

文章编号: 0253-3782(2004)02-0121-11

# 地震孕育体源流变模型(二) ——应变场及其应用<sup>\*</sup>

宋治平<sup>1)</sup> 尹祥础<sup>2)</sup> 梅世蓉<sup>2)</sup>

1) 中国上海 200062 上海市地震局

2) 中国北京 100036 中国地震局分析预报中心

**摘要** 在弹性包体理论的基础上, 建立了流变介质包体模型理论的应变场的理论解, 导出流变介质中的包体在任意一点产生的正应变、剪应变及体应变的粘弹性解析解, 即正应变、剪应变和体应变的表达式。通过计算三维粘弹性介质中球形硬包体与软包体在地面引起的体应变场的时空演化过程, 得到了一些非常有意义的结果, 即球形硬包体在地面产生的体应变随时间的变化曲线出现了特征不同的 3 个阶段( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ), 它与大量地形变资料出现的  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  阶段相似, 而球形软包体却没有这个特征。这些结果对地震前兆的形态特征、前兆的象限性、前兆时空演化的阶段性、短临前兆突发性以及前兆异常时间的地区性等的解释具有启示意义。这为地震前兆物理模式的建立提供了理论基础, 并将为实现地震的物理预测发挥作用。

**关键词** 弹性包体理论 流变包体理论 应变场 粘弹性解析解 地震前兆

中图分类号: P315 文献标识码: A

## 引言

我们在 Добровольский(1991)的硬包体弹性理论的基础上发展为流变介质的包体理论, 并应用流变包体模型的体应变场结果, 对地震前兆的时空演化过程进行了分析(宋治平等, 2000)。笔者在弹性包体模型的位移场理论解析解的基础上, 推导出流变包体模型的粘弹性位移场解析式(宋治平等, 2003), 本文在此基础上推导出流变包体模型的粘弹性的正应变、体应变、剪应变的解析式。其求解思路有两种: 其一, 由位移场求导可求出应变场; 其二, 由弹性解运用对应原理, 通过 Laplace 变换与反 Laplace 变换求解。对两种方法进行了比较, 采用对应原理求解, 本文直接给出了应变场的解析解, 具体推导过程见宋治平(1996)。

在地震前兆中, 由于与体应变有关的前兆较多, 如电阻率、地下水、水氡等; 加之, 大多地震前兆是在地表观测的, 因此, 本文分析球形包体在地表面产生的体应变的计算结果, 一是为了检验推导结果和程序的正确性, 二是通过计算三维粘弹性介质中球形硬包体与软包体在地面引起的体应变场的时空演化过程, 对硬、软包体进行定量对比分析; 并应用于地震前兆的形态特征、前兆的象限性、前兆时空演化的阶段性等的解释, 从而为地震前兆物理模式的建立提供了理论基础, 并将在实现地震的物理预报方面发挥作用。

\* 地震科学联合基金(101105)资助。

2002-01-14 收到初稿, 2003-03-31 收到最后修改稿, 2003-04-21 决定采用。

# 1 流变包体模型的应变场理论

## 1.1 正应变 $\epsilon_{xx}(r, t)$

流变包体模型在  $x$  方向的正应变随时间的变化为(宋治平, 1996)

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx}(r, t) = & \frac{3V\tau xy}{8\pi} \left\{ M_{x0}H(t) + (M_{x1} + M'_{x1} + tM''_{x1}) \exp\left(-\frac{q_0}{q_1}t\right) + M_{x2} \exp\left(-\frac{1}{p_1}t\right) + \right. \\ & \left. M_{x3} \exp\left(-\frac{3K + 2q_0}{3Kp_1 + 2q_1}t\right) + M_{x4} \exp\left(-\frac{6K + q_0}{6Kp_1 + q_1}t\right) \right\}\end{aligned}\quad (1)$$

其中, 时间参数为

$$T_1 = \frac{q_0}{q_1} \quad T_2 = \frac{1}{p_1} \quad T_3 = \frac{3K + 2q_0}{3Kp_1 + 2q_1} \quad T_4 = \frac{6K + q_0}{6Kp_1 + q_1}$$

