

石颖, 刘洪. 2010. 最小加权范数插值与调制升频结合的地震数据重建研究. 地震学报, 32(3): 340-350.
Shi Ying, Liu Hong. 2010. Seismic data reconstruction by combining minimum weighted norm interpolation and band extension via modulation. *Acta Seismologica Sinica*, 32(3): 340-350.

最小加权范数插值与调制升频 结合的地震数据重建研究^{*}

石 颖^{1,2)} 刘 洪^{2),*}

1) 中国黑龙江大庆 163318 大庆石油学院地球科学学院

2) 中国北京 100029 中国科学院地质与地球物理研究所

摘要 提出一种新的反假频地震数据重建的两步算法, 将最小加权范数插值(MWNI)方法与调制升频方法有效地结合起来. 首先利用 MWNI 方法构建数据谱的低频部分, 为了提高计算效率, 在低频重建算法中, 引入了预条件共轭梯度法求解反问题方程, 并使用了与频率有关的变波数带宽技术; 然后, 基于重建的低频数据, 采用调制升频方法重构数据的高频部分. 调制升频方法灵活, 简便, 能有效地从低频资料中恢复出高频成分, 克服了以往 AR 模型预测高频走不远的限制, 当数据存在严重的空间假频时, 亦能获得较好的重建效果. 该两步算法不仅可用于规则地震数据的内插重建, 也可用于含空道地震数据的重建. 理论模型和实际地震数据重建试验表明, 该方法效率高, 精度高, 反假频能力强, 重建剖面波形连续、自然, 与正确完整的地震剖面相似程度高, 具有良好的实用价值和应用前景.

关键词 最小加权范数插值 调制升频 反假频 地震数据重建

doi:10.3969/j.issn.0253-3782.2010.03.009

中图分类号: P315.69

文献标识码: A

Seismic data reconstruction by combining minimum weighted norm interpolation and band extension via modulation

Shi Ying^{1,2)} Liu Hong^{2),*}

1) College of Earth Sciences, Daqing Petroleum Institute, Heilongjiang Daqing 163318, China

2) Institute of Geology and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China

Abstract: A new two-step algorithm to reconstruct non-alias seismic data is proposed. The algorithm combines minimum weighted norm interpolation (MWNI) and band extension via modulation method effectively. Firstly, we reconstruct the low frequency part of the data spectra using MWNI method. In order to improve calculation efficiency, pre-conditional conjugate gradient method was used during reconstruction and the varying wave number band width frequency

^{*} 基金项目 国家“863”高技术研究发展计划项目(2006AA09A102-08)、国家自然科学基金项目(40830424)、国家科技重大专项(2008ZX05023-05-02)和地下信息探测技术与仪器教育部重点实验室(中国地质大学, 北京)开放课题项目(GDL0903)共同资助.

收稿日期 2009-05-15 收到初稿, 2009-10-25 决定采用修改稿.

⁺ 通讯作者 e-mail: liuhong@mail.igcas.ac.cn

was adopted in the paper. Then, based on the reconstructed low frequency data, the high frequency part of the data spectra are reconstructed with the band extension via modulation method, which is convenient and flexible, overcoming the limit that the high frequency from AR model prediction can not go far. By using this method, it can get good reconstruction effect while obvious spatial alias exists. The applicability of the proposed method is examined using synthetic and field data examples. The two-step algorithm is used to reconstruct not only for regular seismic data interpolation, but also for irregular data gap filling. Theoretical model and actual seismic data reconstruction tests show that the proposed method has high efficiency and accuracy, and the waveforms of reconstructed data are continuous and natural. Reconstructed sections are similar to the correct or complete seismic sections. The proposed method also has strong de-aliasing ability. It is prospective in future application.

Key words: minimum weighted norm interpolation; band extension via modulation; de-aliasing; seismic data reconstruction

引言

地震数据采集时, 由于地表障碍物、禁区、海洋拖缆羽状漂移、坏道、仪器和采集孔径限制以及投资约束等诸多因素的影响, 难免出现采样间距过大或数据缺失的现象, 导致严重的假频, 从而不同程度地影响地震资料多道处理及成像效果. 目前, 地震数据重建已得到较为深入的研究, 发展了包括 Spitz(1991)、国九英等(1996)、Porsani(1999)、Gulunay(2003)等提出的反假频道内插方法在内的诸多类型插值方法(孟小红等, 2008), 以及诸多的含地震空道数据的重建方法(Duijindam *et al*, 1999; Hindriks, Duijindam, 2000; Liu, Sacchi, 2004; Wang, 2003; Zwartjes, Sacchi, 2007; Kabir, Verschuur, 1995; 王维红等, 2007). 也有学者曾提出过使用两步法进行数据重建, 但这些方法皆尚存有不足之处. Liu *et al* (2004) 以及刘喜武等(2004)将最小加权范数内插(MWNI)(Liu, Sacchi, 2001; Sacchi, Liu, 2005)与线性预测有效结合起来, 进行地震数据重建. 该方法通过带限约束重建低频功率谱, 继而再通过线性预测重建高频功率谱. Naghizadeh 和 Sacchi (2007) 结合傅里叶重构和预测误差方法重构不规则采样数据. 其利用傅里叶方法重构无假频的低频谱, 由重构的低频分量提取预测滤波器, 再用预测滤波器预测高频分量. 但近年来一直在研究的 AR 模型预测的反假频高频重建技术, 需较长的计算时间, 且高频走不远, 即 FK 域谱的幅值很难沿一定倾角向高频延伸.

