

文章编号: 0253-3782(2004)05-0495-14

# 任意圆弧形凸起地形中隧洞对 入射平面 SH 波的影响<sup>\*</sup>

梁建文<sup>1)</sup> 罗 昊<sup>1)</sup> Vincent W. Lee<sup>2)</sup>

1) 中国天津 300072 天津大学土木工程系

2) Department of Civil Engineering, University of Southern California, Los Angeles, CA 90089-2531, U. S. A.

**摘要** 借助辅助函数的思想, 采用波函数展开法给出了圆弧形凸起地形中隧洞对入射平面 SH 波影响问题的一个解析解。数值结果表明, 凸起地形中隧洞的存在以及隧洞大小, 对凸起地形表面运动, 以及凸起地形中的隧洞的动应力集中均具有显著影响。

**关键词** 凸起地形 隧洞 散射 SH 波 解析解

**中图分类号:** P315.3 **文献标识码:** A

## 引言

震害调查和理论分析表明, 凸起地形对入射波具有显著的放大作用, 其原因在于波在凸起地形中的多次反射(袁晓铭, 廖振鹏, 1996); 隧洞在波入射下具有显著的动应力集中现象(Pao, Mow, 1973; Lee, Trifunac, 1979)。由此可以设想, 凸起地形中隧洞的存在对凸起地形地表运动可能会有更大的放大作用, 而凸起地形中隧洞的动应力集中, 可能也会因凸起地形而更加显著。由于在实际工程中穿越丘陵或山体的铁路隧洞或公路隧洞等是很常见的, 因此, 研究凸起地形中隧洞对入射波的影响, 对于凸起地形地表运动以及隧洞的动应力估计, 均具有重要的理论意义。

尽管该问题可以采用数值法求解, 但解析法在分析问题的本质方面有着数值法不可替代的作用, 同时解析法还可用于检验数值法的精度。本研究借助辅助函数的思想, 采用波函数展开法, 给出了圆弧形凸起地形中隧洞对入射平面 SH 波影响问题的一个解析解。数值结果表明, 由于凸起地形与隧洞之间的相互作用, 凸起地形中隧洞的存在以及隧洞大小, 对凸起地形地表运动以及凸起地形中隧洞的动应力集中, 均具有显著影响。

## 1 模型

如图 1 所示, 模型由均匀、各向同性和弹性半空间表面任意圆弧形凸起地形及一个与之同心的隧洞组成。水平地表边界记为  $\Gamma$ , 圆弧形凸起地形边界记为  $L$ , 圆形孔洞的边界记为  $L_2$ 。圆弧凸起地形的半径为  $a_1$ , 圆形隧洞的半径记为  $a_2$ , 圆弧中心  $o$  与水平地表的间距为  $d$ , 凸起地形较水平地表的高度为  $h$ , 半宽为  $b$ , 两者的比值  $h/b$  定义为凸起地形的高宽

\* 国家自然科学基金项目(50378063)、教育部优秀青年教师资助计划和教育部留学回国人员科研启动基金项目。  
2003-03-03 收到初稿, 2003-10-20 收到修改稿并决定采用。

比. 如图2所示, 一个区域是包含凸起地形和隧道的环形区域  $\Omega$ , 它的上部边界为  $L$ , 下部边界为  $\bar{L}$ ; 另一个区域是除去环域  $\Omega$  以外的凹陷半空间  $D$ . 它与环域  $\Omega$  的公共边界为  $\bar{L}$ , 水平地表边界仍为  $\Gamma$ . 问题的边界条件分别是:  $\Omega$  域中的凸起地形的零应力边界条件;  $D$  域中的半空间水平地表零应力边界条件; 隧道边界  $L_2$  上的零应力边界条件;  $\Omega$  域与  $D$  域之间的公共边界  $\bar{L}$  上的位移和应力连续条件. 本文只研究隧道之圆  $L_2$  完全在  $\Omega$  域内的情况, 即  $a_2 < a_1$ .

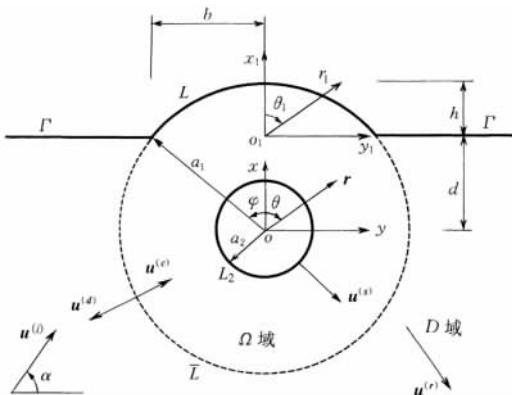


图1 物理模型和波散射示意图

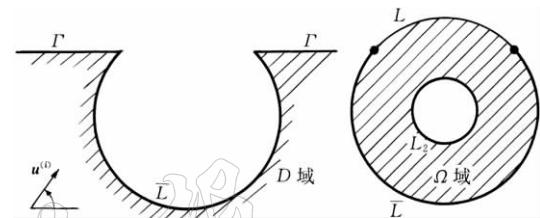


图2 区域划分

设一简谐 SH 波  $u^{(i)}$  以角度  $\alpha$  入射, 它在直角坐标系  $x_1-o_1-y_1$  中的表达式如下:

$$u^{(i)} = u_0 \cdot \exp\left[-i\omega\left(-\frac{y_1}{c_{y_1}} - \frac{x_1}{c_{x_1}}\right)\right] \quad (1)$$

式中, 时间因子  $\exp(-i\omega t)$  略去, 下同;  $c_{y_1} = c/\cos\alpha$  和  $c_{x_1} = c/\sin\alpha$  分别为 SH 波在  $y_1$  和  $x_1$  方向上的相速度. 其中  $c$ ,  $\omega$  和  $u_0$  分别为入射 SH 波的波速、圆频率和幅值.

设入射波  $u^{(i)}$  经过该地形的散射后的出平面总位移场为  $u$ , 则  $u$  应满足下列波动方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2)$$

该问题的位移场应满足下列零应力边界条件:

$$\sigma_{\theta_1 z} \Big|_{\theta_1 = \pm \frac{\pi}{2}} = 0 \quad \text{当} (r_1, \theta_1) \in \Gamma \quad (3)$$

$$\sigma_{rz} \Big|_{r=a_1} = 0 \quad \text{当} (r, \theta) \in L \quad (4)$$

$$\sigma_{rz} \Big|_{r=a_2} = 0 \quad \text{当} (r, \theta) \in L_2 \quad (5)$$

式中

$$\sigma_{\theta_1 z} = \frac{\mu}{r_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta_1} \quad (6)$$

$$\sigma_{rz} = \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \quad (7)$$

$\mu$  为半空间介质的剪切模量.

凹陷半空间  $D$  内的位移场可表示为

$$u = u^{(f)} + u^{(d)} \quad (8)$$

其中,  $u^{(f)}$  表示半空间自由场位移;  $u^{(d)}$  表示由于边界  $\bar{L}$  产生的散射场位移.