参数  $M_{xi}$  ( $i=0, 1, 2, 3, 4$ )推导如下:

$$\left\{ \begin{aligned}M_{x0} &= 2\left(\frac{q_0}{q_1} - 1\right) \cdot \left[ \frac{S_{\epsilon_{xx}}(0)}{q_0(3K + q_0)} + \frac{3P_{x5}}{6K + q_0} \right] \\M_{x1} &= \frac{2(1 - p_1 T_1)}{q_0} \left\{ \frac{S_{\epsilon_{xx}}(T_1)}{(3K + 2q_0) - (3Kp_1 + 2q_1)T_1} - \frac{(1 - p_1 T_1)}{1 - p_1' T_1} \times \right. \\ &\quad \left. \frac{3(q_0' - q_1' T_1)P_{x5}}{(6K + q_0) - (6Kp_1 + q_1)T_1} \right\} \\M_{x2} &= -2(1 - p_1 T_2)^2 \frac{q_0' - q_1' T_2}{q_0 - q_1 T_2} \left\{ \frac{S_{\epsilon_{xx}}(T_2)}{(q_0 - q_1 T_2)[(3K + 2q_0) - (3Kp_1 + 2q_1)T_2]} + \right. \\ &\quad \left. \frac{3P_{x5}}{(6K + q_0) - (6Kp_1 + q_1)T_2} \right\} \\M_{x3} &= -\frac{2(1 - p_1 T_3)}{(3K + 2q_0)(q_0 - q_1 T_3)} \left[ \frac{1 - p_1 T_3}{1 - p_1' T_3} \cdot \frac{q_0' - q_1' T_3}{q_0 - q_1 T_3} - 1 \right] \cdot S_{\epsilon_{xx}}(T_3) \\M_{x4} &= -\frac{6(1 - p_1 T_4)}{6K + q_0} \left[ \frac{1 - p_1 T_4}{1 - p_1' T_4} \cdot \frac{q_0' - q_1' T_4}{q_0 - q_1 T_4} - 1 \right] \cdot P_{x5} \\M'_{x1} &= -\frac{2(q_0' - q_1' T_1)(1 - p_1 T_1)^2}{q_0 q_1 (1 - p_1' T_1)[(3K + 2q_0) - (3Kp_1 + 2q_1)T_1]} \cdot S_{\epsilon_{xx}}(T_1) \\M''_{x1} &= 2 \cdot \{ P_{x1} \cdot S(6K + q_0, 6Kp_1 + q_1) + P_{x2} \cdot S(6K + 7q_0, 6Kp_1 + 7q_1) + \\ &\quad P_{x3} \cdot S(12K - q_0, 12Kp_1 - q_1) + P_{x4} \cdot S(12K + 17q_0, 12Kp_1 + 17q_1) \}\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

式(2)中

$$\begin{aligned}S_{\epsilon_{xx}}(T) = & P_{x1} \cdot [6K + q_0 - (6Kp_1 + q_1)T] + P_{x2} \cdot [6K + 7q_0 - \\ & (6Kp_1 + 7q_1)T] + P_{x3} \cdot [12K - q_0 - (12Kp_1 - q_1)T] + P_{x4} \times \\ & [12K + 17q_0 - (12Kp_1 + 17q_1)T]\end{aligned}\quad (3)$$

通用函数  $S(n, m)$ 推导见宋治平(2003)文章中式(19)与(20). 与坐标有关的函数  $P_{xi}$  为

$$\left\{ \begin{aligned}P_{x1} &= \frac{30 \text{ Hz}}{r_2^7} + x^2 \left( \frac{5}{r_1^7} - \frac{70 \text{ Hz}}{r_2^9} \right) \\P_{x2} &= \frac{5}{r_2^7} \cdot x^2 \quad P_{x3} = -\frac{1}{r_1^5} \quad P_{x4} = -\frac{1}{r_2^5} \\P_{x5} &= \frac{4(3r_2 + H + z)}{r_2^3(r_2 + H + z)^3} - \frac{4x^2}{r_2^5(r_2 + H + z)^2} - \frac{8(2r_2 + H + z)}{r_2^4(r_2 + H + z)^4} \cdot x^2\end{aligned}\right. \quad (4)$$