本文提出了一种新的两步反假频地震数据重建的方法, 将 MWNI 方法与调制(曾锐等, 2007)升频方法有效地结合起来, 旨在对等间隔地震数据进行插值重建, 以及对缺失地震数据的规则化重建. 第一步采用 MWNI 方法对欲重建数据进行低频重建; 第二步基于重建的低频数据, 采用调制升频的方法重构数据高频部分. 在第一步中, 将不正确或不完整的数据作为重建算法的输入, 估计重建后数据的低频成分. 该算法在 f - x 域, 依次对每个频率分量沿空间方向进行重建. 由于波数谱具有带限特性, 本文采用波数带宽与频率成正比的变带宽技术来减小计算量, 并采用预条件共轭梯度法求解反演方程, 提高了 MWNI 方法的计算效率. 通过引入包含欲重建波场谱特征的正则化项, 获得了理想的重建效果. 调

制升频方法简单有效, 实用性强, 可以预测较远端高频分量. 该方法既可对规则地震数据进行反假频插值重建, 也可对缺失地震数据进行规则化重建, 突破了以往算法的局限性.

1 最小加权范数地震数据重建

傅里叶重建方法能高效完整地重建地震数据谱的低频部分. 为此, 我们采用基于傅里叶重建的 MWNI 方法恢复数据的低频部分, 即重建 $f \in [f_{\min}, f_{\max}]$ 频段上的完整数据, f_{\min} 和 f_{\max} 分别表示利用 MWNI 方法重建的最大及最小频率, 且 $f_{\max} \geq 0$.

地震数据的重建可以看成是由不正确或不完整数据恢复完整地震波场的反问题. 若假定 \mathbf{G} 为采样矩阵, 则下面的线性系统描述了欲重建数据 x 与观测数据 y 之间的关系.

$$y = \mathbf{G}x \tag{1}$$

若完整数据 $x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^T$ 为未知数, 观测数据 $y = [x_1, x_3, x_5]^T$ 为已知数, 则式(1)变为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \tag{2}$$

数据重建的目的是要由 y 恢复出 x .

采样矩阵 \mathbf{G} 具有如下性质:

$$\mathbf{G}\mathbf{G}^T = \mathbf{I} \tag{3}$$

由

$$\mathbf{G}^T y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \\ x_5 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

可知, \mathbf{G}^T 的作用是把缺失道填充零.

方程(1)所给出的重建反问题, 其观测数据的个数少于待重建数据的个数, 该问题没有唯一解, 且反问题通常是病态的. 因此, 常需采用正则化方法, 既可以获得稳定的唯一解, 还可以施加所期望的欲重构波场的谱特征. 本文引入了包含欲重建波场功率谱的先验信息, 该功率谱的加权范数正则化项限制了解的范围.

带限数据重建可归结为求解下面的约束最小化反问题. 最小化模型范数 $\|x\|_w^2$, 使其满足式(1), $\|\cdot\|_w$ 表示特定的加权范数, 本文选用下面的波数域正则化范数:

$$\|x\|_w^2 = \sum_{k \in \kappa} \frac{X_k^* X_k}{P_k^2} \tag{5}$$

式中, P_k^2 是与待建数据的支撑和形状相类似的频率域加权, P_k 表示波数 k 处的功率谱; X_k 为 x 的傅里叶变换系数.

引入对角矩阵

$$\Lambda_k = \begin{cases} P_k^2 & k \in \kappa \\ 0 & k \notin \kappa \end{cases} \quad (6)$$

式中, κ 表示信号的谱支撑范围.

将 Λ_k 的伪逆定义为

$$\Lambda_k^+ = \begin{cases} P_k^{-2} & k \in \kappa \\ 0 & k \notin \kappa \end{cases} \quad (7)$$

将 DFT 及 IDFT 分别表示为

$$X = Fx \quad (8)$$

$$x = F^H X \quad (9)$$

式中, F 为离散傅里叶变换算子矩阵. 上标 H 表示复共轭转置.

由式(5)知, 波数域范数可以表示为

$$\|x\|_w^2 = X^H \Lambda^+ X \quad (10)$$

将式(8)代入(10)得

$$\|x\|_w^2 = x^H F^H \Lambda^+ Fx \quad (11)$$

当观测数据含有噪声时, 目标函数包括了数据误差函数和模型范数

$$J = \|\mathbf{G}x - y\|^2 + \rho^2 \|x\|_w^2 \quad (12)$$

式中, ρ^2 为折衷参数(Huang *et al.*, 2008). 目标函数最小化等价于求解下面超定方程系统的最小二乘解.

$$\begin{cases} \mathbf{G}x = y \\ \rho \mathbf{W}x = 0 \end{cases} \quad (13)$$

加权矩阵为

$$\mathbf{W} = \Lambda^{+1/2} F \quad (14)$$

为了加快收敛速度, 做如下的变量替换:

令 $z = \mathbf{W}x$, 则式(13)可写为

$$\begin{cases} \mathbf{G}\mathbf{W}^+ z = y \\ \rho z = 0 \end{cases} \quad (15)$$

本文利用共轭梯度法求解方程(15).

