第 21 卷 第 2 期
1999 年 3 月 (214～217)

地 震 学 报
ACTA SEISMOLOGICA SINICA

Vol. 21, No. 2
Mar., 1999

研究简报

动态损伤 $D(t)$ 及其在孕震状态监测中的物理意义*

程万正

(中国成都 610041 四川省地震局)

关键词 动态损伤 损伤度 孕震状态监测

当岩体内部含有微观或宏观裂隙时便认为受到损伤(Damage). 因为这些内部的裂隙并不总是能简化为一个或数个宏观裂纹，尤其在疲劳和蠕变条件下，宏观断裂前往往在薄弱区出现许多微观裂隙，或存在一个“损伤区”. 近年将这类微观裂隙的力学作用理解为连续变量场或损伤场，采用损伤统计力学方法，即研究受损岩体的性质变化，也研究直到出现宏观断裂以前的整个演化过程.

1 动态损伤

损伤是材料内部微缺陷形成和发展的结果，是其结构状态的一种不可逆的、耗能的演变过程. 国内外许多学者，如 Krajcinovic(1981～1983)，Grady 和 Kipp(1980)、楼志文(1991)、尹双增(1992)以及杨光松(1995)将材料中存在的微缺陷理解为连续的变量场或称损伤场. 研究方法之一是以材料的表观现象为依据，采用连续介质损伤力学(Continuum Damage Mechanics)的唯象方法，通过力学和数学的分析与计算，研究微缺陷的发展及其对材料性能的影响. 这一宏观的也是唯象的方法虽然需要微观模型的启发，但并不需要直接从微观机制导出宏观量之间的理论关系式，只要求所建立的模型以及由模型导出的推论和分析结果与实际相符，以用于材料的宏观力学性能测试. 一般针对不同损伤过程，可以选取不同的损伤变量；同一损伤过程，也可以选取不同形式的损伤变量来刻画.

基于 Walsh(1965)以及 Grand 和 Kipp(1987)含裂隙物体的近似微结构分析方法，考虑其弹性模量降低与单位体积内的裂隙数 λ 及其动态破坏线尺度 r 下的范围(体积 V)有关，因此，表征岩体的损伤程度可以写为

$$D = \lambda V \tag{1}$$

表示到时间 t 时的动态损伤是从过去所有时刻 t_0(0 到 t 时段内)开始活化的裂纹球型体积的叠加

$$D(t) = \int_0^t \dot{\lambda}(t_0) V(t-t_0)\,\mathrm{d}t_0 \tag{2}$$

$\dot{\lambda}(t_0)$ 表示了裂隙总数中参加活动的裂隙活动率，取其密度(时间)分布函数.

对此，所研究的裂隙分布数与岩体所受应变有关. Jaeger 和 Cook(1969)以及 Grand 和 Kipp(1987)曾选用双参数的 Weibull 分布

$$\lambda(t) = K\varepsilon^g(t) \tag{3}$$

式中，λ 为应变小于或等于 ε 时就能活动的裂隙数目；K 是表征岩体状态性质的参数；g 为积累损伤的增长速率. Costin(1987)也采用 Weibull 强度分布律，表示了在宏观体积 V 中至少能激活一条裂隙的概率，这

* 中国地震局“九五”课题(95-04-05-01-02).
1998-08-11 收到初稿，1999-03-01 决定采用.

里或用于表示岩体裂隙分布律，也可表述为宏观岩体内破坏尺寸小于一定线度尺度的分布律. Turcotte (1991)也曾用 Weibull 分布示出了岩体碎块大小与频度的经验关系.

