 以及该点位移在两个单位标架中的坐标转换式; 在此基础上, 考虑该点的位移及活动坐标架皆为该点大地坐标的函数, 经复杂推导, 分别给出了该点位移向量的微分在大地坐标系中的分量以及该点分别沿坐标曲线的弧微分表达式, 继而导出了该点的位移梯度矩阵; 最后推导出了椭球坐标系的应变张量与转动张量表达式, 并对转动张量的几何含义进行了较详细的解释, 且采用曲面理论对球面与椭球面的应变张量间的内在关系进行了讨论。

**关键词** 活动坐标架 椭球大地坐标系 应变张量 转动张量

**中图分类号:** P315.01      **文献标识码:** A

## 引言

地壳形变是地壳运动的一种表现形式, 地壳运动最显著的特点是地壳质点随时间发生位移。地壳位移可分解为刚体平动、刚体转动和变形 3 个部分(钱伟长, 叶开沅, 1980; Means, 1976; 王敏中等, 2002)。导致地壳变形的要素是长度和角度的改变, 它们都是应变张量的分量。这个张量在三维均匀介质空间中有 6 个分量, 在某个自由表面(如地平面)张量分量就减少到 3 个分量。因此, 在 3 个不同方向进行线应变观测, 即可确定这个平面应变张量(Means, 1976; Lay, Wallace, 1995; 刘序俨, 1994)。

不言而喻, 应变张量的表达式是由所选择的坐标系所决定的, 不同的坐标系有不同的应变张量表达式。在目前进行地壳形变分析中, 一般采用直角坐标和球面坐标系的应变张量公式, 如在应变固体潮分析中采用的是球面坐标系的应变张量表达式(Melchier, 1978; 方俊, 1984; 吴庆鹏, 1997; 王敏中等, 2002)。其中方俊(1984)给出了对该表达式的推导。

对 GPS 观测而言, 有两种坐标系可供使用: 一种是 ITRF(国际地球参考框架); 另一种是 WGS84(全球大地测量系统 84)。采用前一种空间直角坐标系, 通过 GPS 复测, 可取得测站在  $x, y, z$  坐标系的位移, 由位移可采用 Lay 和 Wallace(1995)、方俊(1984)、王敏中等(2002)所提供的直角坐标系的应变张量公式进行应变分析; 采用后一种坐标系, 通过 GPS 复测可获得测站在大地坐标系( $L, B, h$ )中所发生的位移。其中,  $L$  和  $B$  分别为测站

\* 2006-11-08 收到初稿, 2007-02-26 决定采用修改稿。

† 通讯作者. e-mail: xuyanliu@126.com

的大地经、纬度,  $h$  为测站至 WGS84 椭球面的垂直距离。大地坐标系又称为椭球坐标系。但在目前有关文献中, 笔者还未找到有关在椭球坐标系中的应变张量表达式。不管采用哪种坐标系, 测站邻域地壳介质发生的位移、长度和角度改变量, 以及体应变与面应变都是不变的, 是该测站地壳介质所固有的一些几何性质。虽然在不同的坐标系中应变与转动张量的表达式各不相同, 但其数值结果却是相同的, 绝不会因采用的坐标系不同而导致不同的结果。应变与转动张量所反映的几何事实与坐标选择无关, 从而消除了由于偶然选择坐标系所带来的影响(李开泰, 黄艾香, 2004)。因此, 在进行地形变分析中, 无论对实用或理论研究, 推导并给出椭球坐标系的应变与转动张量表达式都是很有意义的。

## 1 旋转椭球面及其活动标架

图 1 所示的是一个以  $b$  为短半轴, 以  $a$  为长半轴, 且以短半轴为旋转轴的旋转椭球体。设该椭球体嵌入在欧几里德三维空间, 笛卡尔直角坐标系的原点位于椭球体中心  $O$ ,  $x_3$  轴与自转轴重合,  $x_1$  轴位于起始子午面内。

设  $e_1, e_2, e_3$  分别为  $x_1, x_2, x_3$  轴的单位向量, 它们在笛卡尔坐标系的原点也建立了一个单位正交坐标架( $o: e_1, e_2, e_3$ ) (Heitz, 1985), 该坐标架是固定不变的。可以证明任何一个旋转曲面上的任意一点处的法线总是与该曲面的旋转轴相交的(黄宣国, 2003)。设椭球面上  $M$  点处的曲面法线与  $x_3$  轴相交于  $N$  点, 曲面法线  $MN$  与旋转轴  $x_3$  轴的夹角为  $\theta$ , 则  $\theta =$