自由场位移  $u^{(f)}$  由入射波  $u^{(i)}$  和入射波在半空间水平地表的反射波  $u^{(r)}$  组成, 即

$$u^{(f)} = u^{(i)} + u^{(r)} \quad (9)$$

其中

$$u^{(r)} = u_0 \cdot \exp \left[ -i\omega \left( -\frac{y_1}{c_{y_1}} + \frac{x_1}{c_{x_1}} \right) \right] \quad (10)$$

考慮到公式(Abramowitz, Stegun, 1972)

$$\exp(\pm ikr \cdot \cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \cdot (\pm i)^n \cdot J_n(kr) \cdot \cos n\theta \quad (11)$$

代入上式和式(1), 并将两式相加, 则有

$$u^{(f)}(r, \theta) = u^{(i)} + u^{(r)} = u_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} J_n(kr) \cdot (A_{0,n} \cdot \cos n\theta + B_{0,n} \cdot \sin n\theta) \quad (12)$$

其中,  $J_n(\cdot)$  为第一类 Bessel 函数,  $k = \omega/c$  为入射波的波数, 而

$$\begin{cases} A_{0,n} = \epsilon_n \cdot i^n \cdot \left[ \exp(-ikd \cdot \sin\alpha) \cdot \cos n\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \exp(ikd \sin\alpha) \cdot \cos n\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \right] \\ B_{0,n} = \epsilon_n \cdot i^n \cdot \left[ \exp(-ikd \cdot \sin\alpha) \cdot \sin n\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \exp(ikd \sin\alpha) \cdot \sin n\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \right] \end{cases} \quad (13)$$

其中,  $\epsilon_0 = 1$ ,  $\epsilon_n = 2$ . 对于  $n = 1, 2, 3, \dots$ , 将式(12)代入式(7)中, 则有

$$\sigma_{rz}^{(f)}(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{kr} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} R_n(kr) \cdot (A_{0,n} \cdot \cos n\theta + B_{0,n} \cdot \sin n\theta) \quad (14)$$

其中,  $\sigma_0 = \mu k u_0$ , 表示入射波应力幅值, 而

$$R_n(kr) = n \cdot J_n(kr) - kr \cdot J_{n+1}(kr) \quad (15)$$

按分离变量法求解总波动方程式(2). 满足式(2)以及边值条件式(3)的散射位移场  $u^{(d)}$  可写为

$$u^{(d)}(r_1, \theta_1) = u_0 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} H_m^{(1)}(kr_1) \cdot (A_m \cdot \delta_m^{(1)} \cdot \cos m\theta_1 + B_m \cdot \delta_m^{(2)} \cdot \sin m\theta_1) \quad (16)$$

式中,  $A_m$  和  $B_m$  为待定常数,  $H_m^{(1)}(\cdot)$  为第一类 Hankel 函数, 而

$$\begin{cases} \delta_m^{(1)} = 1 + (-1)^m = \begin{cases} 0 & \text{当 } m \text{ 为奇数} \\ 2 & \text{当 } m \text{ 为偶数} \end{cases} \\ \delta_m^{(2)} = 1 - (-1)^m = \begin{cases} 2 & \text{当 } m \text{ 为奇数} \\ 0 & \text{当 } m \text{ 为偶数} \end{cases} \end{cases} \quad (17)$$

将式(16)代入式(6)有

$$\sigma_{\theta_1 z}^{(d)}(r_1, \theta_1) = -\frac{\sigma_0}{kr_1} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} m \cdot H_m^{(1)}(kr_1) \cdot (A_m \cdot \delta_m^{(1)} \cdot \sin m\theta_1 - B_m \cdot \delta_m^{(2)} \cdot \cos m\theta_1) \quad (18)$$

在边界  $\Gamma$  上有  $\theta_1 = \pm \frac{\pi}{2}$ , 可知零应力边值条件式(3)恒成立.

利用外域型 Graf 转换公式(袁晓铭, 廖振鹏, 1996)

$$H_m^{(1)}(kr_1) \begin{Bmatrix} \cos m\theta_1 \\ \sin m\theta_1 \end{Bmatrix} = (-1)^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(kr) \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\epsilon_n}{2} \left[ J_{n+m}(kd) + (-1)^m \cdot J_{n-m}(kd) \right] \cos n\theta \\ - \left[ J_{n+m}(kd) - (-1)^m \cdot J_{n-m}(kd) \right] \sin n\theta \end{Bmatrix} \quad (19)$$

进行坐标转换, 可得  $u^{(d)}$  在极坐标系  $(r, \theta)$  下的表达式, 即

$$u^{(d)}(r, \theta) = u_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(kr) \cdot (A_n^* \cdot \cos n\theta + B_n^* \cdot \sin n\theta) \quad (20)$$

其中

$$\begin{cases} A_n^* = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot \delta_m^{(1)} \cdot U_{mn} \cdot A_m \\ B_n^* = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \cdot \delta_m^{(2)} \cdot V_{mn} \cdot B_m \end{cases} \quad (21)$$

而

$$\begin{cases} U_{mn} = \frac{\varepsilon_n}{2} \cdot [J_{m+n}(kd) + (-1)^n \cdot J_{m-n}(kd)] \\ V_{mn} = \frac{\varepsilon_n}{2} \cdot [J_{m+n}(kd) - (-1)^n \cdot J_{m-n}(kd)] \end{cases} \quad (22)$$

将式(20)代入式(7)中, 可得

$$\sigma_{rz}^{(d)}(r, \theta) = \mu \cdot \frac{\partial u^{(d)}(r, \theta)}{\partial r} = \frac{\sigma_0}{kr} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} T_n(kr) \cdot (A_n^* \cdot \cos n\theta + B_n^* \cdot \sin n\theta) \quad (23)$$

式中

$$T_n(kr) = n \cdot H_n^{(1)}(kr) - kr \cdot H_{n+1}^{(1)}(kr) \quad (24)$$

由边界  $\bar{L}$  和圆弧型凸起地表  $L$  所围成圆形边界产生的在环域  $\Omega$  内的位移场可表示为

$$u^{(c)}(r, \theta) = u_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} J_n(kr) \cdot (C_n \cdot \cos n\theta + D_n \cdot \sin n\theta) \quad (25)$$

其中,  $C_n$  和  $D_n$  为待定常数. 将式(25)代入式(7)可得

$$\sigma_{rz}^{(c)}(r, \theta) = \mu \cdot \frac{\partial u^{(c)}(r, \theta)}{\partial r} = \frac{\sigma_0}{kr} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} R_n(kr) \cdot (C_n \cdot \cos n\theta + D_n \cdot \sin n\theta) \quad (26)$$

环域  $\Omega$  内还存在着圆形隧洞边界  $L_2$  产生的散射波  $u^{(s)}$  位移场

$$u^{(s)}(r, \theta) = u_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(1)}(kr) \cdot (E_n \cdot \cos n\theta + F_n \cdot \sin n\theta) \quad (27)$$

其中,  $E_n$  和  $F_n$  是待定常数. 将式(27)代入式(7)可得

$$\sigma_{rz}^{(s)}(r, \theta) = \mu \cdot \frac{\partial u^{(s)}(r, \theta)}{\partial r} = \frac{\sigma_0}{kr} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} T_n(kr) \cdot (E_n \cdot \cos n\theta + F_n \cdot \sin n\theta) \quad (28)$$

下面引入边界条件, 求解各个待定常数. 首先, 半空间水平地表的零应力边界条件式(3)对于自由场位移  $u^{(f)}$  是自动满足的.

