

# 弹性波在横向各向同性弹性土和饱和土 界面上的反射与透射<sup>\*</sup>

胡亚元 王立忠 陈云敏 张忠苗 吴世明

(中国杭州 310027 浙江大学土木工程系)

**摘要** 根据横向各向同性饱和土体的 Biot 波动方程, 推导出  $qP_1$  波从饱和土入射到弹性介质的反射系数和透射系数的一般算式, 数值分析了各向异性, 边界透水条件对反射系数和透射系数的影响. 本文的推导思路, 适用于  $qSV$  波、 $qP_2$  波从饱和土体入射到弹性土体的情形.

**关键词** 横向各向同性 饱和土体 弹性土体 反射系数 透射系数

## 引言

弹性波在两种不同介质分界面上的反射和透射是地震工程、地球物理工程、海洋工程和岩土工程的重要基础课题, 对于地震图的识别、地质勘探、建筑场地地震反应及岩土工程的波速法测试等都有理论上和工程上的应用价值(Crampin, 1977; 吴世明, 唐有职, 1992). 在实际的工程场地中, 由于地下水的存在, 假定地下水位以下可视为饱和土, 地下水位以上可作弹性土, 因此, 研究弹性波在饱和土与弹性土界面上的反射和透射有重要的实际意义. 国内外许多学者都对这一模型的反射系数和透射系数进行过分析, Deresiewicz 和 Skalak(1963)研究了弹性波由弹性固体介质入射于饱和多孔介质时的反射和透射, 但他们的研究仅限于垂直入射情况; Hajra 和 Mukhopadhyay(1982)将其推广到斜入射情况, 分析了入射角对反射系数和透射系数的影响, 但忽略了饱和土体固液两相的粘性耦合, 仅适用于超高频情形. 杨峻(1995)采用低频的固液两相的粘性耦合项, 建立了低频时反射系数和透射系数的计算公式, 并分析了不同界面透水条件对反射系数和透射系数的影响. 对于适用于全频域(低, 中, 高频)情形的反射系数和透射系数, 笔者尚未见到有关文献报道. 同时, 以上的分析无一例外地把弹性土和饱和土视为各向同性材料. 事实上, 天然土体一般具有固体各向异性和应力各向异性(龚晓南, 1990), 如根据地质构造和土体沉积的特点, 对弹性土和饱和土简化为水平向各向同性的横向各向同性弹性介质模型, 则更符合实际情况. 遗憾的是, 由于横向各向同性介质模型破坏了本构关系空间上的球对称性, 增加了数学上求解的难度, 目前有关这方面的报道还不多.

笔者注意到, 地震波在近表层一般从饱和土层入射到弹性土层, 把弹性土和饱和土都简化成水平向各向同性的横向各向同性介质, 对于饱和土体采用适用于全频域的横向各向

\* 浙江省自然科学基金青年人才专项基金和浙江省自然科学基金资助项目.  
1997-11-01 收到初稿, 1998-10-02 收到修改稿并决定采用.

同性 Biot 波动方程(Biot, 1962; 汪越胜, 章梓茂, 1997), 研究  $qP_1$  波以任意角从饱和土入射到弹性土时的反射系数和透射系数. 根据推导求得的反射系数和透射系数的一般公式, 数值分析了各向异性、界面透水条件对反射系数和透射系数的影响. 研究还发现, 只要在相关公式中代入  $qSV$  波和  $qP_2$  波的无量纲波数和偏振矢量的单位基向量, 即可求得当  $qSV$  和  $qP_2$  波入射时的反射系数和透射系数.

## 1 饱和土层、弹性土层的无量纲波数频散方程及其位移解

对于饱和土层, 横向各向同性的 Biot 波动理论中平面应变波的波动方程为(Carctone, 1996; 汪越胜, 章梓茂, 1997)

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ (c_{11} + \alpha_1^2 M) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_x + (c_{13} + c_{44} + \alpha_1 \alpha_3 M) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} + \\ \alpha_1 M \left( \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial x \partial z} \right) = \rho \ddot{u}_x + \rho_f \ddot{w}_x \\ (c_{13} + c_{44} + \alpha_1 \alpha_3 M) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} + \left[ c_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (c_{33} + \alpha_3^2 M) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_z + \\ \alpha_3 M \left( \frac{\partial^2 w_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right) = \rho \ddot{u}_z + \rho_f \ddot{w}_z \\ M \left( \alpha_1 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) + M \left( \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial x \partial z} \right) = \rho \ddot{u}_x + \rho_{M1} \ddot{w}_x + \frac{\eta}{k_1} F_1(\omega) \dot{w}_x \\ M \left( \alpha_1 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + \alpha_3 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + M \left( \frac{\partial^2 w_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right) = \rho \ddot{u}_z + \rho_{M3} \ddot{w}_z + \frac{\eta}{k_3} F_3(\omega) \dot{w}_z \end{array} \right. \quad (1)$$

式中,  $c_{11}$ ,  $c_{13}$ ,  $c_{44}$ ,  $c_{33}$  为饱和土体横向各向同性土骨架的弹性参数;  $\alpha_1$ ,  $\alpha_3$ ,  $M$  为饱和土体的 Biot 参数;  $u_x$ ,  $u_z$ ,  $w_x$ ,  $w_z$  为固体和流体相对固体的位移分量;  $\rho$ ,  $\rho_f$  为饱和土体和流体的密度;  $\rho_{M1}$ ,  $\rho_{M3}$  为沿各向同性面和沿  $z$  轴方向的考虑固液两相惯性耦合的附加密度;  $\eta$  为液体的粘滞系数;  $k_1$ ,  $k_3$  为沿各向同性面和  $z$  轴方向的渗透系数.  $F_1(\omega)$ ,  $F_3(\omega)$  的表达式见附录. 式(1)的波动形式可表示为

$$\{u_x, u_z, w_x, w_z\}^T = \{a_{Fx}, a_{Fz}, b_{Fx}, b_{Fz}\}^T \exp[i\omega t - i\omega k_F(x \sin \theta + z \cos \theta)/c_F] \quad (2)$$