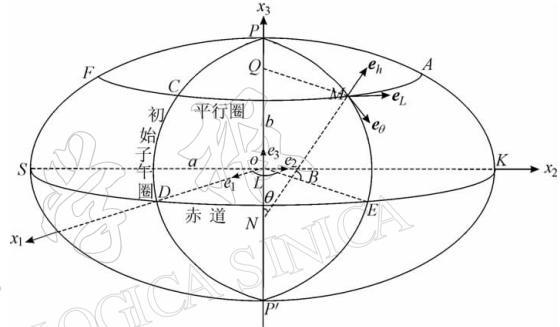


图 1 旋转椭球面与活动标架

$\frac{\pi}{2} - B$ ,  $\theta$  称为大地余纬。图 1 中  $PCDP'$  为初始子午面;  $PMEP'$  为  $M$  点所在的子午面;  $SDEK$  为赤道面;  $FCMA$  为  $M$  点所在的平行圈;  $B$  为该点处的椭球面法线  $MN$  与赤道面交角, 即大地纬度。图中,  $e_\theta$  与  $e_L$  分别为椭球面上的  $\theta$  曲线与  $L$  曲线在  $M$  点处切平面上的切线的单位向量,  $e_h$  为该点处的椭球面的法线的单位向量, 且  $e_h = e_\theta \times e_L$ 。 $MN$  为  $M$  点处的卯酉圈的曲率半径  $R_1$  可表示为

$$R_1 = MN = c/v \quad (1)$$

$$c = a^2/b$$

$$v = \sqrt{1 + e''^2 \cos^2 B} = \sqrt{1 + e''^2 \sin^2 \theta} \quad (2)$$

$$e'' = \sqrt{(a^2 - b^2)/b^2}$$

式中,  $e''$  称为椭球的第二偏心率。

平行圈的半径  $R$  为

$$R = MQ = R_1 \sin \theta \quad (3)$$

子午圈的曲率半径  $R_2$  (Heitz, 1985) 为

$$R_2 = c/v^3 \quad (4)$$

子午圈的曲率向量与卯酉圈的曲率向量是共线的, 除了  $B = \pm 90^\circ$  外,  $v$  总是大于 1。因此,  $R_1 \geq R_2$ 。椭球面上的  $\theta$  曲线(子午圈)和  $L$  曲线(平行圈)以及  $h$  曲线(法线)分别构成

了椭球面上正交曲线坐标系。在图 1 中, 设  $A$  为椭球面上  $M$  点法线上的一点, 设  $AM=h$ , 则  $(L, \theta, h)$  为  $A$  点的大地坐标值。如果该椭球体为 WGS84 椭球体, 它可由 GPS 观测确定。

我们以椭球面上的  $M$  点为原点建立一个活动标架  $(M: e_\theta, e_L, e_h)$ , 如图 1 所示。其中

$$\begin{cases} \mathbf{e}_\theta = (\cos\theta\cos L, \cos\theta\sin L, -\sin\theta) \\ \mathbf{e}_L = (-\sin L, \cos L, 0) \\ \mathbf{e}_h = (\sin\theta\cos L, \sin\theta\sin L, \cos\theta) \end{cases} \quad (5)$$

式中,  $\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_L, \mathbf{e}_h$  分别为椭球面上  $M$  点处沿子午圈和平行圈方向以及法线方向的单位切线向量, 它们组成了相互正交的曲线坐标系的单位坐标标架。该坐标标架是随点位而变化的。

## 2 标架及其位移的转换

虽然在椭球面上  $M$  点处建立了相互正交的椭球坐标系的活动标架  $(M: e_\theta, e_L, e_h)$ , 但由于该坐标标架及该点位移皆为该点大地坐标的函数, 如果不作标架与位移转换仅仅在这个坐标标架中是无法进行应变分析的。因此, 还须建立该活动标架  $(M: e_\theta, e_L, e_h)$  与设在椭球体中心的笛卡尔单位固定标架  $(o: e_1, e_2, e_3)$  之间的转换公式。在此基础上, 才能推导出该点位移在这两种标架中的位移转换式, 据此才能推导出大地坐标系中椭球面上  $M$  点处扩展的位移梯度矩阵, 然后根据位移梯度矩阵及其转置矩阵的线性组合才能分别推导出椭球面上  $M$  点处的应变与转动张量表达式。

要进行坐标标架转换, 根据向量平移的不变性(马文蔚, 1993), 我们可以把图 1 中的活动标架  $(M: e_\theta, e_L, e_h)$ , 从原点  $M$  平移到笛卡尔坐标系的原点  $o$ , 然后以  $x_3$  轴为旋转轴, 把  $(M: e_\theta, e_L, e_h)$  标架沿顺时针旋转一个  $L$  角, 然后再以  $x_2$  轴为旋转轴, 把已旋转后的坐标标架沿顺时针方向再旋转一个  $\theta$  角。通过这两种旋转操作后, 使  $(M: e_\theta, e_L, e_h)$  和  $(o: e_1, e_2, e_3)$  两种坐标标架完全重合。这两种旋转操作的结果可用下式表示(Vanicek, Krakiwsky, 1986; 边少锋等, 2005):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_L \\ \mathbf{e}_h \end{pmatrix} = s_2(\theta)s_3(L) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \quad (6)$$