式(1)中, 当  $t=0$  时,  $x$  方向的正应变为

$$\epsilon_{xx}(r,0) = \frac{3V\tau xy}{8\pi} \{M_{x0} + M_{x1} + M_{x1}'' + M_{x2} + M_{x3} + M_{x4}\} \quad (5)$$

当  $t \rightarrow \infty$  时,  $x$  方向的正应变为

$$\epsilon_{xx}(r,\infty) = \frac{3V\tau xy}{8\pi} M_{x0} \quad (6)$$

## 1.2 正应变 $\epsilon_{yy}(r,t)$

点  $(x,y,z)$  在  $y$  方向的正应变的粘弹性解析解为

$$\begin{aligned} \epsilon_{yy}(r,t) = & \frac{3V\tau xy}{8\pi} \left\{ M_{y0} H(t) + (M_{y1} + M_{y1}' + tM_{y1}'') \exp\left(-\frac{q_0}{q_1}t\right) + M_{y2} \exp\left(-\frac{1}{p_1}t\right) + \right. \\ & \left. M_{y3} \exp\left(-\frac{3K+2q_0}{3Kp_1+2q_1}t\right) + M_{y4} \exp\left(-\frac{6K+q_0}{6Kp_1+q_1}t\right) \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)中,  $M_{yi}$  为式(2)和(3)中  $M_{xi}$  参数所含的参数  $P_{xi}$  替换为  $P_{yi}$  即可. 其中, 与坐标有关的函数  $P_{yi}$  为

$$\begin{cases} P_{y1} = -\frac{30}{r_2^7} Hz + y^2 \left( \frac{5}{r_1^7} - \frac{70}{r_2^9} Hz \right) \\ P_{y2} = \frac{5}{r_2^7} \cdot y^2 \quad P_{y3} = -\frac{1}{r_1^5} \quad P_{y4} = -\frac{1}{r_2^5} \\ P_{y5} = \frac{4(3r_2 + H + z)}{r_2^3(r_2 + H + z)^3} \quad \frac{4y^2}{r_2^5(r_2 + H + z)^2} - \frac{8(2r_2 + H + z)}{r_2^4(r_2 + H + z)^4} \cdot y^2 \end{cases} \quad (8)$$

式(7)中, 当  $t=0$  时,  $y$  方向的正应变为

$$\epsilon_{yy}(r,0) = \frac{3V\tau xy}{8\pi} \{M_{y0} + M_{y1} + M_{y1}'' + M_{y2} + M_{y3} + M_{y4}\} \quad (9)$$

当  $t \rightarrow \infty$  时,  $y$  方向的正应变为

$$\epsilon_{yy}(r,\infty) = \frac{3V\tau xy}{8\pi} M_{y0} \quad (10)$$

## 1.3 正应变 $\epsilon_{zz}(r,t)$

点  $(x,y,z)$  在  $z$  方向的正应变的粘弹性解析解为

$$\begin{aligned} \epsilon_{zz}(r,t) = & \frac{3V\tau xy}{8\pi} \left\{ M_{z0} H(t) + (M_{z1} + M_{z1}' + tM_{z1}'') \exp\left(-\frac{q_0}{q_1}t\right) + M_{z2} \exp\left(-\frac{1}{p_1}t\right) + \right. \\ & \left. M_{z3} \exp\left(-\frac{3K+2q_0}{3Kp_1+2q_1}t\right) + M_{z4} \exp\left(-\frac{6K+q_0}{6Kp_1+q_1}t\right) \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