式中,  $\{a_{Fx}, a_{Fz}, b_{Fx}, b_{Fz}\}^T$  为固体和流体相对固体位移分量的幅值,  $\omega$  为圆频率,  $k_F = c_F k / \omega$  是饱和土的无量纲波数,  $c_F = \sqrt{c_{44}/\rho}$ ,  $\theta$  为传播方向与  $z$  轴的夹角. 把式(2)代入到式(1), 求得横向各向同性饱和土中 3 个平面应变体波( $qP_1$  波、 $qP_2$  波和  $qSV$  波)的无量纲波数  $k_{F1}$ ,  $k_{F2}$ ,  $k_{F3}$  满足

$$|\boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{C}(\theta) - (1/k_F)^2 \mathbf{E}_4| = 0 \quad (3)$$

式中, 矩阵  $\boldsymbol{\Gamma}$  和  $\mathbf{C}(\theta)$  见附录,  $\mathbf{E}_4$  为四阶单位矩阵. 相应的偏振矢量等于

$$\{a_{Fx}, a_{Fz}, b_{Fx}, b_{Fz}\}_j = A_j \mathbf{L}_{Fj} \quad (4)$$

$\mathbf{L}_{Fj}$  见附录. 同理, 对于横向各向同性弹性土层, 位移分量的波动形式取为

$$\{u_x, u_z\}_d^T = \{a_{dx}, a_{dz}\}^T \exp[i\omega t - i\omega k_d(x \sin \theta + z \cos \theta)/c_d] \quad (5)$$

式中,  $k_d = k c_d / \omega$ ,  $c_d = \sqrt{c_{d44}/\rho_d}$ ;  $\rho_d$  为弹性土层的密度. 由此可求得其平面应变波( $qP$  波和  $qSV$  波)的无量纲波数(Payton, 1983)

$$k_{d1,2} = 1 / \sqrt{(b_d \pm \sqrt{b_d^2 - 4c_d})/2} \quad (6)$$

式中

$$b_d = (\zeta_{d1} + 1) \cos^2 \theta + (\zeta_{da} \zeta_{d1} + 1) \sin^2 \theta$$

$$c_d = \zeta_{d1} \cos^4 \theta + [1 + \zeta_{da} \zeta_{d1}^2 - (\zeta_{d1} - \zeta_{d\beta})^2] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \zeta_{da} \zeta_{d1} \sin^4 \theta$$

其中,  $\zeta_{d1} = c_{d33}/c_{d44}$ ,  $\zeta_{da} = c_{d11}/c_{d33}$ ,

$\zeta_{d\beta} = \zeta_{d1} - c_{d13}/c_{d44} - 1$ ;  $\zeta_{da}$ ,  $\zeta_{d\beta}$  为反映弹性土各向异性程度的指标;  $c_{d11}$ ,  $c_{d13}$ ,  $c_{d44}$ ,  $c_{d33}$  为它的弹性参数. 相应的偏振矢量等于

$$\{a_{dx}, a_{dz}\}_j = A_j \mathbf{L}_{dj} \quad (7)$$

式中,  $\mathbf{L}_{dj}$  见附录. 如图 1 所示, 设饱和土层中频率为  $\omega$  的  $qP_1$  波, 以角度  $\theta_0$  入射于弹性土层, 在饱和土层中将产生反射  $qP_1$ ,  $qP_2$  和  $qSV$  波, 在弹性土层将产生透射  $qP$ ,  $qSV$  波. 界面两侧的平面波的位移场可表示为:

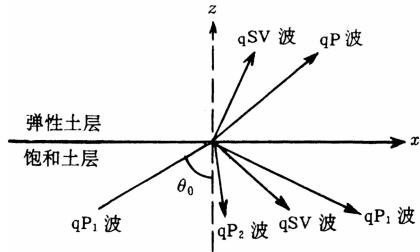


图 1  $qP_1$  波入射时在界面上产生的反射波和透射波

(1)  $z < 0$  部分(饱和土层)

$$\text{入射波 } qP_1 \text{ 波: } W_{F1} = A_{i1} \mathbf{L}_{F1} \exp[i\omega t - i\omega k_{F1} (x \sin \theta_0 + z \cos \theta_0) / c_F] \quad (8a)$$

$$\text{反射波} \quad \begin{cases} qP_1 \text{ 波: } W_{Fr1} = A_{r1} \mathbf{L}_{Fr1} \exp[i\omega t - i\omega k_{Fr1} (x \sin \theta_{r1} - z \cos \theta_{r1}) / c_F] \\ qP_2 \text{ 波: } W_{Fr2} = A_{r2} \mathbf{L}_{Fr2} \exp[i\omega t - i\omega k_{Fr2} (x \sin \theta_{r2} - z \cos \theta_{r2}) / c_F] \\ qSV \text{ 波: } W_{Fr3} = A_{r3} \mathbf{L}_{Fr3} \exp[i\omega t - i\omega k_{Fr3} (x \sin \theta_{r3} - z \cos \theta_{r3}) / c_F] \end{cases} \quad (8b)$$

(2)  $z > 0$  部分(弹性土层)

$$\text{透射波} \quad \begin{cases} qP_1 \text{ 波: } W_{dt1} = A_{t1} \mathbf{L}_{dt1} \exp[i\omega t - i\omega k_{dt1} (x \sin \theta_{t1} + z \cos \theta_{t1}) / c_d] \\ qSV \text{ 波: } W_{dt2} = A_{t2} \mathbf{L}_{dt2} \exp[i\omega t - i\omega k_{dt2} (x \sin \theta_{t2} + z \cos \theta_{t2}) / c_d] \end{cases} \quad (8c)$$