式中

$$s_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$s_3(L) = \begin{pmatrix} \cos L & \sin L & 0 \\ -\sin L & \cos L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

因  $s_2^{-1}(\theta) = s_2(-\theta)$ ,  $s_3^{-1}(L) = s_3(-L)$ , 则由式(6)可得

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = s_3(-L)s_2(-\theta) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_L \\ \mathbf{e}_h \end{pmatrix} \quad (9)$$

设在  $M$  点邻域内发生的位移向量为  $\mathbf{u}$ , 它在  $(M: \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_L, \mathbf{e}_h)$  坐标架中的位移分量为  $(u_\theta, u_L, u_h)$ , 则  $\mathbf{u}$  可表示为

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_\theta \\ u_L \\ u_h \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_L \\ \mathbf{e}_h \end{pmatrix} \quad (10)$$

同样可设  $(u_1, u_2, u_3)$  为  $\mathbf{u}$  在  $(o: \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  标架内位移分量, 则  $\mathbf{u}$  可表示为

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \quad (11)$$

式(10)与(11)分别表示位移向量在不同坐标系下的不变性, 考虑到式(6), 式(10)又可表示为

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_\theta \\ u_L \\ u_h \end{pmatrix}^T s_2(\theta) s_3(L) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \quad (12)$$

由式(11)与(12)又可得

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} u_\theta \\ u_L \\ u_h \end{pmatrix}^T s_2(\theta) s_3(L) \quad (13)$$

由式(7)与(8)又可得

$$s_2(\theta) s_3(L) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos L & \cos\theta\sin L & -\sin\theta \\ -\sin L & \cos L & 0 \\ \sin\theta\cos L & \sin\theta\sin L & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (14)$$

将式(14)代入式(13), 则

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} u_\theta\cos\theta\cos L - u_L\sin L + u_h\sin\theta\cos L \\ u_\theta\cos\theta\sin L + u_L\cos L + u_h\sin\theta\sin L \\ -u_\theta\sin\theta + u_h\cos\theta \end{pmatrix}^T \quad (15)$$

在式(13)等号两边同乘  $s_3(-L)s_2(-\theta)$ , 且考虑到

$$s_3(-L)s_2(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos L & -\sin L & \sin\theta\cos L \\ \cos\theta\sin L & \cos L & \sin\theta\sin L \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (16)$$

则

$$\begin{pmatrix} u_\theta \\ u_L \\ u_h \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} u_1\cos\theta\cos L + u_2\cos\theta\sin L - u_3\sin\theta \\ -u_1\sin L + u_2\cos L \\ u_1\sin\theta\cos L + u_2\sin\theta\sin L + u_3\cos\theta \end{pmatrix}^T \quad (17)$$

### 3 椭球面上的应变张量与转动张量表达式

本文沿袭 Lay 和 Wallace(1995)的表达方式, 不过不是在笛卡尔三维直角坐标系中, 而是在椭球坐标系中把椭球面上  $M$  点处扩展的位移梯度矩阵  $\mathbf{E}$  表示为

$$\mathbf{E} = \lim_{\Delta S_j \rightarrow 0} \frac{\Delta U_i}{\Delta S_j} (i, j = \theta, L, h) = \lim_{\substack{\Delta \theta \rightarrow 0 \\ \Delta L \rightarrow 0 \\ \Delta h \rightarrow 0}} \begin{pmatrix} \frac{\Delta U_\theta}{H_\theta \Delta \theta} & \frac{\Delta U_\theta}{H_L \Delta L} & \frac{\Delta U_\theta}{H_h \Delta h} \\ \frac{\Delta U_L}{H_\theta \Delta \theta} & \frac{\Delta U_L}{H_L \Delta L} & \frac{\Delta U_L}{H_h \Delta h} \\ \frac{\Delta U_h}{H_\theta \Delta \theta} & \frac{\Delta U_h}{H_L \Delta L} & \frac{\Delta U_h}{H_h \Delta h} \end{pmatrix} \quad (18)$$

然后根据  $M$  点处的位移梯度矩阵  $\mathbf{E}$  及其转置矩阵  $\mathbf{E}^T$ , 由下式分别推导出椭球面上  $M$  点处的应变张量矩阵  $\boldsymbol{\varepsilon}$  与转动张量矩阵  $\boldsymbol{\omega}$  的表达式