其次, 对于圆形隧洞边界  $L_2$  上的零应力边界条件式(5), 即

$$\sigma_{rz} \mid_{r=a_2} = \sigma_{rz}^{(c)}(r, \theta) \mid_{r=a_2} + \sigma_{rz}^{(s)}(r, \theta) \mid_{r=a_2} = 0 \quad (29)$$

将式(26)和(28)代入式(29)中, 则有

$$T_n(ka_2) \cdot E_n + R_n(ka_2) \cdot C_n = 0 \quad (30)$$

$$T_n(ka_2) \cdot F_n + R_n(ka_2) \cdot D_n = 0 \quad (31)$$

然后是域  $\Omega$  与域  $D$  之间的公共边界  $\bar{L}$  上的位移和应力连续条件

$$u^{(c)}(r, \theta) + u^{(s)}(r, \theta) = u^{(f)}(r, \theta) + u^{(d)}(r, \theta) \quad (r, \theta) \in \bar{L} \quad (32)$$

$$\sigma_{rz}^{(c)}(r, \theta) + \sigma_{rz}^{(s)}(r, \theta) = \sigma_{rz}^{(f)}(r, \theta) + \sigma_{rz}^{(d)}(r, \theta) \quad (r, \theta) \in \bar{L} \quad (33)$$

以及边界  $L$  上的零应力边界条件

$$\sigma_{rz}^{(c)}(r, \theta) + \sigma_{rz}^{(s)}(r, \theta) = 0 \quad (r, \theta) \in L \quad (34)$$

为在  $L$  和  $\bar{L}$  组成的圆形边界上同时满足边界条件, 引入下列辅助函数:

$$\Phi(\theta) = \begin{cases} \sigma_{rz}^{(c)}(a_1, \theta) + \sigma_{rz}^{(s)}(a_1, \theta) & -\varphi + 2k\pi \leq \theta \leq \varphi + 2k\pi \\ \sigma_{rz}^{(c)}(a_1, \theta) + \sigma_{rz}^{(s)}(a_1, \theta) - \sigma_{rz}^{(f)}(a_1, \theta) - \sigma_{rz}^{(d)}(a_1, \theta) & \text{其它} \end{cases} \quad (35)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

$$\Psi(\theta) = \begin{cases} 0, & -\varphi + 2k\pi \leq \theta \leq \varphi + 2k\pi \\ u^{(c)}(a_1, \theta) + u^{(s)}(a_1, \theta) - u^{(f)}(a_1, \theta) - u^{(d)}(a_1, \theta) & \text{其它} \end{cases} \quad (36)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

则

$$\Phi(\theta) = 0 \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \quad (37)$$

与应力连续条件式(33)及零应力边界条件式(34)等价, 而

$$\Psi(\theta) = 0 \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \quad (38)$$

与位移连续条件式(32)等价. 将  $\Phi(\theta)$ ,  $\Psi(\theta)$  在  $[-\pi, \pi]$  上分别做 Fourier 级数展开, 并取系数为零, 则边界条件式(32)、(33)和(34)同时满足. 由 Fourier 级数系数为零的条件可得出下列 4 组方程:

$$R_l(ka_1) \cdot C_l + T_l(ka_1) \cdot E_l = \sum_{n=0}^{\infty} [R_n(ka_1) \cdot A_{o,n} + T_n(ka_1) \cdot A_n^*] \cdot \lambda_{ln} \quad (39)$$

$$R_l(ka_1) \cdot D_l + T_l(ka_1) \cdot F_l = \sum_{n=0}^{\infty} [R_n(ka_1) \cdot B_{o,n} + T_n(ka_1) \cdot B_n^*] \cdot \mu_{ln} \quad (40)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [J_n(ka_1) \cdot C_n + H_n^{(1)}(ka_1) \cdot E_n] \cdot \lambda_{ln} = \sum_{n=0}^{\infty} [J_n(ka_1) \cdot A_{o,n} + H_n^{(1)}(ka_1) \cdot A_n^*] \cdot \lambda_{ln} \quad (41)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [J_n(ka_1) \cdot D_n + H_n^{(1)}(ka_1) \cdot F_n] \cdot \mu_{ln} = \sum_{n=0}^{\infty} [J_n(ka_1) \cdot B_{o,n} + H_n^{(1)}(ka_1) \cdot B_n^*] \cdot \mu_{ln} \quad (42)$$

$$(l = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

其中

$$\lambda_{ln} = \begin{cases} \frac{\pi - \varphi}{\pi} & n = l = 0 \\ \frac{1}{\pi} \cdot \left( \pi - \varphi - \frac{\sin 2l\varphi}{2l} \right) & n = l \neq 0 \\ -\frac{\varepsilon_l}{2\pi} \cdot \frac{\sin(n+l)\varphi}{n+l} - \frac{\varepsilon_l}{2\pi} \cdot \frac{\sin(n-l)\varphi}{n-l} & n \neq l \end{cases} \quad (43)$$

$$\mu_{ln} = \begin{cases} 0 & n = l = 0 \\ \frac{1}{\pi} \cdot \left( \pi - \varphi + \frac{\sin 2l\varphi}{2l} \right) & n = l \neq 0 \\ \frac{\varepsilon_l}{2\pi} \cdot \frac{\sin(n+1)\varphi}{n+l} - \frac{\varepsilon_l}{2\pi} \cdot \frac{\sin(n-1)\varphi}{n-l} & n \neq l \end{cases} \quad (44)$$

经过消元后, 可得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} CAA_{ln} \cdot A_n = RRA_l \quad (l = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (45)$$

其中

$$CAA_{ln} = (-1)^n \cdot \delta_n^{(1)} \cdot \left( \sum_{m=0}^{\infty} RLA_{lm} U_{nm} \right) \quad (46)$$

$$RRA_l = \sum_{n=0}^{\infty} [J_n(ka_1) \cdot \lambda_{ln} \cdot A_{o,n}] - RTA1_l \quad (47)$$

且

$$RLA_{lm} = RTA2_{lm} - H_m^{(1)}(ka_1) \cdot \lambda_{lm} \quad (48)$$

$$RTC1_l = R_l(ka_1) - \frac{T_l(ka_1)}{T_l(ka_2)} \cdot R_l(ka_2) \quad (49)$$

$$RTC2_n = J_n(ka_1) - \frac{R_n(ka_2)}{T_n(ka_2)} \cdot H_n^{(1)}(ka_1) \quad (50)$$

$$RTA1_l = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{RTC2_n}{RTC1_n} \cdot \left[ \sum_{m=0}^{\infty} R_m(ka_1) \cdot \lambda_{nm} \cdot A_{0,m} \right] \cdot \lambda_{ln} \quad (51)$$

$$RTA2_{lm} = T_m(ka_1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{RTC2_n}{RTC1_n} \cdot \lambda_{ln} \cdot \lambda_{nm} \quad (52)$$

以及

$$\sum_{n=0}^{\infty} CAB_{ln} \cdot B_n = RRB_l \quad (l = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (53)$$

其中

$$CAB_{ln} = (-1)^{n+1} \cdot \delta_n^{(2)} \cdot \left( \sum_{m=0}^{\infty} RLB_{lm} \cdot V_{nm} \right) \quad (54)$$

$$RRB_l = \sum_{n=0}^{\infty} [J_n(ka_1) \cdot \mu_{ln} \cdot B_{0,n}] - RTB1_l \quad (55)$$