为了得到权 \mathbf{W} , 需要知道完整数据 x 的功率谱. 但由于完整数据是未知的, 所以采用下面修正的平滑周期图迭代得到 P_k :

$$P_k^2 = \begin{cases} \sum_{l=-L}^L \omega_l |X_{k-l}|^2 & k \in \kappa \\ 0 & k \notin \kappa \end{cases} \quad (16)$$

式中, ω_l 是长度为 $2L+1$ 的平滑窗. 计算时, 将实测数据的功率谱作为 P_k^2 的初始估计, 获得 x , 再利用式(16)重新计算 P_k^2 ; 依次迭代, 直到得到满意的 x .

该方法首先将 t - x 域的待重建数据变到频率域, 然后依次在每个频率分量上沿空间方向进行重建. 为了提高计算效率, 在利用 MWNl 方法进行地震数据重建时, 本文采用了波数带宽与频率 f 有关的变带宽技术(Duijindam *et al.*, 1999; Hindriks, Duijindam, 2000).

随着 f 的增大, 最大波数域带宽也随之增大, 某频率 f 处的最大波数带宽由下式确定:

$$k_{\max} = \frac{2\pi f}{v_{\min}} \quad (17)$$

式中, v_{\min} 为最小视速度.

2 基于自动振幅增益调制方法的高频重建技术

近年来高频信息恢复技术在地震资料处理中的应用得到了充分重视. 陆文凯和张善文(2004)提出了基于频率搬移的地震资料约束测井资料外推方法. 对于地震信号这样的非平稳随机过程, 其频谱分量之间不是互相独立的, 因此可以利用此特性从低频资料中恢复出高频成分. 这与信号重建中的反假频原理是一致的.

频率搬移的本质就是调制, 频谱延拓是用已知频谱填补到未知频谱, 该方法能起到恢复高频的作用. 频率域的移频相当频率域的褶积运算, 即空间域的乘积运算. 调制可以引入升频的机制, 且地震曲线极大极小特征点控制相位可以保留原曲线特征, 从而发现了用地震资料的自动振幅增益进行自适应调制的高频重建方法. 调制升频可以在时间域中进行, 即两个信号逐点相乘, 产生了包含高频的信号, 该运算在频率域相当于褶积.

本方法将已用 MWNI 方法重建的低频数据的 AGC(自动增益控制)作调制函数, 再将调制函数与低频数据相乘, 然后用 MWNI 方法重建的低频数据替换乘积的低频部分, 进而得到最终的高频恢复地震资料. 具体步骤如下:

- 1) 将 MWNI 方法重建低频数据的 AGC, 用作调制函数.
- 2) 调制函数与低频数据相乘.
- 3) 将式(2)中乘积结果通过高通滤波器.
- 4) 将 MWNI 方法重建的低频数据与高通滤波结果相加.

若 $v(t, x)$ 和 $\bar{v}(t, x)$ 分别是无假频的重建低频数据及其 AGC 表示, 则做如下运算:

$$u(t, x) = v(t, x) \cdot \bar{v}(t, x) \quad (18)$$

其在频域可表示为

$$U(\omega, k) = V(\omega, k) \cdot \bar{V}(\omega, k) \quad (19)$$

式中, $V(\omega, k)$ 和 $\bar{V}(\omega, k)$ 分别为 $v(t, x)$ 和 $\bar{v}(t, x)$ 的频谱.

若 HPF 为一高通滤波器, 则数据 $U(\omega, k)$ 的高频成分为

$$U_H(\omega, k) = \text{HPF}[U(\omega, k)] \quad (20)$$

本文提出的地震数据重建结果可以表示为 MWNI 方法重建的低频分量 $V(\omega, k)$ 与调制方法重建的高频分量 $U_H(\omega, k)$ 之和, 即

$$U_R(\omega, k) = V(\omega, k) + U_H(\omega, k) \quad (21)$$

通过傅里叶反变换可获得 $U_R(\omega, k)$ 在 $t-x$ 域的表示 $u_r(t, x)$.

本方法的优点是: 原理简单, 计算效率高, 参数调节非常方便, 只要有时窗长度、合成比例、结合频率等几个有明确意义的参数即可调整出满意的结果. 该高频重建方法使得重建信号的高频剖面保持了原始地震剖面的低频特征, 其完全是由低频分量得到的, 结果保持了原有同相轴的波组特征, 且调制升频可以成功预测较远端无假频的高频信号. 这是比自回归模型高频预测反假频重建优越的地方. 同时也克服了利用线性预测技术预测高频时计算量较大的限制.

利用本文提出的方法,分别对理论模型和实际地震数据进行了重建研究.在理论模型重建部分,对含假频的规则地震数据进行了插值试算,以研究均匀采样数据的反假频内插重建;也对含空道地震数据进行了恢复重建,以研究非规则地震数据的空道填补.在实际资料应用部分,分别对海洋和陆上资料进行了内插重建和缺失数据恢复重建试验.