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^T) \quad (19)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (\mathbf{E} - \mathbf{E}^T) \quad (20)$$

式(18)中,  $\Delta U_\theta$ ,  $\Delta U_L$ ,  $\Delta U_h$  分别为椭球面上  $M$  点的位移向量微分  $\Delta \mathbf{u}$  在单位活动坐标架 ( $M$ :  $\mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{e}_L$ ,  $\mathbf{e}_h$ ) 相应坐标轴上的分量;  $\Delta S_\theta$ ,  $\Delta S_L$ ,  $\Delta S_h$  分别为  $M$  点沿椭球面上的  $\theta$  曲线(子午圈)和  $L$  曲线(平行圈)以及  $h$  曲线(法线)方向的弧微分, 且  $\Delta S_\theta = H_\theta \Delta \theta$ ,  $\Delta S_L = H_L \Delta L$ ,  $\Delta S_h = H_h \Delta h$ . 其中,  $H_\theta$ ,  $H_L$ ,  $H_h$  分别称拉梅系数(杨永发, 徐勇, 2006; 沈永欢等, 2001). 根据定义, 拉梅系数实际上就是椭球面度量空间的度量张量诸分量的平方根. 如果测点  $M$  不是位于椭球面上, 而是位于地球的自然表面上, 那末就要考虑该点到椭球面的垂直距离  $h$ . 此时自然表面的度量张量诸分量的平方根(拉梅系数)(Altiner, 1999)分别为

$$H_\theta = R_2 + h \quad H_L = (R_1 + h) \sin \theta \quad H_h = 1 \quad (21)$$

考虑到  $h$  相对于  $R_1$  与  $R_2$  是一个微不足道的微小量, 在本文可忽略不计.

这里顺便要指出的是, 如果在欧几里德空间, 直角坐标系用  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  来表示的话, 则式(18)中的  $\Delta U_i$  就变为  $\Delta u_1$ ,  $\Delta u_2$ ,  $\Delta u_3$ ;  $\Delta S_j$  就变为  $\Delta x_1$ ,  $\Delta x_2$ ,  $\Delta x_3$ . 因此式(18)是一个适合于任何相互正交的曲线坐标系的普适公式. 这里要着重指出的是, 给出  $M$  点位移向量的微分  $\Delta \mathbf{u}$  在活动坐标架 ( $M$ :  $\mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{e}_L$ ,  $\mathbf{e}_h$ ) 的相应坐标轴上的分量  $\Delta U_\theta$ ,  $\Delta U_L$ ,  $\Delta U_h$  的大地坐标的函数关系式, 对推导椭球面上  $M$  点处的应变与转动张量表达式是关键的一步.

由式(10)并考虑到该式中的各项皆为大地坐标的函数, 则可得位移向量的  $\Delta$  微分为

$$\Delta \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \Delta U_\theta \\ \Delta U_L \\ \Delta U_h \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_L \\ \mathbf{e}_h \end{pmatrix} = \Delta \left[ \begin{pmatrix} u_\theta \\ u_L \\ u_h \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_L \\ \mathbf{e}_h \end{pmatrix} \right] = \Delta \begin{pmatrix} u_\theta \\ u_L \\ u_h \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_L \\ \mathbf{e}_h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_\theta \\ u_L \\ u_h \end{pmatrix}^\top \Delta \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_L \\ \mathbf{e}_h \end{pmatrix} \quad (22)$$

由式(6)并考虑到  $s_2(\theta)s_3(L)$  仅为  $\theta$  与  $L$  的函数, 与  $h$  无关, 则

$$\Delta \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_L \\ \mathbf{e}_h \end{pmatrix} = \Delta [s_2(\theta)s_3(L)] \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \left[ \frac{\partial(s_2(\theta)s_3(L))}{\partial \theta} \Delta \theta + \frac{\partial(s_2(\theta)s_3(L))}{\partial L} \Delta L \right] \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \quad (23)$$

再以式(9)代入(23), 则

$$\Delta \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_L \\ \mathbf{e}_h \end{pmatrix} = \left[ \frac{\partial(s_2(\theta)s_3(L))}{\partial \theta} \Delta \theta + \frac{\partial(s_2(\theta)s_3(L))}{\partial L} \Delta L \right] s_3(-L) s_2(-\theta) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_L \\ \mathbf{e}_h \end{pmatrix} \quad (24)$$

考虑式(14)与(16), 则式(24)可变为

$$\Delta \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_L \\ \mathbf{e}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cos\theta\Delta L & -\Delta\theta \\ -\cos\theta\Delta L & 0 & -\sin\theta\Delta L \\ \Delta\theta & \sin\theta\Delta L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_L \\ \mathbf{e}_h \end{pmatrix} \quad (25)$$