令常应变率为 $\dot{\varepsilon}_0$，则在过去时间 t 的长期应变作用示为

$$\varepsilon(t) = \dot{\varepsilon}_0 t \qquad \text{则}\ \lambda(t_0) = K\dot{\varepsilon}_0^g t^g \tag{4}$$

从裂隙分布 λ 得到概率密度函数

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = Kg\dot{\varepsilon}_0^g t^{g-1} \tag{5}$$

到时刻 t 时，岩体自 t_0 时刻开始活化的裂纹活动规模将取决于经过的时间$(t-t_0)$及这一时段的应变量. 宏观上，一定微破裂总体线尺度水平 L_n 下的宏观损伤速率 μ 决定损伤区的范围或体积

$$V(t-t_0) = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{L_n}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\mu^3(t-t_0)^3 \tag{6}$$

因此，基于常应变速率下裂隙分布律的损伤积分方程，可给出 t 时刻的动态损伤

$$D(t) = \int_0^t \frac{4}{3}\pi Kg\dot{\varepsilon}_0^g \mu^3 t_0^{g-1}(t-t_0)^3\,\mathrm{d}t_0 \tag{7}$$

据式(5)，代入 $\dot{\lambda}(t_0)$ 表达式，再利用 β 函数形式求积

$$\int_a^b (x-a)^{P-1}(b-x)^{q-1}\mathrm{d}x = (b-a)^{p+q-1}\beta(p,q) \tag{8}$$

式(7)中，$P=g, q=4, a=0, b=t, x=t_0$，$\mathrm{d}x=\mathrm{d}t_0$，则

$$D(t) = \frac{4}{3}\pi Kg\dot{\varepsilon}_0^g \mu^3 t^{g+3}\beta(g,4) = \frac{4}{3}\pi Kg\dot{\varepsilon}_0^g \mu^3 t^{g+3}\frac{\Gamma(g)\Gamma(4)}{\Gamma(g+4)} \tag{9}$$

式中，Γ 为伽玛函数，到 t 时宏观岩体内动态积累损伤参量的一般式为

$$D(t) = 8\pi K\dot{\varepsilon}_0^g \mu^3 t^{g+3} F^{-1} \tag{10}$$

所谓动态，即与时间 t 有关. 动态损伤 $D(t)$ 参量不仅与持续应变量和宏观损伤发生率 μ 成正比，也与岩体内状态参数 K，g 有关，式中

$$F^{-1} = \frac{1}{(g+3)(g+2)(g+1)}$$

将式(6)中宏观损伤速率 μ 以微破裂尺度 L_n 表示

$$\mu^3 = L_n^3/8t^3 \tag{11}$$

再将式(4)和(11)代入式(10)，得

$$D(t) = \pi L_n^3 \lambda(t) F^{-1} \tag{12}$$

引入国家地震局震害防御司编(1992)利用全世界震例(M=0.5～8.5)给出的震源断层长度 L_n 和震级关系式

$$\lg L_n \pm 0.5 = 1.35 + 0.44(M-6) = 0.44M - 1.29 \tag{13}$$

取

$$L_n^3 = 10^{(C_1 M - C_0)} \tag{14}$$

浅源强地震是地壳内岩体的微缺陷损伤演化到宏观断裂的过程. 大量试验(陈颙，1989；秦四清等，1993)证实，随着外荷载增加，当变形达到一定程度后，岩石内部出现微破裂的丛集，并逐渐向未来大断裂面附近集中. 其丛集过程必然使声发射信号强度增大，b 值降低. 由震级频度关系 $\lg N = a - bM$，Aki (1981)和陈颙(1989)导出震源断层的分维值 $D_\mathrm{f}=2b$. 说明：从岩样受载破裂到强震发生造成的数百千米的断裂带，其自相似标度关系存在且相互统一. 因此，这里将微裂隙分布 $\lambda(t)$ 以相应时间 t 内微破裂尺度下的地震分布表示

$$\lambda(t) = \int_{M_0}^{M_\mathrm{u}} 10^{a-bM}\,\mathrm{d}M \tag{15}$$

取式(14)、(15)代入式(12)，则孕震区动态损伤参量的具体计算式写为

$$D(t) = \pi F^{-1}\int_{M_0}^{M_u} 10^{[(a-C_0)\cdot(b-C_1)M]}\mathrm{d}M = \frac{\pi 10^A(10^{-BM_0}-10^{-BM_u})}{B\cdot F\cdot L_n 10} = \frac{\pi 10^A(10^{BM_u}-10^{BM_0})}{BFL_n 10\cdot 10^{B(M_u+M_0)}} \tag{16}$$

式中，$A=a-C_0$，$B=b-C_1$；考虑震源体的拟合系数变化范围，由式(13)和(14)知，$C_0=3.87\pm0.17$，$C_1=1.32\pm0.17$. $F=(g+3)(g+2)(g+1)$. 式中 g 参量见下节分析.

