第 18 卷　第 4 期　　　　　　　地　震　学　报　　　　　　　Vol. 18, No. 4
1996 年 11 月　(475～479)　　ACTA SEISMOLOGICA SINICA　　　Nov., 1996

重力异常的拟合推估迭代解算模型及算法*

杨元喜　　刘长建

（中国郑州 450052 解放军测绘学院）

摘要　重力异常随机逼近的一种有效方法是拟合推估法. 为了提高拟合推估解的可靠性，关键是提高重力异常协方差函数的可靠性. 本文建立了一套迭代拟合协方差函数以及迭代推估重力异常的理论模型. 经实际计算表明，通过有限的迭代拟合推估，确实能提高重力异常的推估精度.

主题词　重力异常　拟合　协方差　迭代解　随机逼近

引言

异常重力场逼近的方法主要可分为两大类：一类为函数逼近；一类为随机逼近. 在函数逼近法中又分线性逼近和非线性逼近. 由于线性逼近计算简单，故在地球重力场中有较成熟的理论，并有广泛的应用. 近年来，函数逼近的非线性理论和方法越来越引起人们的重视. Hormander 用复杂的反函数法研究了非线性 Molodensky 问题(Moritz，1980)；Sanso(1977)利用重力空间法，将自由边界问题变换成固定边界问题，将非线性 Molodensky 问题表示成线性形式，而不是舍去高次项后的线性近似式. 于锦海、党诵诗(1992)利用级数展开法重新研究了非线性 Molodensky 问题，并详细讨论了解算方法. 但是非线性重力场逼近的解算相当复杂，迄今仍无成功的算例.

对于局部重力场逼近，各类边界的混合联解可为非线性边界的实际解算创造条件. 因为在混合超定边界条件中，观测量一般远大于未知量(点位几何参数和扰动位及其泛函). 由各类观测量与点位几何参数及重力场参数构成的非线性观测模型，经泰勒级数展开容易表成高阶级数的形式，依据一定的解算原则(如最小二乘原则)以及相应的迭代解算方法能够在局部区域实施非线性重力场逼近(杨元喜，1994).

对于重力场的随机逼近，一般均基于最小二乘推估，而拟合推估常基于线性观测模型及协方差函数. 这类逼近计算简单，但解算精度受制于协方差函数. 为了提高重力场随机逼近的精度，本文试图构造高阶随机逼近的解算程式，首先提高协方差函数精度，从而提高重力异常拟合推估精度.

*　中国科学院青年基金资助项目.
1995-03-25 收到初稿，1995-09-11 收到修改稿并决定采用.

1 拟合推估解算模型及误差影响

这里将重力场视为随机场，各重力边值问题的观测方程式可表示为(Moritz，1980)

$$L_i = t_i + \Delta_i \tag{1}$$

式中，观测值 L_i 可分解成“信号”和“噪声”(误差). L_i 的“信号”部分表示引力场元素 L_iT，L_i是 L_iT 的观测值. 将式(1)表示为矩阵形式有

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{t} + \boldsymbol{\Delta} \tag{2}$$

误差方程为

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{t} - \boldsymbol{L} \tag{3}$$

设 $\boldsymbol{t}$，$\boldsymbol{\Delta}$ 的数学期望分别为

$$E(\boldsymbol{t}) = 0 \qquad E(\boldsymbol{\Delta}) = 0 \tag{4}$$

方差，协方差阵分别为

$$\Sigma_{tt} = E(\boldsymbol{tt}^T) = \Sigma_t$$

$$\Sigma_{\Delta\Delta} = E(\boldsymbol{\Delta\Delta}^T) = \Sigma_\Delta,\ \boldsymbol{\Sigma}_{t\Delta} = 0 \tag{5}$$

基于最小二乘原则

$$\boldsymbol{V}^T\Sigma_\Delta^{-1}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{t}^T\Sigma_t^{-1}\boldsymbol{t} - 2\boldsymbol{K}^T(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{V}) = \min \tag{6}$$

可得

$$\hat{\boldsymbol{t}} = \Sigma_t(\Sigma_t + \Sigma_\Delta)^{-1}\boldsymbol{L} \tag{7}$$

若有未测点信号 $\boldsymbol{s}$，且

$$E(\boldsymbol{s}) = 0,\ \Sigma_s = E(\boldsymbol{ss}^T),\ \Sigma_{st} = E(\boldsymbol{st}^{\mathrm{T}}) \tag{8}$$

则有

$$\hat{\boldsymbol{s}} = \Sigma_{st}(\Sigma_t + \Sigma_\Delta)^{-1}\boldsymbol{L} \tag{9}$$

若将观测方程表示为

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{Bt} - \boldsymbol{L} \tag{10}$$

式中，$\boldsymbol{X}$ 为确定性未知参数向量，式(10)称为带未知参数的拟合推估模型. $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{t}$ 的最小二乘解为

$$\hat{\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{A}^T\Sigma_L^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\Sigma_L\boldsymbol{L} \tag{11}$$

$$\hat{\boldsymbol{t}} = \Sigma_t\Sigma_L^{-1}(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}) \tag{12}$$

式中，$\Sigma_L = \Sigma_t + \Sigma_\Delta$.