## 2 反射角和透射角及相应的偏振矢量

式(8a)中的  $\theta_0$  为已知, 相应的无量纲波数  $k_{F1}$  和偏振矢量  $\mathbf{L}_{F1}$  可由式(3)和(4)确定. 根据 Snell 定理, 式(8b)、式(8c)中的反射角  $\theta_{rj}$ ,  $\theta_{tj}$  满足

$$k_{Frj} = k_{F1} \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta_{rj}} \quad k_{dtj} = \bar{k}_{F1} \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta_{tj}} \quad (9)$$

把式(9)的前一式代入到式(3), 并注意到  $\theta = \pi - \theta_{rj}$ , 展开得

$$\theta_{r1} = \theta_0 \quad \theta_{r2,3} = \arctan(\sqrt{(-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac})/2a}) \quad (10)$$

其中

$$a = -k_{F1}^6 \sin^6 \theta_0 \frac{\zeta_a \zeta_1 \zeta_5}{\gamma_3} + k_{F1}^4 \sin^4 \theta_0 \left[ -\frac{\zeta_a \zeta_1 \zeta_5}{\gamma_1^2} - \frac{2\alpha_1 \zeta_5}{\gamma_1 \gamma_3} + \frac{(\zeta_a \zeta_1 + 1) \zeta_5}{\gamma_3} + \frac{\zeta_a \zeta_1 + \alpha_1^2 \zeta_5}{\gamma_1 \gamma_3} \right] +$$

$$k_{F1}^2 \sin^2 \theta_0 \left[ -2 \frac{\alpha_1 \zeta_5}{\gamma_1^3} + \frac{\zeta_5}{\gamma_1^2} + \frac{\zeta_a \zeta_1 + \alpha_1^2 \zeta_5}{\gamma_1^2 \gamma_2} + \frac{1}{\gamma_1^2 \gamma_3} - \frac{\zeta_5}{\gamma_3} + \frac{2\alpha_1 \zeta_5}{\gamma_1 \gamma_3} - \right.$$

$$\left. \frac{(\zeta_a \zeta_1 + \alpha_1^2 \zeta_5 + 1)}{\gamma_2 \gamma_3} \right] + \left( \frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_1^2} \right) \left( \frac{1}{\gamma_3} - \frac{1}{\gamma_1^2} \right)$$

$$b = k_{F1}^6 \sin^4 \theta_0 \cos^2 \theta_0 \left\{ \frac{1}{\gamma_3} \zeta_1 \zeta_5 + \frac{\zeta_5 [1 + \zeta_a \zeta_1^2 - (\zeta_1 - \zeta_\beta)^2]}{\gamma_2} \right\} - k_{F1}^4 \sin^2 \theta_0 \cos^2 \theta_0 \times$$

$$\left[ -\frac{\zeta_1 \zeta_5}{\gamma_1^2} - 2 \frac{\alpha_3 \zeta_5}{\gamma_1 \gamma_2} + \frac{\zeta_5 (\zeta_1 + 1)}{\gamma_2} + \frac{\zeta_1 + \alpha_3^2 \zeta_5}{\gamma_2 \gamma_3} \right] + k_{F11}^6 \sin^2 \theta_0 \cos^4 \theta_0 \frac{\zeta_1 \zeta_5}{\gamma_1^2}$$

$$c = k_{F11}^6 \sin^4 \theta_0 \cos^2 \theta_0 \frac{\zeta_1 \zeta_5}{\gamma_2}$$

式中,  $\zeta_1 = c_{33}/c_{44}$ ,  $\zeta_5 = M/c_{55}$ ,  $\zeta_\alpha = c_{11}/c_{33}$ ,  $\zeta_\beta = \zeta_1 - c_{13}/c_{44} - 1$ ,  $\gamma_1 = \rho/\rho_f$ ,  $\gamma_2 = \rho/(\rho_{M1} - i[\eta F_1(\omega)/k_1(\omega)])$ ,  $\gamma_3 = \rho/(\rho_{M3} - i[\eta F_3(\omega)/k_3(\omega)])$ . 其中,  $\zeta_\alpha$ ,  $\zeta_\beta$  为反映土骨架各向异性程度的指标. 把式(9)后一式代入到式(6)得

$$\theta_{t1,2} = \arctan \sqrt{(-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4a_1 c_1})/2} \quad (11)$$

式中

$$a_1 = \bar{\kappa}^4 k_{F11}^4 \sin^4 \theta_0 \zeta_{da} \zeta_{d1} - (\bar{\kappa}^2 k_{F11}^2 \sin^2 \theta_0) (\zeta_{da} \zeta_{d1} + 1) + 1$$

$$b_1 = \bar{\kappa}^4 k_{F11}^4 \sin^4 \theta_0 [1 + \zeta_{da} \zeta_{d1}^2 - (\zeta_{d1} - \zeta_{d\beta})^2 - \bar{\kappa}^2 k_{F11}^2 \sin^2 \theta_0] (\zeta_{d1} + 1)$$

$$c_1 = \bar{\kappa}^4 k_{F11}^4 \sin^4 \theta_0 \zeta_{d1}$$

现在来求解反射  $qP_1$  波、 $qSV$  波、 $qP_2$  波和透射  $qP$  波、 $qSV$  波的偏振矢量. 根据式(10)和式(11)中得到的反射角  $\theta_{rj}$  ( $j=1, 2, 3$ )、 $\theta_{tj}$  ( $j=1, 2$ ), 由式(9)得到相应的无量纲波数  $k_{Frj}$ ,  $k_{dtj}$ ; 把  $\theta_{rj}$ ,  $k_{Frj}$  和  $\theta_{tj}$ ,  $k_{dtj}$  分别代入式(4)和式(7), 即可求得相应的偏振矢量  $\mathbf{L}_{Frj}$  ( $j=1, 2, 3$ ) 和  $\mathbf{L}_{dtj}$  ( $j=1, 2$ ).