将式(25)代入式(22), 则

$$\Delta \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \Delta U_\theta \\ \Delta U_L \\ \Delta U_h \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_L \\ \mathbf{e}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta u_\theta - u_L \cos\theta\Delta L + u_h \Delta\theta \\ \Delta u_L + u_\theta \cos\theta\Delta L + u_h \sin\theta\Delta L \\ \Delta u_h - u_\theta \Delta\theta - u_L \sin\theta\Delta L \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_L \\ \mathbf{e}_h \end{pmatrix} \quad (26)$$

由式(26), 可得在大地坐标体系中椭球面上  $M$  点处的位移向量的微分  $\Delta \mathbf{u}$  在相应活动坐标轴上的分量表达式为

$$\begin{pmatrix} \Delta U_\theta \\ \Delta U_L \\ \Delta U_h \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \Delta u_\theta - u_L \cos\theta\Delta L + u_h \Delta\theta \\ \Delta u_L + u_\theta \cos\theta\Delta L + u_h \sin\theta\Delta L \\ \Delta u_h - u_\theta \Delta\theta - u_L \sin\theta\Delta L \end{pmatrix}^T \quad (27)$$

将式(21)与(27)代入式(18)后, 根据多元函数的偏导数的定义, 把该式右边矩阵中以定义方式给出的诸偏导数改写成以习惯的特定符号表示的形式(沈永欢等, 2001), 并注意到大地坐标  $L, \theta, h$  皆为独立自变量, 则可得椭球面上  $M$  点处的位移梯度矩阵  $\mathbf{E}$  的表达式为

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_h}{R_2} & \frac{1}{R_1 \sin\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial L} - \frac{\cot\theta}{R_1} u_L & \frac{\partial u_\theta}{\partial h} \\ \frac{1}{R_2} \frac{\partial u_L}{\partial \theta} & \frac{1}{R_1 \sin\theta} \frac{\partial u_L}{\partial L} + \frac{\cot\theta}{R_1} u_\theta + \frac{u_h}{R_1} & \frac{\partial u_L}{\partial h} \\ \frac{1}{R_2} \frac{\partial u_h}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{R_2} & \frac{1}{R_1 \sin\theta} \frac{\partial u_h}{\partial L} - \frac{u_L}{R_1} & \frac{\partial u_h}{\partial h} \end{pmatrix} \quad (28)$$

将式(28)代入式(19), 则可得椭球面上  $M$  点处的应变张量表达式为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^T) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\theta\theta} & \gamma_{\theta L} & \gamma_{\theta h} \\ \gamma_{L\theta} & \varepsilon_{LL} & \gamma_{Lh} \\ \gamma_{h\theta} & \gamma_{hL} & \varepsilon_{hh} \end{pmatrix} \quad (29)$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{R_2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_h}{R_2} \quad \varepsilon_{LL} = \frac{1}{R_1 \sin\theta} \frac{\partial u_L}{\partial L} + \frac{\cot\theta}{R_1} u_\theta + \frac{u_h}{R_1} \\ \varepsilon_{hh} = \frac{\partial u_h}{\partial h} \quad \gamma_{\theta L} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1 \sin\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial L} - \frac{\cot\theta}{R_1} u_L + \frac{1}{R_2} \frac{\partial u_L}{\partial \theta} \right) \\ \gamma_{\theta h} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial h} - \frac{u_\theta}{R_2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial u_h}{\partial \theta} \right) \\ \gamma_{Lh} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_L}{\partial h} - \frac{u_L}{R_1} + \frac{1}{R_1 \sin\theta} \frac{\partial u_h}{\partial L} \right) \\ \gamma_{L\theta} = \gamma_{\theta L} \quad \gamma_{h\theta} = \gamma_{\theta h} \quad \gamma_{hL} = \gamma_{Lh} \end{array} \right. \quad (30)$$

根据某一点的应变张量, 我们就可知该点在 3 个相互正交平面的应变状态。通过坐标变换, 就足以知道在该点的任何平面的应变状态, 当然亦可知任何方向上的应变情况(Young, Budynas, 2002)。

将式(28)代入式(20), 则可得椭球面上  $M$  点处的转动张量表达式为

$$\boldsymbol{\omega} \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{E} - \mathbf{E}^T) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{L\theta} & \omega_{h\theta} \\ \omega_{\theta L} & 0 & \omega_{hL} \\ \omega_{\theta h} & \omega_{Lh} & 0 \end{pmatrix} \quad (31)$$