且

$$RLB_{lm} = RTB2_{lm} - H_m^{(1)}(ka_1) \cdot \mu_{lm} \quad (56)$$

$$RTD1_l = R_l(ka_1) - \frac{T_l(ka_1)}{T_l(ka_2)} \cdot R_l(ka_2) = RTC1_l \quad (57)$$

$$RTD2_n = J_n(ka_1) - \frac{R_n(ka_2)}{T_n(ka_2)} \cdot H_n^{(1)}(ka_1) = RTC2_l \quad (58)$$

$$RTB1_l = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{RTD2_n}{RTD1_l} \cdot \left[ \sum_{m=0}^{\infty} R_m(ka_1) \cdot \mu_{nm} \cdot B_{0,m} \right] \cdot \mu_{ln} \quad (59)$$

$$RTB2_{lm} = T_m(ka_1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{RTD2_n}{RTD1_l} \cdot \mu_{ln} \cdot \mu_{nm} \quad (60)$$

由方程(45)和(53)两式可见, 问题归结于关于  $A_n$  或  $B_n$  的两个线性代数方程组的求解. 解得  $A_n$  ( $n=0, 1, 2, 3, \dots$ ) 后, 代入其它方程可得  $A_n^*$ ,  $C_n$  和  $E_n$  (其中  $n=0, 1, 2, 3, \dots$ ). 解得  $B_n$  ( $n=0, 1, 2, 3, \dots$ ) 后, 代入其余方程可得未知量  $B_n^*$ ,  $D_n$  及  $F_n$  (其中  $n=0, 1, 2, 3, \dots$ ).

## 2 精度分析及结果讨论

定义下列无量纲参数: 圆弧形凸起自由边界  $L$  上的无量纲应力残量

$$t_b = \frac{|\sigma_{rz}^{(c)}(r, \theta) + \sigma_{rz}^{(s)}(r, \theta)|}{\sigma_0} \quad (r, \theta) \in L \quad (61)$$

$\Omega$  和  $D$  域交界面  $\bar{L}$  上的无量纲位移残量和应力残量

$$u_b = \frac{|u^{(c)}(r, \theta) + u^{(s)}(r, \theta) - u^{(f)}(r, \theta) - u^{(d)}(r, \theta)|}{u_0} \quad (r, \theta) \in \bar{L} \quad (62)$$

$$t_b = \frac{|\sigma_{rz}^{(c)}(r, \theta) + \sigma_{rz}^{(s)}(r, \theta) - \sigma_{rz}^{(f)}(r, \theta) - \sigma_{rz}^{(d)}(r, \theta)|}{\sigma_0} \quad (r, \theta) \in \bar{L} \quad (63)$$

和圆形隧洞内壁  $L_2$  上的无量纲应力残量

$$t_b = \frac{|\sigma_{rz}^{(c)}(r_2, \theta_2) + \sigma_{rz}^{(s)}(r_2, \theta_2)|}{\sigma_0} \quad (r, \theta) \in L_2 \quad (64)$$

因水平自由地表的应力已严格满足等于零,在此不再讨论.

此外,引入无量纲频率  $\eta$ ,它定义为隧洞直径  $2a_2$  与入射波波长  $\lambda$  之比,即

$$\eta = \frac{2 \cdot a_2}{\lambda} \quad (65)$$

这样,问题可由无量纲频率  $\eta$ 、凸起地形高宽比  $h/b$ 、隧洞半径  $a_2$  和波的入射角  $\alpha$  来确定.另外,为了与无隧洞的凸起地形的结果进行比较,定义无量纲频率

$$\eta' = \frac{2 \cdot b}{\lambda} \quad (66)$$

即地形的特征长度取凸起地形的半宽  $b$ .

## 2.1 求解精度分析

为验证计算结果与问题真解的逼近程度,图3~5给出了在浅圆弧凸起地形高度  $h$  为 5.0, 凸起圆弧半径  $a_1=10.0$ , 隧洞半径  $a_2=4.0$ , 入射角度  $\alpha=45^\circ$ ,  $\eta$  分别等于 0.25, 1.0

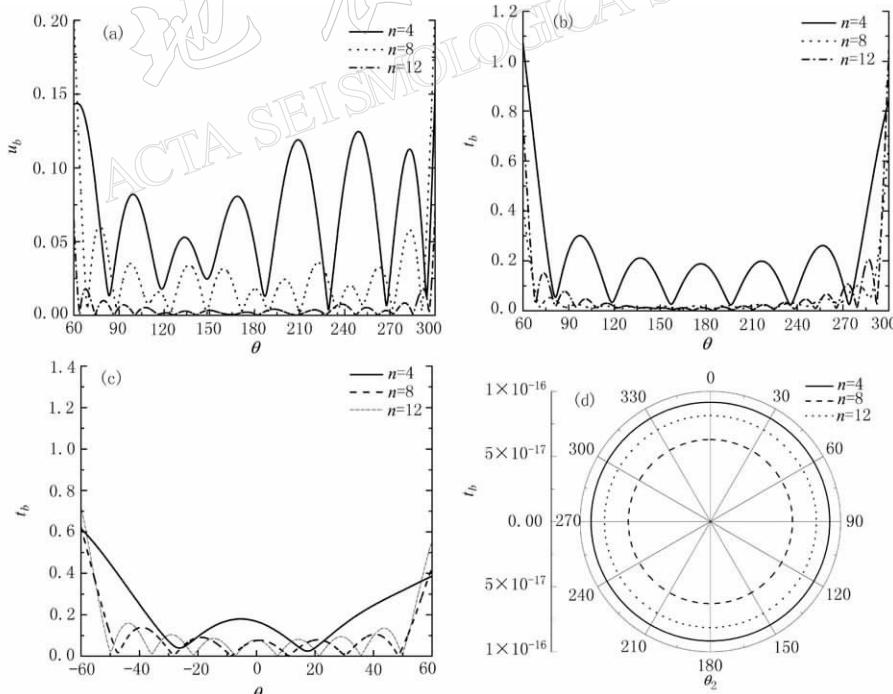


图 3  $\eta=0.25$  时各条边界上位移及应力残量

(a) 交界面  $\bar{L}$  上的位移残量; (b) 交界面  $\bar{L}$  上的应力残量;