### 3 反射系数和透射系数的理论算式

为了求解反射系数  $A_{r1}/A_{i1}$ 、 $A_{r2}/A_{i1}$ 、 $A_{r3}/A_{i1}$  和透射系数  $A_{t1}/A_{i1}$ 、 $A_{t2}/A_{i1}$ , 必须应用  $z=0$  处的边界条件. 假定弹性土层和饱和土层接触的界面完全粘结, 则界面条件可表示为饱和土体的总应力连续

$$\sigma_z|_{z=0^-} = \bar{\sigma}_z|_{z=0^+} \quad \tau_{xz}|_{z=0^-} = \tau_{xz}|_{z=0^+}$$

土骨架的位移连续

$$u_z|_{z=0^-} = u_z|_{z=0^+} \quad u_x|_{z=0^-} = u_x|_{z=0^+} \quad (12)$$

另外, 需增加饱和土层界面的透水条件. 当界面完全透水时, 孔隙流体压力等于零

$$P_f|_{z=0^+} = 0 \quad (13)$$

或当界面完全不透水时, 流体相对土骨架的位移等于零

$$W_z|_{z=0^+} = 0 \quad (14)$$

或当界面为有限透水时, 在界面处流体相对土骨架的流速与孔压成正比, 即

$$\frac{\partial W_z}{\partial t}|_{z=0^+} = -\rho P_f|_{z=0^+} \quad (15)$$

式中,  $\rho$  为常数, 负号表示  $P_f$  以压应力为正. 经过弹性参数  $c_{44}$  无量纲化后, 横向各向同性饱和土中应力与位移的关系为

$$\frac{\sigma_z}{c_{44}} = (\zeta_1 - \zeta_\beta - 1 + \alpha_1 \alpha_3 \zeta_5) \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\zeta_1 + \alpha_3^2 \zeta_5) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \alpha_1 \zeta_5 \frac{\partial w_x}{\partial x} + \alpha_3 \zeta_5 \frac{\partial w_z}{\partial z} \quad (16a)$$

$$\frac{\tau_{xz}}{c_{44}} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{P_f}{c_{44}} = \zeta_5 \left( \alpha_1 \frac{\partial u_x}{\partial x} + \alpha_3 \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \quad (16b)$$

经过弹性参数  $c_{d44}$  无量纲化后, 横向各向同性弹性土层的应力和位移的关系为

$$\frac{\sigma_z}{c_{d44}} = (\zeta_{d1} - \zeta_{d\beta} - 1) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \zeta_{d1} \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad \frac{\tau_{xz}}{c_{d44}} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (17)$$

把式(8a)、(8b)和(8c)代入式(16)得

$$\frac{\exp(i\omega t)}{\omega} [H_{11} A_{r1} \exp(-i\omega k_{Fr1} \sin \theta_{r1}/c_F) + H_{12} A_{r2} \exp(-i\omega k_{Fr2} \sin \theta_{r2}/c_F) +$$

$$H_{13}A_{r3}\exp(-ix\omega k_{Fr3}\sin\theta_{r3}/c_F) + H_{14}A_{t1}\exp(-ix\omega k_{dt1}\sin\theta_{t1}/c_d) + H_{15}A_{t2} \times \exp(-ix\omega k_{dt2}\sin\theta_{t2}/c_d) = \frac{\exp(i\omega t)}{\omega} H_{11}A_{i1}\exp(-ix\omega k_{Fi1}\sin\theta_0/c_F) \quad (18a)$$

要使(18a)对所有的  $x$  成立, 必须

$$\frac{k_{Fr1}\sin\theta_{r1}}{c_F} = \frac{k_{Fr2}\sin\theta_{r2}}{c_F} = \frac{k_{Fr3}\sin\theta_{r3}}{c_F} = \frac{k_{dt1}\sin\theta_{t1}}{c_d} = \frac{k_{dt2}\sin\theta_{t2}}{c_d} = \frac{k_{Fi1}\sin\theta_0}{c_F} \quad (18b)$$

式(18b)即 Snell 定理. 令  $A_{i1}=1$ , 将式(8)代入式(16)和式(17). 应用 Snell 定理, 由边界条件式(12), 并分别应用透水条件式(13)、式(14)和式(15); 所得方程组整理成矩阵形式得

当界面透水时, 反射系数和透射系数公式

$$[H]_d \{A\} = \{H1\}_d \quad (19)$$

当界面不透水时, 反射系数和透射系数公式

$$[H]_u \{A\} = \{H1\}_u \quad (20)$$

当界面有限透水时, 反射系数和透射系数公式

$$[H]_e \{A\} = \{H1\}_e \quad (21)$$

矩阵  $[H]_d$ ,  $[H]_u$ ,  $[H]_e$  和列向量  $\{H1\}_d$ ,  $\{H1\}_u$ ,  $\{H1\}_e$  见附录.

## 4 算例

横向各向同性饱和土体和弹性土的物理参数见表 1、表 2 所示. 参数  $\zeta_\alpha$ ,  $\zeta_\beta$ ,  $\zeta_\delta$ ,  $\zeta_{da}$ ,  $\zeta_{d\beta}$