3 理论模型

3.1 规则地震数据插值

图 1a 所示理论模型包含 4 组双曲同相轴,共 50 道,道间距为 40 m,时间采样间隔为 4 ms.图 1a 的 $f-k$ 谱,如图 1b 所示,可见明显的空间假频.使用 MWNI 方法重建低频分量的频谱,如图 1c 所示.结合 MWNI 和 AR 滤波器线性预测高频方法得到的内插剖面,如图 1d 所示,图 1e 为其频谱,其无法准确完整地预测高频分量.图 1f 和图 1g 分别为利用抛物 Radon 变换进行插值的重建剖面及其频谱.结合 MWNI 方法和调制升频方法得到的隔道内插重建剖面及其 $f-k$ 谱如图 1h 及图 1i 所示.图 1j 和图 1k 分别为采用本文方法及抛物 Radon 变换方法的误差剖面.本文方法在近偏移距有些许误差,抛物 Radon 变换方法在浅层存在一定的误差.综合分析上述两种规则地震数据的插值方法,其插值精度与计算效率基本类似.需要指出的是,本文提出的方法克服了抛物 Radon 变换浅层计算精度低的缺点.

3.2 非规则缺失地震数据的重建

图 2a 为完整合成数据,共 100 道,其道间距为 10 m,时间采样间隔为 4 ms.其 $f-k$ 谱如图 2b 所示.从图 2a 的数据中除去 20 道后得到的不完整炮记录如图 2c 所示,其 $f-k$ 谱如图 2d 所示.将图 2c 的不完整数据作为本文算法的输入,得到如图 2e 所示的重建数据,可见重建数据与原始数据较为相似.重建数据的 $f-k$ 谱如图 2f 所示,基本无假频出现.

4 实际地震数据

4.1 实际地震数据插值

为了验证该方法的实用性,本文对海洋某测线的某一炮记录进行了插值试算.原始地震剖面如图 3a 所示,共 159 道,其道间距为 6.25 m.在原始剖面中隔 1 道除去 2 道后,得到图 3b 所示的 53 道数据,亦知图 3b 的道间距是图 3a 道间距的 3 倍.将图 3b 所示剖面作为 MWNI 算法的输入,再利用调制升频方法进行高频重建,得到如图 3c 所示重建结果.经比较不难看出,其与图 3a 相似程度很高,同相轴信息被很好地恢复,内插效果较好.

4.2 含空道的缺失地震数据重建

本文亦对某油田区块的二维地震资料进行了空道填补试验.取 80 道地震数据,其道间距为 20 m,时间采样间隔为 4 ms,这里仅取了其中 1—2.5 s 的数据.图 4a 为规则完整的地震数据,从中剔除 19 道后得到图 4b 所示的缺失数据地震剖面.图 4c 为利用本文方法获得的重建结果.通过对比可看出,缺失地震道的振幅和相位得到了很好地恢复,重建数据接近于真实数据,表明本文方法对含空道地震数据的重建效果亦很好.