拟合推估解式(7)、(9)及(11)、(12)的解算精度取决于下列因素：

(1) 观测精度. 若观测噪声小，且服从正态分布，则 Σ_Δ 的主对角线元素小，参数拟合或推估的精度高.

(2) 信号协方差矩阵 Σ_t 的可靠性. Σ_t 一般由重力场观测信息拟合，若观测值扰动大，则拟合得到的 Σ_t 也不可靠.

(3) 函数模型的精度. 函数模型的精度一般取决于参考重力场与实际重力场的偏离程度. 就一般线性函数模型而言，参考重力场应尽量接近其实际重力场，以保证舍去高次项后的线性重力场观测模型有足够的精度. 非线性函数模型虽然允许参考重力场与实际重力场有一定差异，但这种差异不宜过大，否则经泰勒级数展开的项将随差异的增大而增加，

从而加大计算工作量.

2 协方差迭代逼近解

为了提高协方差函数的可靠性，可对协方差函数进行高阶逼近，从而拟合推估解式也采用类似的逼近解. 一般情况下，重力场观测的第一手资料大多为重力异常，且重力异常也确能充分反映重力场的相关信息.

取重力异常协方差函数为(Moritz，1980)

$$C(\Delta g_i, \Delta g_j) = \frac{C_0 b^2 (Z^* + b)}{[S^2 + (Z^* + b)^2]^{3/2}} \tag{13}$$

式中，$Z^* = Z_i + Z_j$，为 i，j 点高程之和；C_0，b 为待估常量；S 为 i，j 两点间的水平距离. 式(13)为正定调和函数.

为了求解式(13)中的待定常数，可先令 $S=0$，得到 $C(\Delta g_i, \Delta g_j) = C_0$，即 C_0 为平面近似下的重力异常方差.

在局部地区，可将区域间距分成若干小区域，读取各小区域重力异常 Δg_{ij}，令

$$\overline{\Delta g} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Delta g_{ij} \tag{14}$$

$$\overline{\Delta g}_{ij} = \Delta g_{ij} - \overline{\Delta g} \tag{15}$$

则

$$C_0 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{\Delta g}_{ij}^2 \tag{16}$$

为求常量 b，分别在 $S=S_0$(定值)距离上求 $C(S_0)$

$$C(S_0) = \frac{1}{2n(n-k)} \left[\sum_{i=1}^{n-k} \sum_{j=1}^{n} \overline{\Delta g}_{ij} \overline{\Delta g}_{i+k,\, j} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-k} \overline{\Delta g}_{ij} \overline{\Delta g}_{i,\, j+k} \right] \tag{17}$$

选定一个 S_0 即可得到一个 $C(S_0)$，设有 m 个 $C(S_0)$，则可组成

$$C(S_0) = \frac{C_0 b^3}{(S_{0k}^2 + b^2)^{3/2}} = C_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, m) \tag{18}$$

由式(18)可求得 b 值

$$b_k = \left[\frac{S_{0k}}{(C_0 / C_k)^{2/3} - 1} \right]^{1/2} \tag{19}$$

$$\bar{b} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} b_k \tag{20}$$

由式(16)、(20)确定的重力异常协方差函数的可靠性受重力异常 Δg_{ij} 的影响，而重力异常 Δg_{ij} 的精度又取决于实际重力观测值 g_{ij} 的精度. 如果已经由拟合推估求得重力异常 Δg_{ij} 的第 K 步残差 Vg_{ij}^K，则 Δg_{ij} 及 C_0，$\bar{b}$ 可作如下更新

$$\Delta g_{ij}^K = \Delta g_{ij} + Vg_{ij}^K \tag{21}$$

$$\overline{\Delta g}^K = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Delta g_{ij}^K \tag{22}$$

$$\overline{\Delta g}_{ij}^K = \Delta g_{ij}^K - \overline{\Delta g}^K \tag{23}$$

$$C_0^K = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\overline{\Delta g}_{ij}^K)^2 \tag{24}$$

而 $C(S_0)$ 变为 $C^K(S_0)$，$\bar{b}$ 变为 $\bar{b}^K$，相应的协方差矩阵 $\boldsymbol{C}$ 变为 $\boldsymbol{C}^K$

$$\boldsymbol{C}^K(\Delta g_i, \Delta g_j) = \frac{C_0^K(\bar{b}^K)^2(Z^* + \bar{b}^K)}{[S^2 + (Z^* + \bar{b}^K)^2]^{3/2}} \tag{25}$$

3 拟合推估的高阶迭代解

由 $\boldsymbol{C}^K(\Delta g_i, \Delta g_j)$ 经协方差传播定律可求得

$$\boldsymbol{\Sigma}_L^K = \boldsymbol{\Sigma}_t^K + \boldsymbol{\Sigma}_\Delta \tag{26}$$