其中,  $M_{zi}$  为

$$\begin{cases} M_{z0} = 2 \left( \frac{q_0'}{q_0} - 1 \right) \cdot \left[ \frac{S_{ezz}(0)}{q_0(3K+q_0)} + \frac{3P_{z3}}{6K+q_0} \right] \\ M_{z1} = \frac{2(1-p_1 T_1)}{q_0} \left\{ \frac{S_{ezz}(T_1)}{(3K+2q_0)-(3Kp_1+2q_1)T_1} - \frac{(1-p_1 T_1)}{1-p_1' T_1} \times \right. \\ \left. \frac{3(q_0' - q_1' T_1)P_{z3}}{(6K+q_0)-(6Kp_1+q_1)T_1} \right\} \\ M_{z2} = -2(1-p_1 T_2)^2 \frac{q_0' - q_1' T_2}{q_0 - q_1 T_2} \left\{ \frac{S_{ezz}(T_2)}{(q_0 - q_1 T_2)[(3K+2q_0)-(3Kp_1+2q_1)T_2]} + \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 \frac{3P_{z3}}{(6K+q_0)-(6Kp_1+q_1)T_2} \\
 M_{z3} = -\frac{2(1-p_1T_3)}{(3K+2q_0)(q_0-q_1T_3)} \left[ \frac{1-p_1T_3}{1-p_1'T_3} \cdot \frac{q_0'-q_1'T_3}{q_0-q_1T_3} - 1 \right] \cdot S_{\varepsilon_{zz}}(T_3) \\
 M_{z4} = -\frac{6(1-p_1T_4)}{6K+q_0} \left[ \frac{1-p_1T_4}{1-p_1'T_4} \cdot \frac{q_0'-q_1'T_4}{q_0-q_1T_4} - 1 \right] \cdot P_{z3} \\
 M_{z1} = -\frac{2(q_0'-q_1'T_1)(1-p_1T_1)^2}{q_0q_1(1-p_1'T_1)[(3K+2q_0)-(3Kp_1+2q_1)T_1]} \cdot S_{\varepsilon_{zz}}(T_1) \\
 M_{z1}'' = 2 \cdot \{ P_{z1} \cdot S(6K+q_0, 6Kp_1+q_1) + P_{z2} \cdot S(6K+7q_0, 6Kp_1+7q_1) \}
 \end{cases} \quad (12)$$

(12) 中

$$S_{\varepsilon_{zz}}(T) = P_{z1} \cdot [6K+q_0 - (6Kp_1+q_1)T] + P_{z2} \cdot [6K+7q_0 - (6Kp_1+7q_1)T] \quad (13)$$

通用函数  $S(n, m)$  推导见宋治平(2003)文章中式(19)与(20). 在式(12)与(13)中, 与坐标有关的函数  $P_{zi}$  为

$$\begin{cases}
 P_{z1} = -\frac{1}{r_1^5} + \frac{5(H-z)^2}{r_1^7} + \frac{10H(2z+H)}{r_2^7} - \frac{70Hz(H+z)^2}{r_2^9} \\
 P_{z2} = -\frac{1}{r_2^5} - \frac{5(H^2-z^2)}{r_2^7} \\
 P_{z3} = -\frac{4}{r_2^5}
 \end{cases} \quad (14)$$

当  $t=0$  时,  $z$  方向的正应变为

$$\varepsilon_{zz}(r, 0) = \frac{3V\tau xy}{8\pi} \{ M_{z0} + M_{z1} + M_{z1}'' + M_{z2} + M_{z3} + M_{z4} \} \quad (15)$$

当  $t \rightarrow \infty$  时,  $z$  方向的正应变为

$$\varepsilon_{zz}(r, \infty) = \frac{3V\tau xy}{8\pi} M_{z0} \quad (16)$$

#### 1.4 剪应变 $\varepsilon_{xy}(r, t)$ 与 $\varepsilon_{yx}(r, t)$

点  $(x, y, z)$  处的剪应变的粘弹性解  $\varepsilon_{xy}(r, t) = \varepsilon_{yx}(r, t)$ , 为

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xy}(r, t) = & \frac{V\tau}{8\pi} \left\{ M_{xy0} H(t) + (M_{xy1} + M_{xy1}' + tM_{xy1}'') \exp\left(-\frac{q_0}{q_1}t\right) + M_{xy2} \exp\left(-\frac{1}{p_1}t\right) + \right. \\
 & \left. M_{xy3} \exp\left(-\frac{3K+2q_0}{3Kp_1+2q_1}t\right) + M_{xy4} \exp\left(-\frac{6K+q_0}{6Kp_1+q_1}t\right) \right\} \quad (17)
 \end{aligned}$$