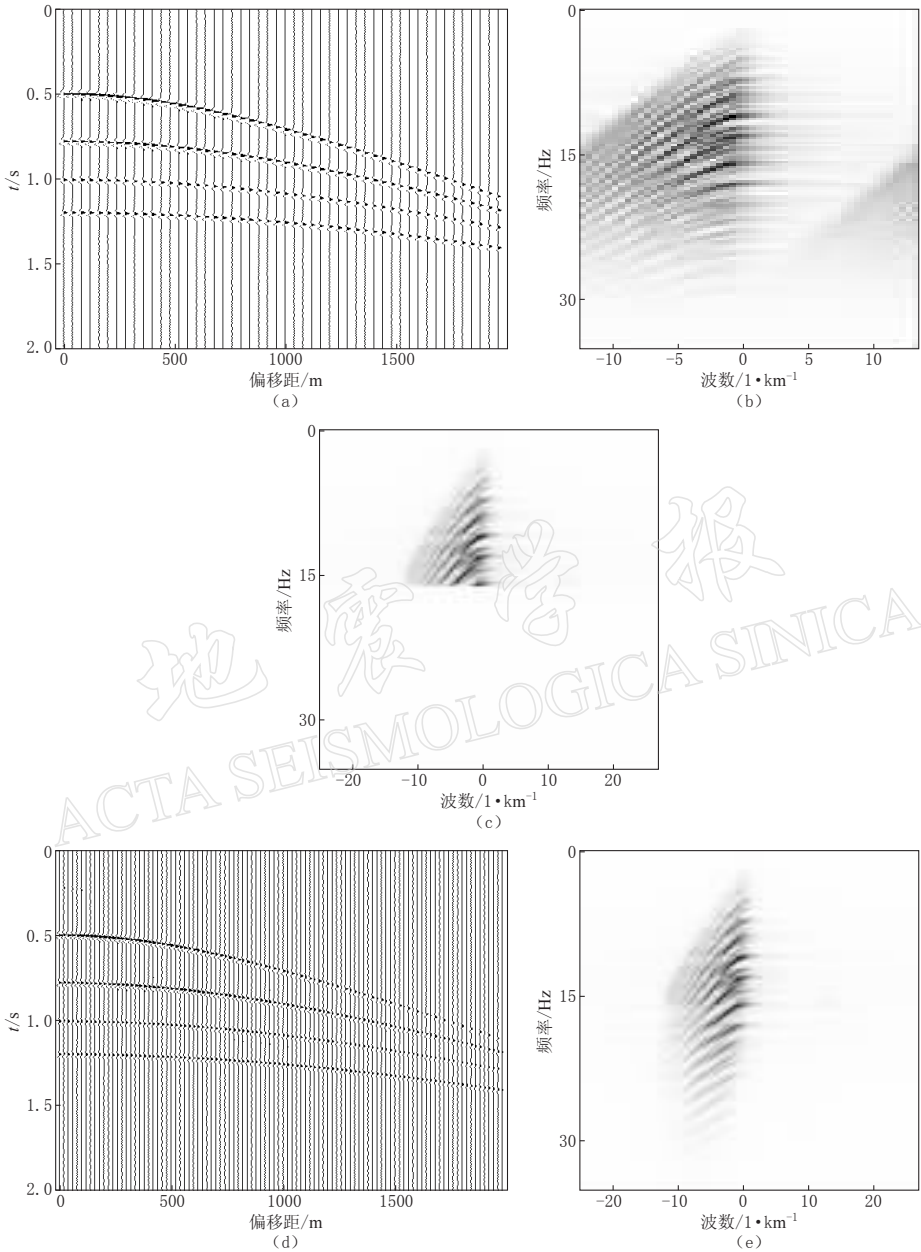


图 1 理论模型数据插值

(a) 待插值的数据; (b) 图(a)的 $f-k$ 谱; (c) MWNI 方法重建低频分量的频谱;
(d) AR 滤波器预测高频的内插重建结果; (e) 图(d)的 $f-k$ 谱;

Fig.1 Theoretical model data interpolation

(a) Synthetic data with sparse sampling; (b) $f-k$ spectrum of (a); (c) reconstructed low-frequency spectrum by MWNI; (d) interpolation result while using AR filter to predict high frequency; (e) $f-k$ spectrum of (d)