式中

$$\begin{cases} \omega_{L\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1 \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial L} - \frac{1}{R_2} \frac{\partial u_L}{\partial \theta} - \frac{\cot \theta}{R_1} u_L \right) \\ \omega_{\theta h} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial h} + \frac{u_\theta}{R_2} - \frac{1}{R_2} \frac{\partial u_h}{\partial \theta} \right) \\ \omega_{hL} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_L}{\partial h} + \frac{u_L}{R_1} - \frac{1}{R_1 \sin \theta} \frac{\partial u_h}{\partial L} \right) \\ \omega_{\theta L} = -\omega_{L\theta} \quad \omega_{h\theta} = -\omega_{\theta h} \quad \omega_{Lh} = -\omega_{hL} \end{cases} \quad (32)$$

从式(30)与(32)可以看出, 旋转椭球面上的应变与转动张量有一个共同特点, 就是张量的各分量的表达式中皆没有大地经度  $L$  的三角函数, 这是因为相对于自转轴旋转椭球为轴对称的缘故。由式(30)和(32)又可知, 应变张量为对称张量, 转动张量为反对称张量, 且式(32)对角线分量皆为零, 转动张量已退化为一个转动向量。式(32)中各分量  $\omega_{ij}$  为位移所引起的转动向量的模在  $ij$  平面上的分量, 具有明确的几何意义。例如,  $\omega_{h\theta}$  表示在由  $e_\theta$  与  $e_h$  轴构成的平面上(以下简称  $\theta h$  平面)所发生的角度转动量, 在单位时间的转动量称为角速度。 $\omega_{h\theta}$  值的正负由下述约定给出: 如果  $\omega_{h\theta}$  为正值, 那么根据右手法则, 四指按反时针由  $e_h$  转向  $e_\theta$ , 大姆指所指的方向  $e_L$  就代表在  $\theta h$  平面上所发生的转动向量的方向(Greenberg, 2004), 该转动的大小与方向可表示为  $\omega_{h\theta} e_L$ ; 反之,  $\omega_{h\theta}$  代表在  $\theta h$  平面上按顺时针方向转动, 转动向量的方向指向  $-e_L$ , 该转动的大小与方向可表示成  $-\omega_{h\theta} e_L$ 。因  $\omega_{h\theta} = -\omega_{\theta h}$ , 则  $\omega_{h\theta} e_L = -\omega_{\theta h} e_L$ , 说明  $\theta h$  平面上的转动向量与约定的时针方向无关。其它两个平面上的转动向量亦可照此类推。最后就可给出在大地坐标系中转动向量表达式为

$$\mathbf{v} = \omega_{Lh} \mathbf{e}_\theta + \omega_{h\theta} \mathbf{e}_L + \omega_{\theta L} \mathbf{e}_h \quad (33)$$

或

$$\mathbf{v} = -\omega_{hL} \mathbf{e}_\theta - \omega_{\theta L} \mathbf{e}_L - \omega_{Lh} \mathbf{e}_h \quad (34)$$

设  $\cos\alpha$ ,  $\cos\beta$  与  $\cos\gamma$  分别为向量  $\mathbf{v}$  的方向余弦。则  $\mathbf{v}$  单位向量为

$$\mathbf{v}_0 = \cos\alpha \mathbf{e}_\theta + \cos\beta \mathbf{e}_L + \cos\gamma \mathbf{e}_h \quad (35)$$

$$\text{式中 } \cos\alpha = \frac{\omega_{Lh}}{\omega} \quad \cos\beta = \frac{\omega_{h\theta}}{\omega} \quad \cos\gamma = \frac{\omega_{\theta L}}{\omega} \quad \omega = \sqrt{\omega_{Lh}^2 + \omega_{h\theta}^2 + \omega_{\theta L}^2} \quad (36)$$

则转动向量  $\mathbf{v}$  又可表示为

$$\mathbf{v} = \omega \mathbf{v}_0 \quad (37)$$

式中,  $\mathbf{v}_0$  表示由位移所引起的单位转动向量;  $\omega$  表示由位移所引起的在与  $\mathbf{v}_0$  相正交平面上的转动量, 其正负根据右手法则给出;  $\omega_{Lh}$ ,  $\omega_{h\theta}$ ,  $\omega_{\theta L}$  分别为  $\omega$  在  $Lh$ ,  $h\theta$ ,  $\theta L$  平面上的分量, 而  $\omega$  本身也就是转动向量的模。当然, 根据该点的转动分量, 通过坐标转换, 我们亦可知道在该点任何平面上的转动分量。

根据向量场理论, 转动向量为位移向量  $\mathbf{u}$  的旋度的  $1/2$ (Greenberg, 2004)

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2} \operatorname{curl} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} \quad (38)$$

式中,  $\nabla$  为哈密尔顿算子。在椭球坐标系中, 其表达式为

$$\nabla = e_\theta \frac{\partial}{R_2 \partial \theta} + e_L \frac{\partial}{R_1 \sin \theta \partial L} + e_h \frac{\partial}{\partial h} \quad (39)$$