L 上的应力残量; (d) 隧洞内壁边界  $L_2$  上的应力残量

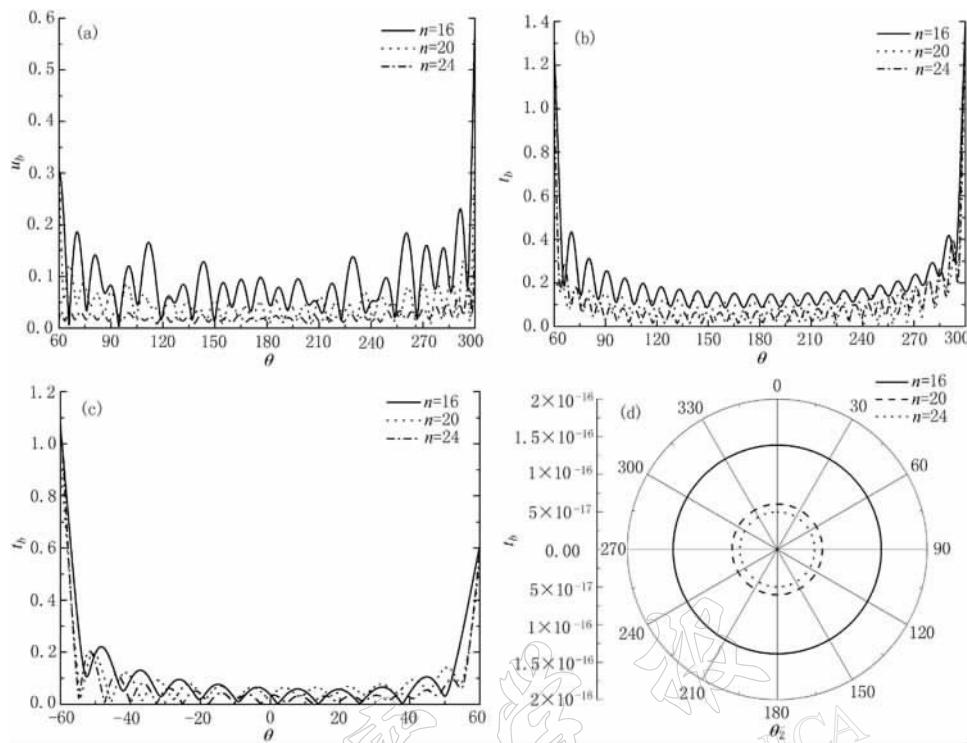


图 4  $\eta = 1.0$  时各条边界上的位移及应力残量  
 (a) 交界面  $\bar{L}$  上的位移残量; (b) 交界面  $\bar{L}$  上的应力残量; (c) 凸起地形边界  $L$  上的应力残量; (d) 隧洞内壁边界  $L_2$  上的应力残量

和 2.0 情况下各边界上的位移残量和应力残量. 可以看出, 随着截取项数的增加, 位移残量和应力残量逐渐趋于零. 可见只要截取项数适当大, 级数解就可以逼近真解. 一般来讲, 随着入射波频率的提高, 要达到足够的精度, 所需的截取项数也要更多. 图 6 给出了相应于图 3~5 收敛项数时的地表位移及隧洞环向应力幅值结果.

从图中可以发现, 角点处的应力残量随着项数的增大始终保持很高的值. 原因在于凸起地形的角点从模型上讲是一个应力奇异点; 另外, 辅助函数在角点处不连续, 对其作 Fourier 展开点在角点处出现 Gibbs 现象. 但由图 3~5 可以看出, 在整个辅助函数边界上, 通过 Fourier 展开使各种残量在平均意义上收敛至零. 角点处的误差只是局部的.

由图 6 可见, 随着入射波频率的提高, 地表位移和隧洞环向应力幅值更趋复杂. 由于论文篇幅限制, 下面仅针对半圆形凸起地形下的同心隧洞进行分析.

## 2.2 半圆凸起地形中隧洞对凸起地形表面位移的影响

首先定义自由地表上的无量纲位移幅值

$$|u| = \frac{1}{u_0} \cdot \{[\operatorname{Re}(u)]^2 + [\operatorname{Im}(u)]^2\}^{1/2} \quad (r, \theta) \in \Gamma + L \quad (67)$$

和隧洞内壁上的环向应力幅值, 或称动应力集中系数

$$|\sigma| = \frac{|\sigma_{\theta z}|}{\sigma_0} = \frac{|\sigma_{\theta z}^{(c)}(r, \theta) + \sigma_{\theta z}^{(s)}(r, \theta)|}{\sigma_0} \quad (r, \theta) \in L_2 \quad (68)$$

其中, 式(67)中的  $\operatorname{Re}(u)$  和  $\operatorname{Im}(u)$  分别表示地表位移场  $u$  的实部和虚部.

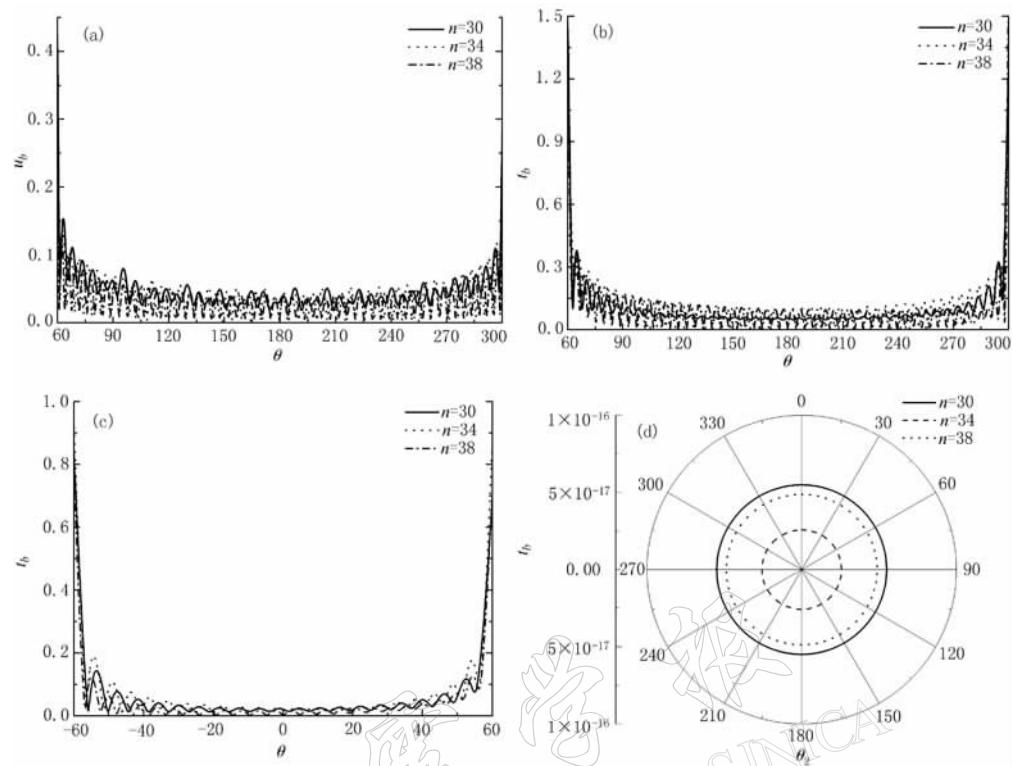


图 5  $\eta=2.0$  时各条边界上的位移及应力残量  
 (a) 交界面  $\bar{L}$  上的位移残量; (b) 交界面  $\bar{L}$  上的应力残量; (c) 凸起地形边界  $L$  上的应力残量; (d) 隧洞内壁边界  $L_2$  上的应力残量