2 积累损伤和速率

Krajcinovic(1983)和尹双增(1992)曾将损伤变量用破坏强度的 Weibull 分布函数表示其演变规律. Grand 和 Kipp(1987)使裂隙损伤活化参数直接服从于应力 σ、碎块尺度 L_n 和应变 ε 的依从关系. 吴政和张承娟(1996)认为，岩体损伤变量 D 与加载过程中微裂隙的分布相类似也有双参数的 Weibull 分布.

因此，据式(3)积累损伤也可表示为应变 ε 的函数形式

$$D(\varepsilon) = 1-\exp[-\int_0^t \lambda(\varepsilon)\mathrm{d}t] = 1-\exp[-(\frac{k\varepsilon^{(g+1)}(t)}{g+1})] \tag{17}$$

令 $\alpha=g+1$，$\beta=\sqrt[\alpha]{\frac{\alpha}{k}}$有简写式

$$D(\varepsilon) = 1-\exp[-(\frac{\varepsilon(t)}{\beta})^\alpha] \tag{18}$$

式中，α 为形状参数；α 和 β 为非负数.

Davison 和 Stevens(1973)根据热力学关系式，在张性载荷作用下给出弹性应变能 U 释放率的一般式

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon} = \sigma = E_0(1-D)\varepsilon(t) \tag{19}$$

由内状态损伤变量 $D(\varepsilon)$表示了应力-应变关系；E_0 为岩石固有弹性模量. Costin(1987)以及 Grand 和 Kipp(1987)都给出过类似的固有弹性模量因损伤逐渐衰减变化的连续损伤力学的基本关系式.

将式(18)代入式(19)，有

$$\sigma = E_0\varepsilon(t)\exp[-(\frac{\varepsilon(t)}{\beta})^\alpha] \tag{20}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon} = E_0[1-\alpha(\frac{\varepsilon(t)}{\beta})^\alpha]\exp[-(\frac{\varepsilon(t)}{\beta})^\alpha] \tag{21}$$

可由应力应变关系(图)给出几何条件，当 $\varepsilon=0$ 时，$\sigma=0$；当 $\varepsilon=0$ 时，$\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\varepsilon=E_0$；当 $\varepsilon=\varepsilon_{\max}$时，$\sigma=\sigma_{\max}$；$\varepsilon_{\max}$和 $\sigma_{\max}$分别为峰荷应变应力值.

据式(21)，当 $\varepsilon\to\varepsilon_{\max}$，$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}\to 0$；近似有

$$\alpha(\frac{\varepsilon(t)}{\beta})^\alpha = 1 \tag{22}$$

则

$$\beta = \frac{\varepsilon_{\max}}{(\frac{1}{\alpha})^{1/\alpha}} \tag{23}$$

进一步推得

$$D(\varepsilon) = 1-\exp[-\frac{1}{\alpha}(\frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_{\max}})^\alpha] \tag{24}$$

为宏观岩体损伤演化的一般方程. 其损伤度与所受到的动态应变强度 $\varepsilon(t)$、弹性模量 E_0 和峰荷应变 $\varepsilon_{\max}$ 等参量有关.

若令 $\varepsilon(t)\to\varepsilon_{\max}$时的损伤值形式上表示为极限损伤 $D_c(\varepsilon)$. 此时由式(20)在峰荷应力、应变条件下

$$\frac{\sigma_{\max}}{E_0\varepsilon_{\max}} = \exp[-(\frac{\varepsilon(t)}{\beta})^\alpha] \tag{25}$$

取对数，并引入式(22)

$$\ln\frac{\sigma_{\max}}{E_0\varepsilon_{\max}} = -\frac{1}{\alpha} \tag{26}$$

因 $\varepsilon(t)\to\varepsilon_{\max}$，则由式(24)

$$D_c(\varepsilon) = 1 - \exp(-\frac{1}{\alpha}) = 1 - \exp(\ln \frac{\sigma_{\max}}{E_0 \varepsilon_{\max}}) \tag{27}$$

式(27)表示了与岩体弹性模量有关的损伤度在极限应力、应变条件下的极限值.