相应式(7)的迭代解为

$$\hat{\boldsymbol{t}}^K = \boldsymbol{\Sigma}_L^K(\boldsymbol{\Sigma}_t^K + \boldsymbol{\Sigma}_\Delta)^{-1}\boldsymbol{L} \tag{27}$$

式(9)的迭代解为

$$\hat{\boldsymbol{s}}^K = \boldsymbol{\Sigma}_{st}^K(\boldsymbol{\Sigma}_t^K + \boldsymbol{\Sigma}_\Delta)^{-1}\boldsymbol{L} \tag{28}$$

带参数的拟合推估迭代解为

$$\hat{\boldsymbol{X}}^K = [\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{\Sigma}_L^K)^{-1}\boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{\Sigma}_L^K)^{-1}\boldsymbol{L} \tag{29}$$

$$\hat{\boldsymbol{t}}^K = \boldsymbol{\Sigma}_t^K(\boldsymbol{\Sigma}_L^K)^{-1}(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}^K) \tag{30}$$

4 算例分析

我们知道，重力异常的变化是由于地球表面附近的扰动物质引起的，而这种局部扰动物质的影响(如层间改正、均衡改正等)主要呈现为对高程的线性关系，因此，可用下面的线性模型来描述空间异常(蒋福珍，1981)

$$\Delta g_i = a + bh_i + \Delta_i \tag{31}$$

式中，Δg_i，h_i 为观测点的空间异常和高程；a，b 为待定参数. 用模型(31)按最小二乘原理可解出适于本地区的 a 和 b 值. 本算例采用了简单的算法，即由已知空间异常值加入层间改正后再推估未知点布格异常，然后反算其空间异常. 毫无疑问，前种方法计算结果要优于后者，但后者也能说明问题.

如前所述，对某地区 120 km×120 km 的重力场进行重力异常的高阶拟合推估解算，将该地区重力异常图等分为 144 个小块(10 km×10 km)，其中读取 134 个方块的重力异常 Δg_i，然后推估了另外 10 个方块的重力异常，并把直接解算结果与迭代解算结果进行了比较，如表 1 所示. 取观测值中误差为 $\pm 3.0\times10^{-5}$ m/s^2，解算结果误差中误差见表 2.

表 1 重力异常拟合推估解 单位：10^{-5} m/s^2

比较项目	推估块号									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
观测结果	−4.8	30.2	25.5	18.9	32.0	57.6	52.8	26.6	38.4	39.9
直接解	−4.3	32.2	24.0	17.6	32.0	62.7	51.4	31.9	38.1	40.1
迭代解	−4.8	32.2	23.9	17.3	32.1	63.0	52.0	32.0	38.4	40.3
C_0^K $(10^{-5}$ m/s$^2)^2$	37.035									
$\bar{b}^K$(km)	38.501									

表 2　直接解与迭代解误差中误差比较　　单位：$\pm 10^{-5}$ m/s^2

误差中误差	推估块号									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
直接解	2.4	2.4	2.4	2.4	2.4	2.8	2.5	2.4	2.5	2.7
迭代解	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1	2.5	2.2	2.1	2.2	2.4

从表中可以看出，迭代解精度要优于直接解. 值得一提的是，采用了本文给出的算法后，迭代能够很快收敛. 但存在疑问之处是迭代结果是否逼近正确解，这点可从(21)～(25)及(27)、(28)诸式看出. 由于迭代过程中自始至终采用原始观测值进行计算，故不存在迭代解的分岔；且通过逐次提高协方差函数的精度，从而达到收敛与提高拟合推估精度的目的.

5　结语

重力异常的迭代拟合推估解，实质上只部分地解决了初始协方差函数不可靠的问题. 它从提高协方差函数的可靠性入手，追求重力异常拟合推估的可靠性. 从计算结果的内部精度与外部可靠性看，迭代拟合推估解的确能部分地提高重力异常拟合值的精度. 但若要全面提高重力异常的拟合推估值的可靠性，还必须考虑函数模型的可靠性. 由于许多作者已对函数模型的可靠性和精度做了大量研究，故本文不再重复讨论.

陆仲连教授、黄维彬教授对完善本文给予了帮助，在此表示感谢.

参　考　文　献

于锦海，党诵诗，1992. 解非线性 Molodensky 问题的高阶逼近方法. 测绘学报，**21**(4)：249～258

杨元喜，1994. 非线性混合边值问题及其抗差解. 郑州测绘学院学报，**11**(4)：230～236

张赤军，刘燕平，1984. 局部地区扰动位协方差的一种形式. 测量与地球物理集刊，5：85～90

蒋福珍，1981. 我国 1°×1°平均空间重力异常的分析. 天文地球动力学专集. 北京：测绘出版社. 144～153

Moritz H，1980. *Advanced Physical Geodesy*. Herbert Winchmann Verlag，Karlsruhe，Abacus Press，Tunbridge Wells，Kent.

Sanso F，1977. The geodetic boundary value problem in gravity space. *Mem Accad Naz Lincei*，**14**(2)：39～97

Yang Y，1992. Robustifying collocation. *Manuscripta Geodaetica*，**17**(1)：21～28