式(17)中的参数  $M_{xyi}$  ( $i=0, 1, 2, 3, 4$ ) 为

$$\begin{cases}
 M_{xy0} = 2\left(\frac{q_0'}{q_0}-1\right) \cdot \left[ \frac{S_{\varepsilon_{xy}}(0)}{q_0(3K+q_0)} + 9P_{xy6} \cdot \frac{2K+q_0}{q_0(6K+q_0)} + P_{xy7} \cdot \frac{3}{6K+q_0} \right] \\
 M_{xy1} = \frac{2(1-p_1T_1)}{q_0} \left\{ \frac{S_{\varepsilon_{xy}}(T_1)}{(3K+2q_0)-(3Kp_1+2q_1)T_1} + 9P_{xy6} \times \right. \\
 \left. \frac{(2K+q_0)-(2Kp_1+q_1)T_1}{(6K+q_0)-(6Kp_1+q_1)T_1} - \frac{(1-p_1T_1)}{1-p_1'T_1} \cdot \frac{3(q_0'-q_1'T_1)P_{xy7}}{(6K+q_0)-(6Kp_1+q_1)T_1} \right\} \\
 M_{xy2} = -\frac{2(1-p_1T_2)^2(q_0'-q_1'T_2)}{q_0-q_1T_2} \left\{ \frac{S_{\varepsilon_{xy}}(T_2)}{(q_0-q_1T_2)[(3K+2q_0)-(3Kp_1+2q_1)T_2]} + \right. \\
 \left. 9P_{xy6} \cdot \frac{(2K+q_0)-(2Kp_1+q_1)T_2}{(q_0-q_1T_2)[(6K+q_0)-(6Kp_1+q_1)T_2]} + \frac{3P_{xy7}}{(6K+q_0)-(6Kp_1+q_1)T_2} \right\}
 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 M_{xy3} &= -\frac{2(1-p_1 T_3)}{(3K+2q_0)(q_0-q_1 T_3)} \left[ \frac{1-p_1 T_3}{1-p_1' T_3} \cdot \frac{q_0'-q_1' T_3}{q_0-q_1 T_3} - 1 \right] \cdot S_{exx}(T_3) \quad (18) \\
 M_{xy4} &= -\frac{6(1-p_1 T_4)}{6K+q_0} \left[ \frac{1-p_1 T_4}{1-p_1' T_4} \cdot \frac{q_0'-q_1' T_4}{q_0-q_1 T_4} - 1 \right] \times \\
 &\quad \left[ 6P_{xy6} \cdot \frac{(2K+q_0)-(2Kp_1+q_1)T_1}{q_0-q_1 T_4} + P_{xy7} \right] \\
 M_{xy1} &= -\frac{2(q_0'-q_1' T_1)(1-p_1 T_1)^2}{q_0 q_1 (1-p_1' T_1)} \cdot \left\{ \frac{S_{exx}(T_1)}{(3K+2q_0)-(3Kp_1+2q_1)T_1} + \right. \\
 &\quad \left. 9P_{xy6} \cdot \frac{(2K+q_0)-(2Kp_1+q_1)T_1}{(6K+q_0)-(6Kp_1+q_1)T_1} \right\} \\
 M_{xy1}' &= 2 \cdot \{ P_{xy1} \cdot S(6K+q_0, 6Kp_1+q_1) + P_{xy2} \cdot S(3K-q_0, 3Kp_1-q_1) + \\
 &\quad P_{xy3} \cdot S(1, p_1) + P_{xy4} \cdot S(3K+5q_0, 3Kp_1+5q_1) + P_{xy5} \times \\
 &\quad S(6K+7q_0, 6Kp_1+7q_1) + P_{xy6} \cdot S_2(2K+q_0, 2Kp_1+q_1) \}
 \end{aligned}$$