则  $\operatorname{curl} \mathbf{u} = \left( \frac{\partial U_h}{R_1 \sin \theta \partial L} - \frac{\partial U_L}{\partial h} \right) \mathbf{e}_\theta + \left( \frac{\partial U_\theta}{\partial h} - \frac{\partial U_h}{R_2 \partial \theta} \right) \mathbf{e}_L + \left( \frac{\partial U_L}{\partial \theta} - \frac{\partial U_\theta}{R_1 \sin \theta \partial L} \right) \mathbf{e}_h \quad (40)$

考虑到式(27)以及关于转动分量  $\omega_{ij}$  的约定, 则

$$\operatorname{curl} \mathbf{u} = 2(\omega_{Lh} \mathbf{e}_\theta + \omega_{h\theta} \mathbf{e}_L + \omega_{\theta L} \mathbf{e}_h) \quad (41)$$

考虑到式(33), 则

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2} \operatorname{curl} \mathbf{u} \quad (42)$$

同样, 根据场论, 位移所引起的体应变  $\Delta V$  可表示为位移向量  $\mathbf{u}$  的散度

$$\Delta V = \operatorname{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (43)$$

考虑到式(39)与(27), 并采用爱因斯坦求和约定符号, 则

$$\Delta V = \epsilon_{ii} \quad (i = \theta, L, h) \quad (44)$$

当  $R_1 = R_2 = r$  时, 椭球体变为一个球体, 球面上的法线就与球半径  $r$  相重合. 此时,  $\partial h = \partial r$ ,  $u_h = u_r$ . 将其代入式(30)与(32), 即分别为方俊(1984)、Melchier(1978)、吴庆鹏(1997)给出的球面上的应变张量与方俊(1984)给出的转动张量表达式. 说明球面上的应变与转动张量实际上就是椭球面的一种特例.

地面可看作一个自由表面. 此时,  $\epsilon_{hh} = \gamma_{\theta\theta} = \gamma_{LL} = 0$ , 则地表面的应变张量为

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{\theta\theta} & \gamma_{\theta L} \\ \gamma_{\theta L} & \epsilon_{LL} \end{bmatrix} \quad (45)$$

对于任一方位角为  $\alpha$  方向上的应变分量为

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \epsilon_{\theta\theta} \cos^2 \alpha + \epsilon_{LL} \sin^2 \alpha - 2\gamma_{\theta L} \sin \alpha \cos \alpha \\ \epsilon_{yy} = \epsilon_{\theta\theta} \sin^2 \alpha + \epsilon_{LL} \cos^2 \alpha + 2\gamma_{\theta L} \sin \alpha \cos \alpha \\ \gamma_{xy} = (\epsilon_{LL} - \epsilon_{\theta\theta}) \sin 2\alpha - 2\gamma_{\theta L} \cos 2\alpha \end{cases} \quad (46)$$

其中,  $xoy$  坐标与  $\theta o L$  坐标的含义见图 2.

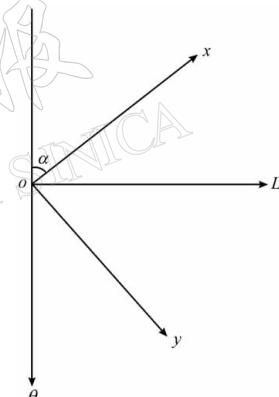


图 2  $xoy$  坐标与  $\theta o L$  坐标的示意图

## 4 结语

本文证明了球面的应变张量为椭球面的一种特例. 这并非偶然, 从深层次上可追溯到圆与椭圆的几何性质的渊源上, 因为球和旋转椭球都是圆和椭圆经旋转而成. 在直角坐标系和极坐标系, 圆和椭圆的数学表达式可以说是“同形”的, 因为它们不但项数相同, 而且表现形式也类似, 且前者为后者的一种特例. 同样, 在直角坐标系, 球和旋转椭球的数学表达式也是“同形”的. 根据曲面理论, 不管是平面、球面还是椭球面, 其上的弧长、角度、面积, 以及曲面上的曲线的测地曲率, 皆为它们所属度量空间的度量张量的函数. 因此这些几何量被称之为曲面的内蕴几何量, 而曲面的曲率(高斯与平均曲率)被称为外蕴几何量(Heitz, 1985). 既然曲面上的弧长、角度、面积等皆为该曲面的内蕴几何量, 那么就有理由认为, 该曲面上的线应变、剪应变、面应变、体应变以及曲面曲率的变化, 当然也可表示为该曲面变形前后的第一类及第二类基本量的函数(Altiner, 1999). 球和旋转椭球的第一