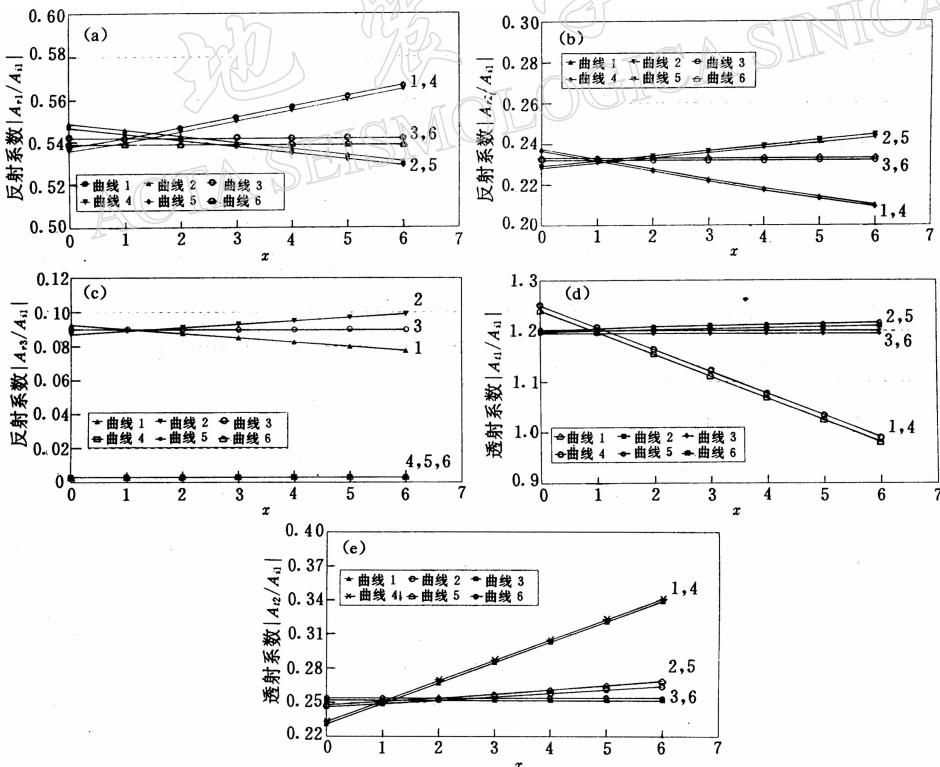


图 2 饱和土体各向异性对反射系数和透射系数的影响

曲线 1, 4:  $\zeta_\beta=1$ ,  $\zeta_\delta=0.1$ ,  $\zeta_\alpha=0.5+0.5x$ ; 曲线 2, 5:  $\zeta_\alpha=1$ ,  $\zeta_\beta=0.1$ ,

$\zeta_\delta=0.5+0.25x$ ; 曲线 3, 6:  $\zeta_\alpha=1$ ,  $\zeta_\beta=1$ ,  $\zeta_\delta=0.1+0.15x$

(a) 饱和土各向异性对 qP1 反射系数的影响; (b) 饱和土各向异性对 qSV 反射系数的影响;

(c) 饱和土各向异性对 qP2 反射系数的影响; (d) 饱和土各向异性对 qP 透射系数的影响;

(e) 饱和土各向异性对 qSV 透射系数的影响

表 1 饱和土体计算参数一览表

$c_{44}$ /GPa	$c_{33}$ /GPa	$M$ /GPa	$\alpha_1$	$\alpha_3$	$\varphi$	$\eta$	$k_1$ /Pa · s	$\rho$ /m <sup>2</sup>	$\rho_f$ /kg · m <sup>-3</sup>	$\rho_{M1} = \rho_{M3}$ /kg · m <sup>-3</sup>	$s$	$\omega$ /Hz
0.744	2.165	5.83	0.95	0.95	0.38	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-10</sup>	1 850	1 000	2 200	2.82	62.8

作为变量在具体算例中给出, 以便于调节其数值获得不同的介质异性, 当  $\zeta_a = \zeta_\beta = \zeta_\delta = \zeta_\gamma = \zeta_{da} = \zeta_{d\beta} = 1$  时退化为各向同性材料。

图 2 显示了饱和土各向异性参数变化对反射系数和透射系数的影响, 图中曲线参数的取值为: 曲线 1 为表面透水,  $\zeta_\beta = 1$ ,  $\zeta_\delta = 0.1$ ,  $\zeta_a = 0.5 \sim 3.5$ ; 曲线 2 为  $\zeta_a = 1$ ,  $\zeta_\delta = 0.1$ ,  $\zeta_\beta = 0.5 \sim 2.0$ ; 曲线 3 为  $\zeta_a = 1$ ,  $\zeta_\beta = 1$ ,  $\zeta_\delta = 0.1 \sim 1$ ; 曲线 4, 5, 6 的参数取值分别与曲线 1, 2, 3 相同, 但边界条件为不透水。曲线 1~6 中均  $\zeta_{da} = \zeta_{d\beta} = 1$ , 传播方向均  $\theta = 45^\circ$ , 从中可以看出  $\zeta_a$ ,  $\zeta_\beta$ ,  $\zeta_\delta$  对各模式波反射系数和透射系数的影响:

(1)  $\zeta_a$ ,  $\zeta_\beta$  的变化对饱和土中的反射系数和弹性土中的透射系数有影响, 增长规律近似为线性。随着  $\zeta_a$  增加,  $qP_1$  波的反射系数和  $qSV$  波的透射系数增加,  $qSV$  波和  $qP_2$  波的