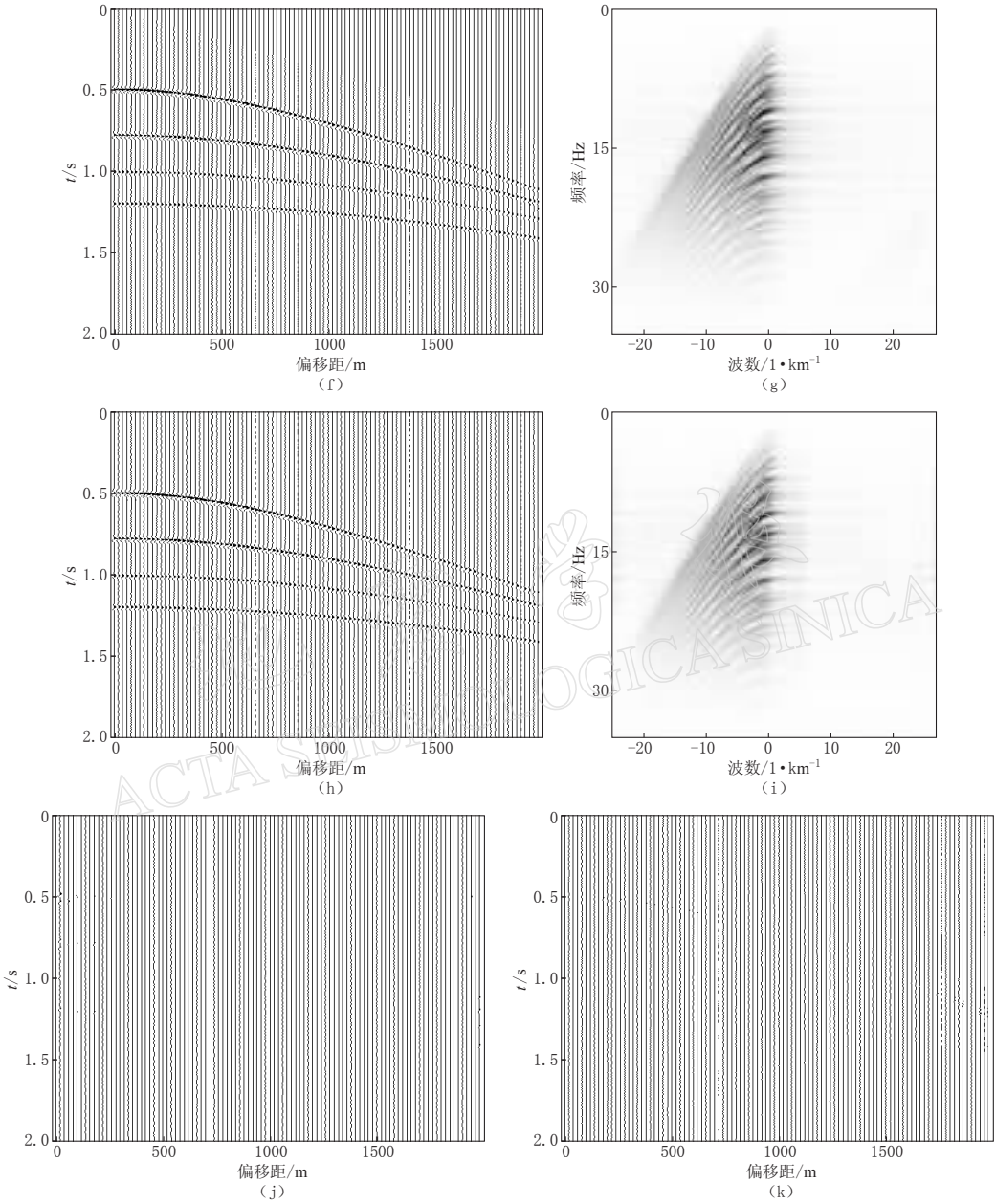


图 1 理论模型数据插值

(f) 抛物 Radon 变换方法的插值重建结果；(g) 图(f)的 $f-k$ 谱；(h) 结合 MWNI 和调制升频方法的内插结果；
(i) 图(h)的 $f-k$ 谱；(j) 结合 MWNI 和调制升频方法的误差剖面；(k) 抛物 Radon 变换方法的误差剖面

Fig.1 Theoretical model data interpolation

(f) Reconstruction result by parabolic Radon transform；(g) $f-k$ spectrum of (f)；
(h) interpolation result by combining MWNI and band extension via modulation；
(i) $f-k$ spectrum of (h)；(j) error profile from combining MWNI and band
extension via modulation；(k) error profile from parabolic Radon transform

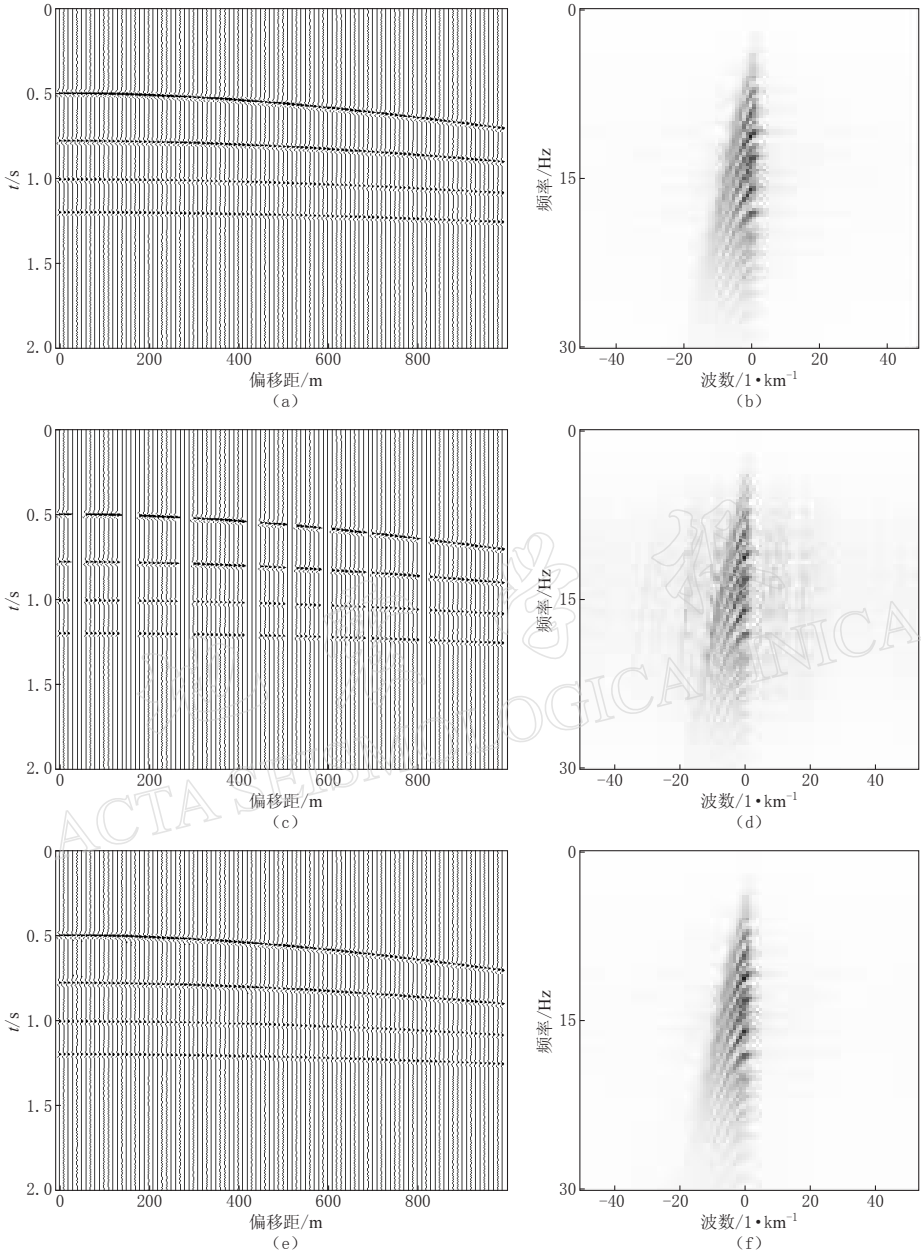


图 2 缺失地震数据的重建

(a) 完整的地震数据; (b) 图(a)的 $f-k$ 谱; (c) 从图(a)的完整数据中除去 20 道后得到的不完整数据;
(d) 图(c)的 $f-k$ 谱; (e) 结合 MWNI 和调制升频方法的重建结果; (f) 图(e)的 $f-k$ 谱