类基本量(度量张量)和第二类基本量的表达式也是“同形”的，并且前者为后者的一种特例。因此，可以认为两者的应变与转动张量的表达式也应该是“同形”的，且前者为后者的另一种特例。Altiner(1999)在 Heitz(1985)理论的基础上，率先提出了地表内蕴与外蕴形变概念，给出了一些根据地表第一类与第二类基本量计算地形变的公式(刘序俨等，2006)，采用这些公式同样可收到异曲同工之妙。

### 参 考 文 献

- 边少锋, 柴洪州, 金际航. 2005. 大地坐标系与大地基准[M]. 北京: 国防工业出版社: 14-17, 29-31.
- 方俊. 1984. 固体潮[M]. 北京: 科学出版社: 219-222, 196-199.
- 黄宣国. 2003. 空间解析几何与微分几何[M]. 上海: 复旦大学出版社: 269-271.
- 李开泰, 黄艾香. 2004. 张量分析及其应用[M]. 北京: 地震出版社: 7.
- 刘序俨. 1994. 应变固体潮主应变及剪应变计算: 四川姑咱台应变固体潮分析[J]. 地球物理学报, 37(增刊 I): 213-221.
- 刘序俨, 梁全强, 黄声明. 2006. 采用 GPS 观测值进行三维形变分析的构想[J]. 大地测量与地球动力学, 26(1): 92-96.
- 马文蔚. 1993. 物理学(上册)[M]. 北京: 高等教育出版社: 356-357.
- 钱伟长, 叶开沅. 1980. 弹性力学[M]. 北京: 科学出版社: 17-21.
- 沈永欢, 梁在中, 许履瑚, 等. 2001. 实用数学手册[M]. 北京: 科学出版社: 154, 578-579.
- 王敏中, 王炜, 武际可. 2002. 弹性力学教程[M]. 北京: 北京大学出版社: 24-26, 395-396, 399-401.
- 吴庆鹏. 1997. 重力学与固体潮[M]. 北京: 地震出版社: 206-209.
- 杨永发, 徐勇. 2006. 向量分析与场论[M]. 天津: 南开大学出版社: 119-120.
- Altiner Y. 1999. *Analytical Surface Deformation: Theory for Detection of the Earth's Crust Movement*[M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1-70.
- Greenberg M D. 2004. *Advanced Engineering Mathematics*[M]. The 2nd edition. Beijing: Publishing House of Electronics Industry: 774-776.
- Heitz S. 1985. *Coordinates in Geodesy*[M]. Berlin, Heidelberg, New York, etc: Springer-Verlag: 6-105.
- Lay T, Wallace T C. 1995. *Modern Global Seismology*[M]. San Diego, New York, Boston, etc: Academic Press: 34-42.
- Means W D. 1976. *Stress and Strain*[M]. New York: Springer-Verlag: 1-60.
- Melchier P. 1978. *The Tides of the Planet Earth*[M]. New York, Oxford, Paris: Pergamon Press: 83.
- Vanicek P, Krakiwsky E. 1986. *Geodesy: The Concepts*[M]. Amsterdam, New York, Oxford, etc: North-Holland Elevier Science Publishing Company, Inc: 37-41, 323-334, 592-600.
- Young W C, Budynas R G. 2002. *Roark's Formulas for Stress and Strain*[M]. The 7th edition. New York: McGraw-Hill Companies Inc: 1-50.

## EXPRESSION OF STRAIN AND ROTATION TENSOR IN GEODETIC COORDINATES

Liu Xuyan<sup>1)</sup> Huang Shengming<sup>1)</sup> Liang Quanqiang<sup>2)</sup>

1) Earthquake Administration of Fujian Province, Fuzhou 350003, China

2) Xiamen Research Center of Earthquake Surveying, Xiamen 361021, China

**Abstract:** In this paper, unit moving trihedron is first constructed for a point on the surface of a revolution ellipsoid. Via translation, the origin of the trihedron coincides with that of Cartesian coordinates established at the center of the ellipsoid, and then through two coordinate rotations, the trihedron completely coincides with the Cartesian coordinates. Transformation formulae between the moving trihedron and unit Cartesian coordinate frameworks as well as transformation of point displacement between two unit coordinate frameworks are presented. Based on the above transformation formulae between two different coordinate frameworks, due to the fact that the displacement and moving trihedron of the point are both functions of the geodetic coordinates, components in the corresponding axis for differential of displacement vector and geodetic curves are differential at the point in geodetic system can be obtained through complicated derivation. Displacement gradient matrix at the point in geodetic system is also given. Finally, expressions of strain and rotation tensor in geodetic coordinates are presented. Geometric meanings of the rotation tensor are explained in detail. The intrinsic relationship between strain tensors of sphere and ellipsoid are also discussed.

**Key words:** moving trihedron; geodetic coordinates; strain tensor; rotation tensor