表 2 弹性土计算参数一览表

$c_{d44}$ /GPa	$c_{d33}$ /GPa	$\rho_d$ /GPa
0.21	4.17	1 750

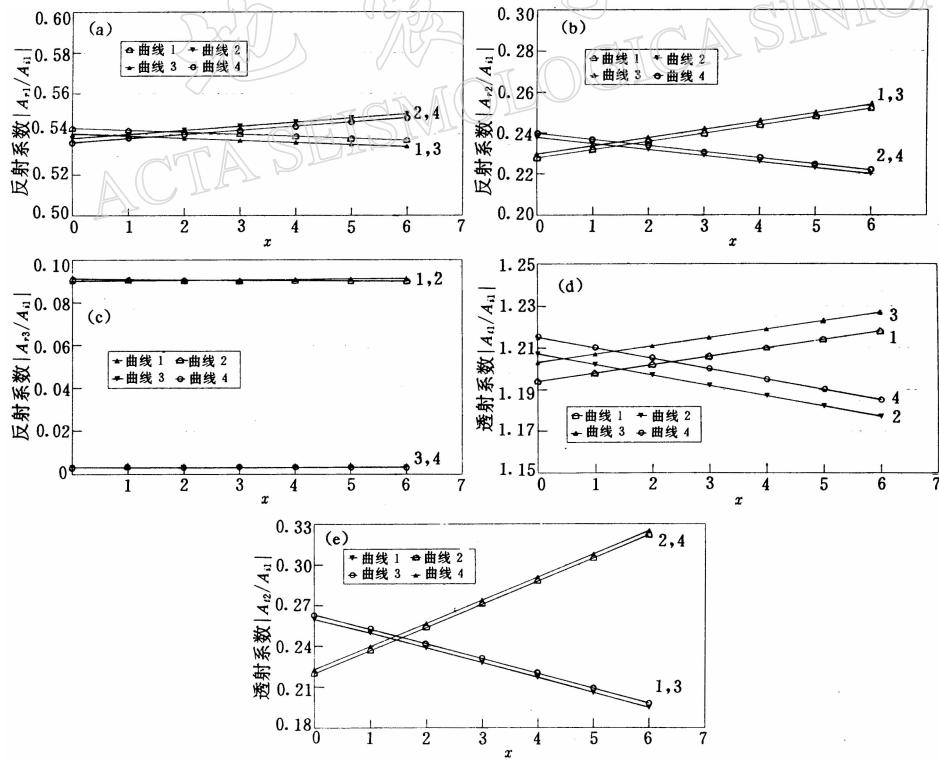


图 3 弹性土各向异性对反射系数和透射系数的影响

曲线 1, 3:  $\zeta_{d\beta} = 1$ ,  $\zeta_{da} = 0.5 + 0.5x$ ; 曲线 2, 4:  $\zeta_{da} = 1$ ,  $\zeta_{d\beta} = 0.5 + 0.25x$ ;

(a) 弹性土各向异性对  $qP_1$  反射系数的影响; (b) 弹性土各向异性对  $qSV$  反射系数的影响;

(c) 弹性土各向异性对  $qP_2$  反射系数的影响; (d) 弹性土各向异性对  $qP$  透射系数的影响;

(e) 弹性土各向异性对  $qSV$  透射系数的影响

反射系数和  $qP$  波的透射系数减少；当  $\zeta_\beta$  增加时， $qP_1$  波的反射系数减少， $qSV$  波和  $qP_2$  波的反射系数和  $qP$  波的透射系数增加。低频时  $\zeta_\alpha$  的变化对饱和土中的反射系数和弹性土中的透射系数的影响很小。

(2) 边界透水条件对  $qP_2$  波的反射系数影响较大，边界透水时比边界不透水时增加一个数量级。边界透水对其它模式波的反射系数和透射系数影响小。

图 3 显示了弹性土各向异性参数变化对反射系数和透射系数的影响。该图中曲线参数的取值为：曲线 1 为表面透水， $\zeta_{d\beta}=1$ ， $\zeta_{da}=0.5 \sim 3.5$ ；曲线 2 为  $\zeta_{da}=1$ ， $\zeta_{d\beta}=0.5 \sim 2.0$ ；曲线 3, 4 的参数取值分别与曲线 1, 2 相同，但边界条件为不透水。曲线 1~4 中均  $\zeta_\alpha=\zeta_\beta=1$ ， $\zeta_\gamma=0.1$ ，传播方向均  $\theta=45^\circ$ 。从中可以看出  $\zeta_{da}$ ， $\zeta_{d\beta}$  对各模式波反射系数和透射系数的影响：

(1)  $\zeta_{da}$ ， $\zeta_{d\beta}$  的变化对饱和土中  $qP_1$  波和  $qSV$  波的反射系数和弹性土中的透射系数有影响，对  $qP_2$  波的影响小。 $\zeta_{da}$  增加时， $qP_1$  波的反射系数和  $qSV$  波的透射系数减少， $qSV$  波的反射系数和  $qP$  波的透射系数增加。其中增长规律近似为线性。当  $\zeta_{d\beta}$  增加时，与因素  $\zeta_{da}$  的影响规律相反。

(2) 边界透水条件对  $qP_2$  波的反射系数影响较大，边界透水时比边界不透水时增加一个数量级。对饱和土中  $qP_1$  波和  $qSV$  波的反射系数和弹性土中  $qSV$  波的透射系数的影响很小。

## 5 结论

本文根据横向各向同性的饱和土体波动方程和横向各向同性弹性动力学，研究了  $qP_1$  波从饱和土以任意角入射弹性土的反射和透射。得到了适用于任意频率的反射系数和透射系数的一般算式，进而数值分析了各向异性和边界透水条件对反射系数和透射系数的影响。算例表明：

(1) 各向异性对反射系数和透射系数有较大影响。从算例得出的规律可知，与各向同性介质相比，当  $\zeta_\alpha$ ， $\zeta_{d\beta}$  增加而  $\zeta_\beta$ ， $\zeta_{da}$  减少时，各向异性对反射系数和透射系数的影响将更加明显。低频时  $\zeta_\alpha$  对反射系数和透射系数的影响较小。值得注意的是，横向各向同性饱和介质和弹性介质中各向同性面的剪切模量  $c_{66}$ ， $c_{d66}$ ，对平面应变波的反射系数和透射系数无影响。

(2) 透水条件对  $qP_2$  波的反射系数影响很大，对其它模式波的影响则很小。

## 参 考 文 献

- 龚晓南, 1990. 土塑性力学. 杭州: 浙江大学出版社. 54~73
- 吴世明, 唐有职, 1992. 岩土工程波速勘测技术. 北京: 水利水电出版社. 118~133
- 汪越胜, 章梓茂, 1997. 横向各向同性流体饱和多孔介质中平面波的传播. 力学学报, **29**(3): 257~268
- 杨竣, 1995. 弹性波在弹性土与饱和土界面的反射和透射. 浙江大学博士论文. 33~45
- Biot M A, 1956. The theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, II. Higher-frequency range. *J Acoust Soc Amer*, **28**(2): 178~191
- Biot M A, 1962. Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media. *J Acoust Soc Amer*, **34**(9): 1 254~1 264
- Carcione J M, 1996. Wave propagation in anisotropic saturated porous media: plane-wave theory and numerical simulation. *J*