Fig. 2 Reconstruction of the seismic data with missing traces

(a) Complete seismic data; (b) $f-k$ spectrum of (a); (c) incomplete data obtained by removing 20 traces from (a); (d) $f-k$ spectrum of (c); (e) reconstruction result by combining MWNI and band extension via modulation; (f) $f-k$ spectrum of (e)

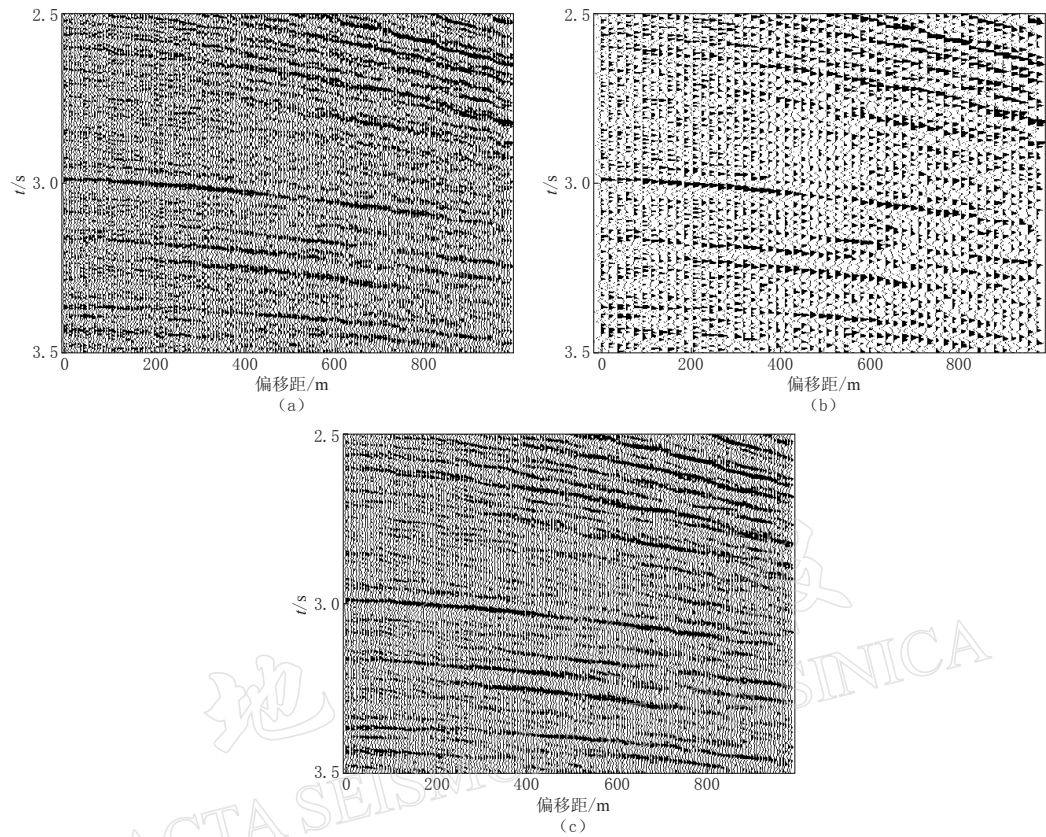


图 3 实际地震数据的插值

(a) 原始剖面；(b) 待内插剖面；(c) 结合 MWNI 和调制升频方法插值重建结果

Fig. 3 Interpolation for actual seismic data

(a) Raw section; (b) section with sparse sampling; (c) reconstruction result by combining MWNI and band extension via modulation

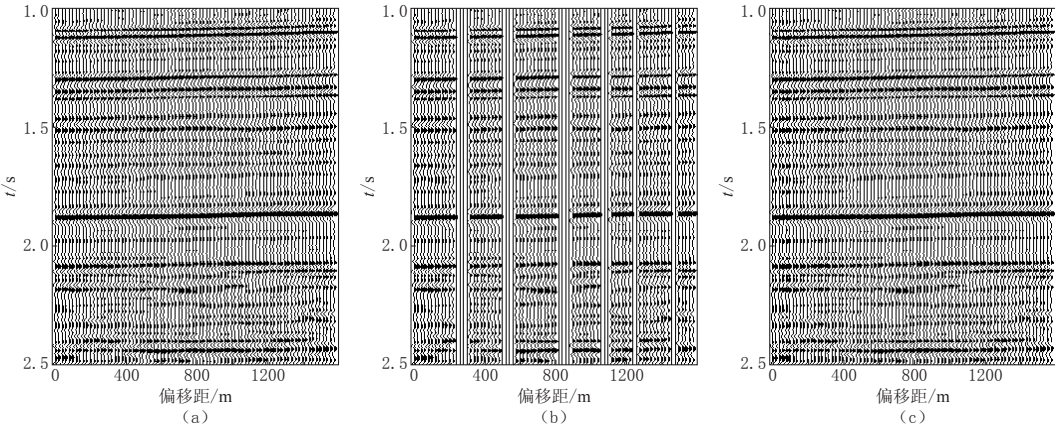


图 4 实际缺失地震数据的重建

(a) 真实完整的地震数据；(b) 缺失数据的地震剖面；(c) 重建结果

Fig. 4 Reconstruction for actual seismic data with missing traces

(a) Real and complete seismic data; (b) seismic section with missing traces; (c) reconstruction result