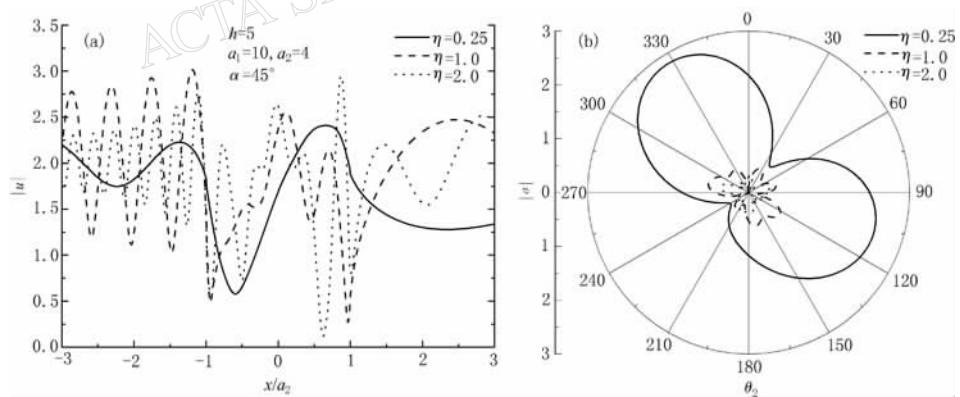


图 6  $\eta=0.25, 1.0$  和  $2.0$  时地表位移及环向应力幅值结果  
 (a) 地表位移; (b) 隧洞环向应力幅值

图 7 所示是在半圆凸起地形,  $a_2/a_1=0.4$ , 波在 4 个不同入射角度下凸起地形顶点处位移幅值谱与无隧洞情况下该点位移幅值谱(袁晓铭, 廖振鹏, 1996)的比较图. 由图可见, 由于圆形隧洞的存在, 半圆凸起地形顶点处的位移幅值, 普遍比无隧洞的相同凸起地形下顶点处的位移幅值要高, 并且在  $\eta' \cong 0.3$  和  $1.8$  时均有两个幅值极值点. 可以看到, 在这

两个频率时, 有、无隧洞对凸起地形顶点位移幅值影响的差别是非常大的.

图 8~10 给出了  $\eta'$  分别取 0.25, 1.0 和 2.0 时, 半圆凸起地形  $a_2/a_1=0.4$ , 入射角度

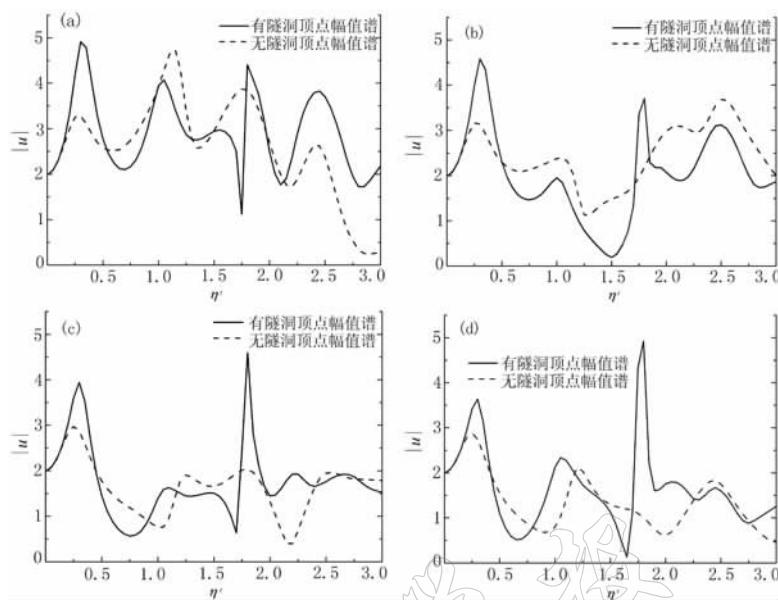


图 7 半圆凸起地形下有、无隧洞时山顶处地表位移幅值谱的比较

(a)  $\alpha=90^\circ$ ; (b)  $\alpha=60^\circ$ ; (c)  $\alpha=30^\circ$ ; (d)  $\alpha=0^\circ$

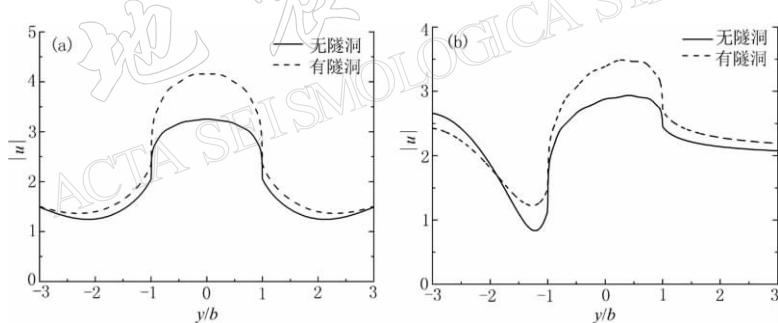


图 8 半圆凸起地形下有、无隧洞时地表位移的比较 ( $\eta'=0.25$ )

(a)  $\alpha=90^\circ$ ; (b)  $\alpha=0^\circ$

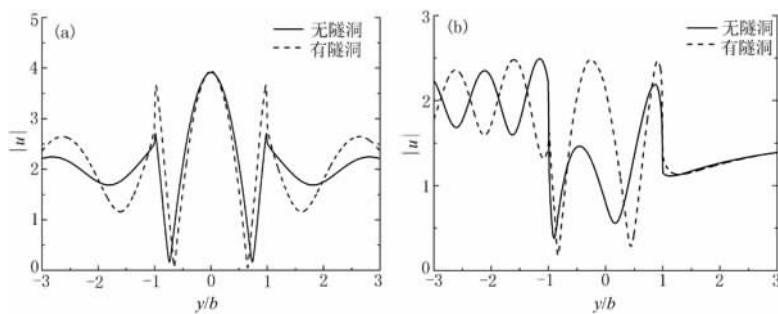
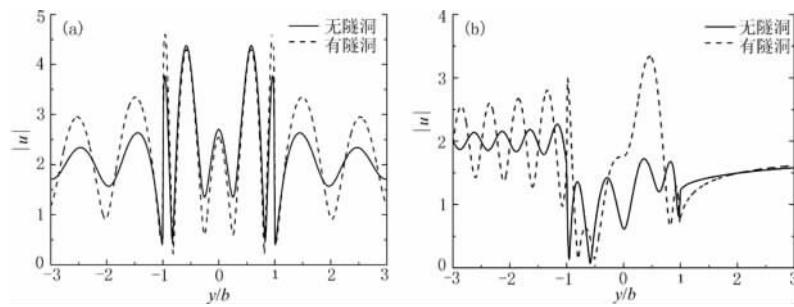
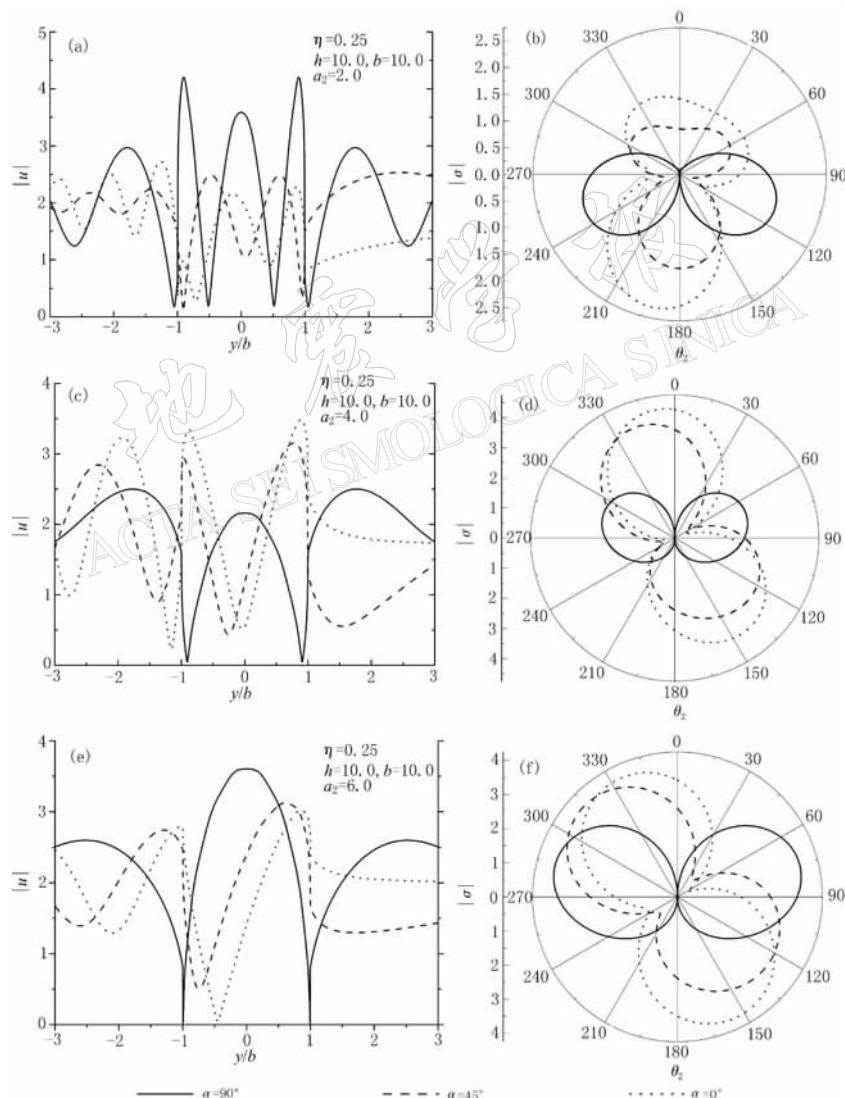