*Acoust Soc Am*, **99**(5): 2 655~2 666

- Crampin S, 1977. A review of the effects of anisotropic layering on the propagation of seismic waves. *Geophys J R astr Soc*, **49**(1): 9~27
- Deresiewicz H, Skalak R, 1963. The effect of boundaries on wave propagation in a liquidfilled porous solid. V. Transmission across plane interface. *Bull Seism Soc Amer*, **53**(4): 783~789
- Hajra S, Mukhopadhyay A, 1982. Reflection and refraction of seismic waves incident obliquely at the boundary of a liquid-saturated porous solid. *Bull Seism Soc Amer*, **72**(5): 1 509~1 533
- Payton R G, 1983. *Elastic Wave Propagation in Transversely Isotropic Media*. The Hague: Nijhoff Martinus Publishers. 4~11

## 附录

(1) 无量纲质量矩阵  $\mathbf{F}$  为

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/\gamma_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/\gamma_1 \\ 1/\gamma_1 & 0 & 1/\gamma_2 & 0 \\ 0 & 1/\gamma_1 & 0 & 1/\gamma_3 \end{bmatrix}$$

(2)  $\zeta_\theta = K_3/K_1$ , 反映介质渗透系数各向异性的程度,  $F_1(\omega)$ ,  $F_3(\omega)$  近似地表达为 (Biot, 1956)

$$F_j[\varphi_j(\omega)] = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{i} \tanh(\sqrt{i}\varphi_j)}{1 - \tanh(\sqrt{i}\varphi_j)/i\varphi_j}$$

式中,  $j=1, 3$ ,  $\varphi_j(\omega) = s \sqrt{K_j \rho_j \omega / \eta \varphi_j}$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\tanh(\cdot)$  为双曲正切函数,  $s$  为反应孔隙结构特征的参数. 对于平面裂缝, 取  $s = \sqrt{12}$ ; 对于圆管状孔隙, 取  $s \approx \sqrt{8}$ .

(3)  $\mathbf{C}(\theta)$  为饱和土体的广义刚度矩阵, 定义如下:

$$\mathbf{C}(\theta) = \begin{bmatrix} (\zeta_a \zeta_1 + \alpha_1^2 \zeta_5) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta & (\zeta_1 - \zeta_\beta + \alpha_1 \alpha_3 \zeta_5) \sin \theta \cos \theta & \alpha_1 \zeta_5 \sin^2 \theta & \alpha_1 \zeta_5 \sin \theta \cos \theta \\ (\zeta_1 - \zeta_\beta + \alpha_1 \alpha_3 \zeta_5) \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta + (\zeta_1 + \alpha_1 \zeta_5) \cos^2 \theta & \alpha_3 \zeta_5 \sin \theta \cos \theta & \alpha_3 \zeta_5 \cos^2 \theta \\ \alpha_1 \zeta_5 \sin^2 \theta & \alpha_3 \zeta_5 \sin \theta \cos \theta & \zeta_5 \sin^2 \theta & \zeta_5 \sin \theta \cos \theta \\ \alpha_1 \zeta_5 \sin \theta \cos \theta & \alpha_3 \zeta_5 \cos^2 \theta & \zeta_5 \sin \theta \cos \theta & \zeta_5 \cos^2 \theta \end{bmatrix}$$

(4)  $\mathbf{L}_F$  为饱和土体偏振矢量的单位基向量. 对于饱和土体,  $\mathbf{L}_{Fj} = \{l_{j1}, l_{j2}, l_{j3}, l_{j4}\}$ , ( $j=1, 2, 3$ ).

式中,  $l_{jm}$  ( $m=1, 2, 3, 4$ ) 为

$$l_{jm} = \Delta_m^{(j)} / \Delta^{(j)} \quad \Delta^{(j)} = \left[ \sum_{m=1}^4 (\Delta_m^{(j)})^2 \right]^{1/2}$$

其中

$$\Delta_1^{(j)} = - \begin{vmatrix} d_{14}^{(j)} & d_{12}^{(j)} & d_{13}^{(j)} \\ d_{24}^{(j)} & d_{22}^{(j)} & d_{23}^{(j)} \\ d_{34}^{(j)} & d_{32}^{(j)} & d_{33}^{(j)} \end{vmatrix} \quad \Delta_2^{(j)} = - \begin{vmatrix} d_{11}^{(j)} & d_{14}^{(j)} & d_{13}^{(j)} \\ d_{21}^{(j)} & d_{24}^{(j)} & d_{23}^{(j)} \\ d_{31}^{(j)} & d_{34}^{(j)} & d_{33}^{(j)} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3^{(j)} = - \begin{vmatrix} d_{11}^{(j)} & d_{12}^{(j)} & d_{14}^{(j)} \\ d_{21}^{(j)} & d_{22}^{(j)} & d_{24}^{(j)} \\ d_{31}^{(j)} & d_{32}^{(j)} & d_{34}^{(j)} \end{vmatrix} \quad \Delta_4^{(j)} = - \begin{vmatrix} d_{11}^{(j)} & d_{12}^{(j)} & d_{13}^{(j)} \\ d_{21}^{(j)} & d_{22}^{(j)} & d_{23}^{(j)} \\ d_{31}^{(j)} & d_{32}^{(j)} & d_{33}^{(j)} \end{vmatrix}$$

$$d_{11}^{(j)} = (\zeta_a \zeta_1 + \alpha_1^2 \zeta_5) \lambda_1^2 + \lambda_3^2 - (1/k_{Fj})^2$$

$$d_{12}^{(j)} = d_{21}^{(j)} = (\zeta_1 - \zeta_\beta + \alpha_1 \alpha_3 \zeta_5) \lambda_1 \lambda_3$$