5 结论

本文提出了一种结合最小加权范数和调制升频方法进行反假频地震数据重建的方法,可用于规则地震数据的内插重建以及含空地地震数据的恢复重建.该方法包含低频重建和高频重建两步算法.在利用最小加权范数方法进行低频重建时,所使用的带限数据的重构方法包含了先验的谱信息,可以控制待重建数据的带宽和谱形状,能获得很好的重构效果.在此低频重建计算中,利用了 FFT 和预条件共轭梯度算法以及变带宽技术,因此计算效率很高.在高频重建部分,调制升频算法利用 MWNI 方法重建的低频信息构建高频成分,其简便、灵活,可准确预测较远端高频分量.本文提出的两步算法可有效去除空间假频,并能准确恢复欲重建数据的高频部分.理论模型与实际数据重建试验结果表明,该方法反假频能力强,重建道与原始道连续性好,重建地震剖面波形自然.该两步算法可有效地用于规则地震数据的内插重建以及非规则数据的空地填补.

参 考 文 献

- 国九英,周兴元,俞寿朋. 1996. FX 域等道距内插[J]. 石油地球物理勘探, **31**(1): 28-34.
- 国九英,周兴元. 1996. FK 域等道距内插[J]. 石油地球物理勘探, **31**(2): 211-218.
- 刘喜武,刘洪,刘彬. 2004. 反假频非均匀地震数据重建方法研究[J]. 地球物理学报, **47**(2): 299-305.
- 陆文凯,张善文. 2004. 基于频率搬移的地震资料约束测井资料的外推[J]. 地球物理学报, **47**(2): 354-358.
- 孟小红,郭良辉,张致付,李淑玲,周建军. 2008. 基于非均匀快速傅里叶变换的最小二乘反演地震数据重建[J]. 地球物理学报, **51**(1): 235-241.
- 王维红,裴江云,张剑锋. 2007. 加权抛物 Radon 变换叠前地震数据重建[J]. 地球物理学报, **50**(3): 851-859.
- 曾锐,刘洪,秦月霜,崔宝文,牛彦良. 2007. 基于自动增益控制调制法的高频重建技术[J]. 地球物理学进展, **22**(3): 850-859.
- Duijindam A J W, Schonewille M A, Hindriks C O H. 1999. Reconstruction of band-limited signals, irregularly sampled along one spatial direction[J]. *Geophysics*, **64**(2): 524-538.
- Gulunay N. 2003. Seismic trace interpolation in the Fourier transform domain[J]. *Geophysics*, **68**(1): 355-369.
- Hindriks K, Duijindam A J W. 2000. Reconstruction of 3-D seismic signals irregularly sampled along two spatial coordinates[J]. *Geophysics*, **65**(1): 253-263.
- Huang Y, Ng M K, Wen Y. 2008. A fast total variation minimization method for image restoration[J]. *Multiscale Model Simul*, **7**(2): 774-795.
- Kabir M M N, Verschuur D J. 1995. Restoration of missing offsets by parabolic radon transform[J]. *Geophys Prosp*, **43**(3): 347-368.
- Liu H, Liu B, Sacchi M D. 2004. Dealiasing band-limited uneven data using a linear prediction and adapted weighted least square[C]//CPS/SEG Beijing 2004 International Geophysical Conference and Exposition. Beijing: 198-201.
- Liu B, Sacchi M D. 2001. Minimum weighted norm interpolation of seismic data with adaptive weights[J]. *Soc Explor Geophys Ann Internat Mtg, Expanded Abstracts*: 1921-1924.
- Liu B, Sacchi M D. 2004. Minimum weighted norm interpolation of seismic records[J]. *Geophysics*, **69**(6): 1560-1568.
- Naghizadeh M, Sacchi M D. 2007. Multistep autoregressive reconstruction of seismic records[J]. *Geophysics*, **72**(6): v111-v118.
- Porsani M. 1999. Seismic trace interpolation using half-step prediction filter[J]. *Geophysics*, **64**(5): 1461-1467.
- Sacchi M D, Liu B. 2005. Minimum weighted norm wavefield reconstruction for AVA imaging[J]. *Geophys Prosp*, **53**(6): 787-801.
- Spitz S. 1991. Seismic trace interpolation in the F-X domain[J]. *Geophysics*, **56**(6): 785-794.
- Wang Y. 2003. Sparseness-constrained least-squares inversion: Application to seismic wave reconstruction[J]. *Geophysics*, **68**(5): 1633-1638.
- Zwartjes P M, Sacchi M D. 2007. Fourier reconstruction of nonuniformly sampled, aliased seismic data[J]. *Geophysics*, **72**(1): v21-v32.