图 9 半圆凸起地形下有、无隧洞时地表位移的比较 ( $\eta'=1.0$ )

(a)  $\alpha=90^\circ$ ; (b)  $\alpha=0^\circ$

图 10 半圆凸起地形下有、无隧洞时地表位移的比较( $\eta' = 2.0$ )(a)  $\alpha = 90^\circ$ ; (b)  $\alpha = 0^\circ$ 图 11  $\eta = 0.25$  时半圆凸起地形下隧洞大小的影响(a)、(c)、(e)分别为  $a_2 = 2, 4, 6$  时的地表位移; (b)、(d)、(f)分别为  $a_2 = 2, 4, 6$  时的隧洞环向应力幅值

分别为90°(垂直入射)和0°(掠入射)两种情况下,凸起地形表面位移幅值随空间分布结果。从图中可以看出,除凸起地形顶点外,有、无隧洞时凸起地形附近地表其它各点的反应也具有显著差别。一般情况下,隧洞的存在对凸起地形表面位移具有放大作用,该放大作用随入射频率的不同而不同;在一定情况下,该放大作用可以达到二倍以上(图10b)。

### 2.3 隧洞大小对地表位移和隧洞动应力集中的影响

下面分析隧洞大小对地表位移和隧洞动应力的影响。计算参数为:无量纲频率 $\eta=0.25, 1.0$ 和 $2.0$ ;半圆凸起地形( $a_1=10$ );隧洞半径( $a_2$ )分别取 $2, 4, 6$ ;波的入射角度分为 $90^\circ, 45^\circ$ 和 $0^\circ$ 3种情况。

从图11~13可以看出,随着隧洞半径的增大,凸起地形表面位移变化由复杂逐渐变得

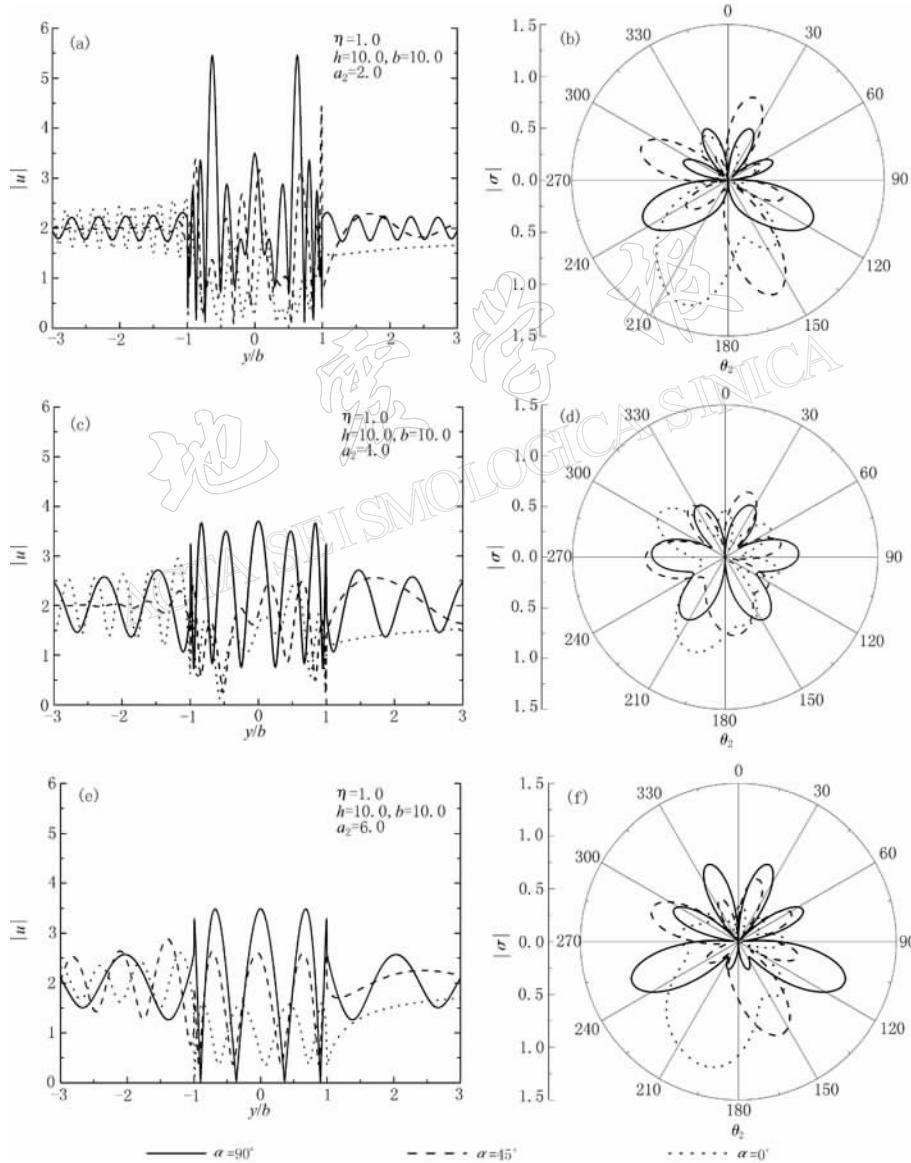
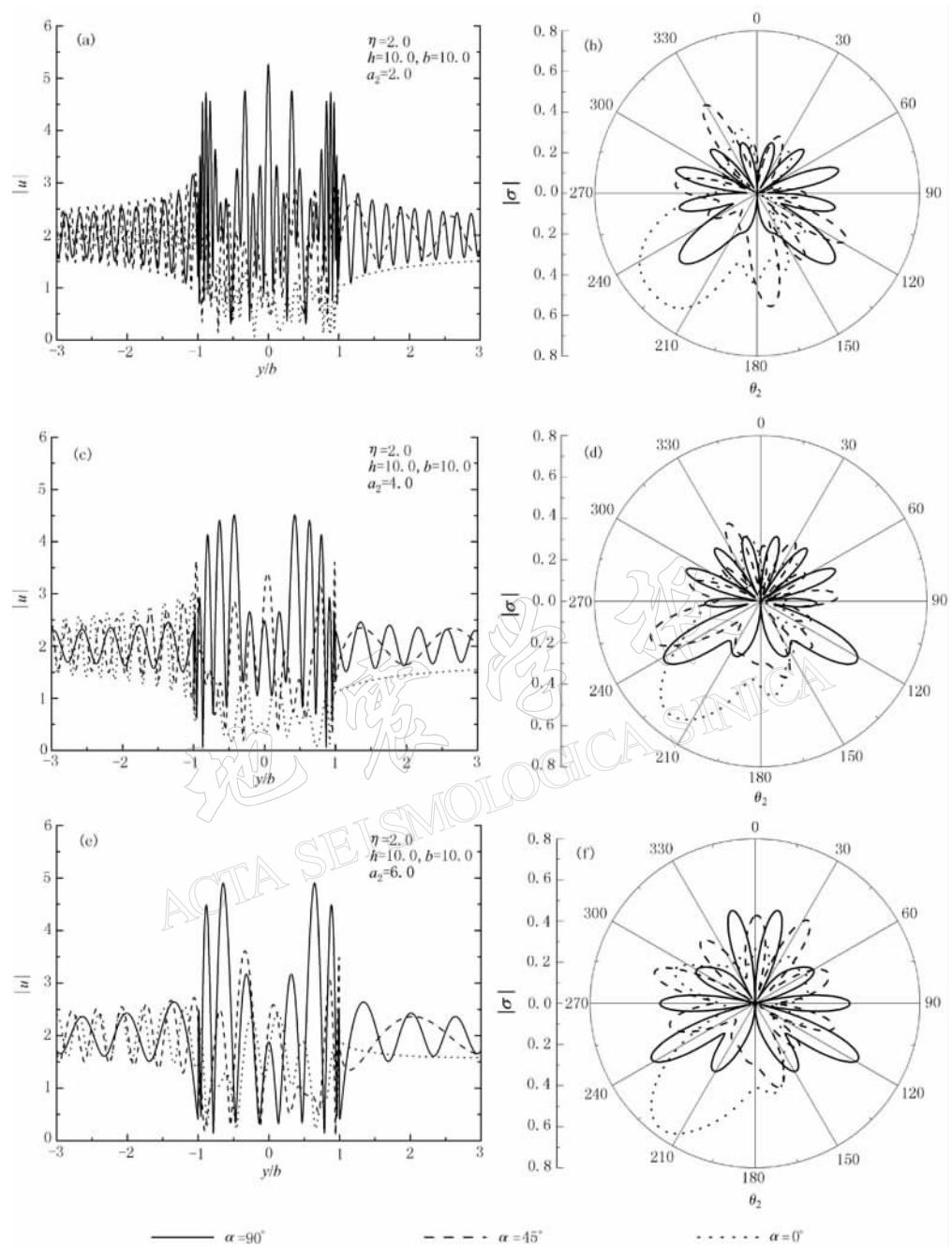