为了求取孕震区由中小地震活动揭示的动态损伤程度随时间的演化，据式(17)和式(4)，有

$$D(\varepsilon) = 1 - \exp[-(\frac{K(\dot{\varepsilon}_0\ t)^{g+1}}{g+1}] = 1 - p(t) \tag{28}$$

这里，约定 $p(t)$ 是至 t 时区域微震活动的动态累积增长概率. 若对 $1/p(t)$ 取两次对数，有

$$\ln\ln \frac{1}{p(t)} = \ln\left(\frac{K(\dot{\varepsilon}_0^{g+1})}{g+1}\right) + (g+1)\ln t \tag{29}$$

此式给出了式(16)中，据实际地震活动资料求取积累损伤速率 g 参量的方法.

3　结语

本文提出的动态损伤 $D(t)$ 是区域地下微震破裂的综合表征量. 它反映了不同地区在不同时期微破裂分布加剧或平静的实际，刻画了区域地壳承受的平均应力强度水平或接近强度极限的损伤程度. 具体表现在平均微破裂强度、频度和微破裂在时间-空间上的集中程度；各时窗内 $\ln\ln(1/p(t))$-$\ln t$ 曲线斜率的变化表现在 g 值的增加或减小. 当参数 b 值减小、g 增大时反映中小地震破裂在连续数个 Δt_i 时段的增大. 因此，动态损伤度 $D(t) \propto g$ 和 Mu，随积累增长速率 g、分布震级的增大而增大，随 b 值的减小而增大. 反之，动态损伤度则减小.

参　考　文　献

陈颙. 1989. 分形与浑沌在地球科学中的应用. 北京：学术期刊出版社，97～104

国家地震局震害防御司编. 1992. 地震工作手册. 北京：地震出版社，603

楼志文. 1991. 损伤力学基础. 西安：西安交通大学出版社，1～107

秦四清，李造鼎，张倬元，等. 1993. 岩石声发射技术概论. 西安：西安交通大学出版社，36～59

吴政，张承娟. 1996. 单向荷载作用下岩石损伤模型及其力学特征的研究. 岩石力学与工程学报，**15**(1)：55～61

杨光松. 1995. 损伤力学与复合材料损伤. 北京：国防工业出版社，1～103

尹双增. 1992. 断裂损伤理论及应用. 北京：清华大学出版社，323～376

Costin L S 著. 1987；尹祥础等译. 1992. 岩石断裂力学. 北京：地震出版社，180～226

Grand D E，Kipp M E 著. 1987；尹祥础等译. 1992. 岩石断裂力学. 北京：地震出版社，454～501

Turcotte D L 著. 1991；陈颙，郑捷，季颖译. 1993. 分形与混沌在地质学和地球物理学中的应用. 北京：地震出版社，21～36

Aki K. 1981. Probabilistic synthesis of precursory phenomena. In：Simpson D W，Richards P G (eds). *Earthguake Prediction*. Washington，D C：AGU，566～571

Davison L，Stevens A L. 1973. Thermomechanical constitution of spalling elastic bodies. *J Appl Ph ys*，**44**(2)：668～674

Grady D E，Kipp M E. 1980. Continuum modelling of explosive fracture in oil shale. *Int J Rock Mech Min Sci Geomech Abstr*，**17**：147～157

Jaeger J C，Cook N G W. 1969. *Fundamentals of Rook Mechanics*. 3rd Ed. New York：Chapman and Hall

Krajcinovic D，Fonseka G U. 1981. The Continuous damage of brittle materials. *J Appl Mech*，**48**：809～824

Krajcinovic D，1982. Statistical aspects of the continous damage theory. *Int J Solid Structures*. **18**(7)：551～562

Krajcinovic D，1983. Constitutive equations for damaging platerials. *J Appl Mech*，**50**：355～360

Krajcinovic D，1984. Continuum damage mechanics. *Apple Mech Reviews*，**37**(1)：1～6

Walsh J B，1965. The effect of cracks on the compressibility of rock. *J Geophys Res*，**70**：381～389