$$d_{13}^{(j)} = d_{31}^{(j)} = \alpha_1 \zeta_5 \lambda_1^2 - (1/k_{Fj})^2 / \gamma_1$$

$$d_{14}^{(j)} = \alpha_1 \zeta_5 \lambda_1 \lambda_3$$

$$d_{22}^{(j)} = \lambda_1^2 + (\zeta_1 + \alpha_3^2 \zeta_5) \lambda_3^2 - (1/k_{Fj})^2$$

$$d_{23}^{(j)} = d_{32}^{(j)} = \alpha_3 \zeta_5 \lambda_1 \lambda_3$$

$$d_{33}^{(j)} = \zeta_5 \lambda_3^2 - (1/k_{Fj})^2 / \gamma_2$$

$$d_{34}^{(j)} = \zeta_5 \lambda_1 \lambda_3$$

$$d_{24} = \alpha_3 \zeta_5 \lambda_3^2 - (1/k_{Fj})^2 / \gamma_1$$

其中,  $\lambda_x = \sin \theta$ ,  $\lambda_z = \cos \theta$ ;

(5)  $\mathbf{L}_d$  为弹性土的偏振矢量的单位基向量,  $\mathbf{L}_{dj} = \{l_{j1}, l_{j2}\}$ .

式中

$$l_{j1} = (\zeta_{d1} - \zeta_{d\beta}) \sin \theta \cos \theta / D$$

$$l_{j2} = [(1/k_{dj})^2 - \zeta_{da} \zeta_{d\beta} \sin^2 \theta - \cos^2 \theta] / D$$

$$D = \sqrt{(\zeta_{d1} - \zeta_{d3})^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + [(1/k_{dj})^2 - \zeta_{da} \zeta_{d1} \sin^2 \theta - \cos^2 \theta]^2}$$

(6)  $k, k_F, k_d, L_F, L_d, \theta, A, W_F, W_d$  的下标  $i$  表示入射,  $r$  表示反射,  $t$  表示透射; 下标 1 表示 qP<sub>1</sub> (qP) 波, 下标 2 表示 qSV, 下标 3 表示 qP<sub>2</sub> 波;  $\{A\} = \{A_{r1}, A_{r2}, A_{r3}, A_{t1}, A_{t2}\}$ .

(7) 矩阵  $[H]_d$ , 列向量  $\{H1\}_d$  的各元素为: 当  $j=1, 2, 3$  时

$$H_{1j} = \omega k_{Frj} \{ [\zeta_1 l_{rj2} + (\alpha_3 l_{rj2} + l_{rj4}) \alpha_3 \zeta_5] \cos \theta r_j - [(\zeta_1 - \zeta_\beta - 1) l_{rj1} + (\alpha_1 l_{rj1} + l_{rj3}) \alpha_3 \zeta_5] \sin \theta r_j \}$$

$$H_{2j} = \omega k_{Frj} (l_{rj1} \cos \theta r_j - l_{rj2} \sin \theta r_j) \quad H_{3j} = l_{rj1} \quad H_{4j} = l_{rj2}$$

$$H_{5j} = \omega k_{Frj} (\alpha_3 l_{rj2} + l_{rj4}) \cos \theta r_j - \omega k_{Frj} (\alpha_1 l_{rj1} + l_{rj3}) \sin \theta r_j$$

$$H_{11} = \omega k_{Fi1} \{ [(\zeta_1 - \zeta_\beta - 1) l_{i11} + (\alpha_1 l_{i11} + l_{i13}) \alpha_3 \zeta_5] \sin \theta_0 + [\zeta_1 l_{i12} + (\alpha_3 l_{i12} + l_{i14}) \alpha_3 \zeta_5] \cos \theta_0 \}$$

$$H_{12} = \omega k_{Fi1} (l_{i11} \cos \theta_0 + l_{i12} \sin \theta_0) \quad H_{13} = -l_{i11} \quad H_{14} = -l_{i12}$$

$$H_{15} = \omega k_{Fi1} (\alpha_1 l_{i11} + l_{i13}) \sin \theta_0 + \omega k_{Fi1} (\alpha_3 l_{i12} + l_{i14}) \cos \theta_0$$

当  $j=4, 5$  时,  $\bar{k} = c_d / c_F$ ,  $\bar{v} = c_{d44} / c_{F44}$ ,  $m = j - 3$

$$H_{1j} = \bar{\omega} k_{dm} [(\zeta_{d1} - \zeta_{d3} - 1) l_{tm1} \sin \theta_{tm} + \zeta_{d1} l_{tm2} \cos \theta_{tm}] / \bar{k}$$

$$H_{2j} = \bar{\omega} k_{dm} (l_{tm1} \cos \theta_{tm} + l_{tm2} \sin \theta_{tm}) / \bar{k} \quad H_{3j} = -l_{tm1} \quad H_{4j} = -l_{tm2} \quad H_{5j} = 0$$

(8) 矩阵  $[H]_u$ , 列向量  $\{H1\}_u$  的前 4 行分别与  $[H]_d$ ,  $\{H1\}_d$  相同, 第 5 行为

当  $j=1, 2, 3$  时,  $H_{5j}^{(u)} = l_{rj4}$ ; 当  $j=4, 5$  时,  $H_{5j}^{(u)} = 0$ ;  $H1_5^{(u)} = -l_{i14}$ .

(9) 矩阵  $[H]_e$ , 列向量  $\{H1\}_e$  的前 4 行分别与  $[H]_d$ ,  $\{H1\}_d$  相同, 第 5 行为

当  $j=1, 2, 3$  时,  $H_{5j}^{(e)} = \omega l_{rj4} - p \cdot H_{5j}$ ; 当  $j=4, 5$  时,  $H_{5j}^{(e)} = 0$ ;  $H1_5^{(e)} = -p \cdot H_5 - \omega l_{i14}$ .