图12  $\eta=1.0$ 时半圆凸起地形下隧洞大小的影响

(a)、(c)、(e)分别为 $a_2=2, 4, 6$ 时的地表位移;(b)、(d)、(f)分别为 $a_2=2, 4, 6$ 时的隧洞环向应力幅值

图 13  $\eta=2.0$  时半圆凸起地形下隧洞大小的影响

(a)、(c)、(e) 分别为  $a_2=2, 4, 6$  时的地表位移; (b)、(d)、(f) 分别为  $a_2=2, 4, 6$  时的隧洞环向应力幅值

简单, 位移幅值总体上呈现降低趋势, 隧洞表现为一种屏障作用; 随着隧洞半径的增大, 隧洞环向应力呈增大趋势。还可以发现, 入射频率较低情况下, 隧洞环向应力较高; 而随着入射频率的增加, 隧洞环向应力逐渐减小。另外, 在波斜入射或掠入射情况下, 在凸起地形左侧部分的地表位移, 明显比凸起地形右侧的变化要剧烈; 在波垂直入射情况下, 一

般在凸起地形角点附近有一个地表位移极小的区域, 这与无隧洞凸起地形的结论(袁晓铭, 廖振鹏, 1996)是一致的.

### 3 结论

本研究借助于辅助函数的思想, 利用波函数展开法, 给出了圆弧形凸起地形中隧洞对平面 SH 波影响问题的一个解析解, 并首次将文献中的无量纲入射频率(凸起地形宽度与入射波长之比)由 3 拓展到了 10, 得到了凸起地形对于超高频入射波的解答, 为时域地震响应的计算奠定了重要基础。计算结果表明, 凸起地形中隧洞的存在以及隧洞的大小, 对凸起地形表面位移和隧洞动应力集中具有显著影响。一般情况下, 隧洞的存在对凸起地形表面位移具有放大作用, 该放大作用可以达到无隧洞情况的二倍以上; 随着隧洞半径的增大, 凸起地形表面位移变化由复杂逐渐变得简单, 位移幅值总体上呈现降低趋势, 隧洞表现为一种屏障作用, 而隧洞环向应力却随着隧洞半径的增大呈增大趋势。

### 参 考 文 献

- 袁晓铭, 廖振鹏. 1996. 任意圆弧形凸起地形对平面 SH 波的散射[J]. 地震工程与工程振动, **16**(2): 1~13
- Abramowitz M, Stegun I A. 1972. *Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* [M]. New York: Dover Publication, 355~389
- Lee V W, Trifunac M D. 1979. Response of tunnels to incident SH-waves[J]. *Jour Engin Mech, ASCE*, **105**(4): 643~659
- Pao Y H, Mow C C. 1973. *Diffraction of Elastic Waves and Dynamics Stress Concentrations* [M]. New York: Crane, Russak & Company Inc, 131~140

## SCATTERING OF PLANE SH WAVES BY A CIRCULAR-ARC HILL WITH A CIRCULAR TUNNEL

Liang Jianwen<sup>1)</sup>    Luo Hao<sup>1)</sup>    Vincent W. Lee<sup>2)</sup>

1) Department of Civil Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China

2) Department of Civil Engineering, University of Southern California, Los Angeles, CA 90089-2531, U. S. A.

**Abstract:** An analytical solution of scattering of incident SH waves by a circular-arc hill with a concentric circular tunnel was derived by Fourier-Bessel series expansion and auxiliary functions technique. The solution is reduced to solving a set of infinite linear algebraic equations finally. The accuracies of the numerical results are checked by the residual errors of boundary conditions with the truncation order increasing. The numerical results show that the existence and dimension of the tunnel have great effect on motion of the ground surface nearby and dynamic stress concentration of the tunnel.

**Key words:** hill; tunnel; scattering; plane SH waves; analytical solution