式(18)中, 子函数为

$$\begin{aligned}
 S_{exy}(T) &= P_{xy1} \cdot [6K+q_0-(6Kp_1+q_1)T] + P_{xy2} \cdot [3K-q_0-(3Kp_1-q_1)T] + \\
 &\quad P_{xy3} \cdot 9K(1-p_1 T) - P_{xy4} \cdot [(3K+5q_0)-(3Kp_1+5q_1)T] + \\
 &\quad P_{xy5} \cdot [6K+7q_0-(6Kp_1+7q_1)T] \quad (19)
 \end{aligned}$$

$$S_z(m, n) = [AA(6K+q_0, 6Kp_1+q_1) + BB(6K+q_0, 6Kp_1+q_1)] \cdot (m - nT_1) + \\
 CC(6K+q_0, 6Kp_1+q_1) \cdot n \quad (20)$$

通用函数  $S(n, m)$  与函数  $AA(n, m)$ 、 $BB(n, m)$ 、 $CC(n, m)$  见宋治平(2003)文章中式(20). 在式(18)、(19)、(20)中, 与坐标有关的函数  $P_{xyi}$  为

$$\begin{aligned}
 P_{xy1} &= \frac{24 Hz}{r_2^5} - \frac{30 Hz(H+z)^2}{r_2^7} + x^2 y^2 \left( \frac{15}{r_1^7} - \frac{210 Hz}{r_2^9} \right) \\
 P_{xy2} &= \frac{3(H+z)^2}{r_1^5} \quad P_{xy3} = -\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \quad P_{xy4} = \frac{3(H+z)^2}{r_2^5} \\
 P_{xy5} &= \frac{15x^2 y^2}{r_2^7} \quad P_{xy6} = -\frac{2}{r_2^3} \\
 P_{xy7} &= \frac{12}{r_2(r_2+H+z)^2} - x^2 y^2 \left[ \frac{12}{r_2^5(r_2+H+z)^2} + \frac{24(2r_2+H+z)}{r_2^4(r_2+H+z)^4} \right]
 \end{aligned} \quad (21)$$

当  $t=0$  时, 式(17)变为

$$\varepsilon_{xy}(r, 0) = \frac{V_\tau}{8\pi} \{ M_{xy0} + M_{xy1} + M_{xy1}' + M_{xy2} + M_{xy3} + M_{xy4} \} \quad (22)$$

当  $t \rightarrow \infty$  时, 式(17)变为

$$\varepsilon_{xy}(r, \infty) = \frac{V_\tau}{8\pi} M_{xy0} \quad (23)$$

## 1.5 剪应变 $\varepsilon_{yz}(r, t)$ 与 $\varepsilon_{zy}(r, t)$

点  $(x, y, z)$  处的剪应变粘弹性解  $\varepsilon_{yz}(r, t) = \varepsilon_{zy}(r, t)$ , 为

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{yz}(r, t) &= \varepsilon_{zy}(r, t) = \frac{V_\tau x}{8\pi} \left\{ M_{yz0} H(t) + (M_{yz1} + M_{yz1}' + tM_{yz1}'') \exp \left( -\frac{q_0}{q_1} t \right) + \right. \\
 &\quad \left. M_{yz2} \exp \left( -\frac{1}{p_1} t \right) + M_{yz3} \exp \left( -\frac{3K+2q_0}{3Kp_1+2q_1} t \right) \right\} \quad (24)
 \end{aligned}$$

式中, 参数  $M_{yzi}$  ( $i=0, 1, 2, 3, 4$ ) 为

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{yz0} = 2\left(\frac{q_0'}{q_0} - 1\right) \cdot \frac{S_{\varepsilon_{yz}}(0)}{q_0(3K + q_0)} \\ M_{yz1} = \frac{2(1 - p_1 T_1)}{q_0} \cdot \frac{S_{\varepsilon_{yz}}(T_1)}{(3K + 2q_0) - (3Kp_1 + 2q_1)T_1} \\ M_{yz2} = -2(1 - p_1 T_2)^2 \frac{q_0' - q_1' T_2}{(q_0 - q_1 T_2)^2} \cdot \frac{S_{\varepsilon_{yz}}(T_2)}{(3K + 2q_0) - (3Kp_1 + 2q_1)T_2} \\ M_{yz3} = -\frac{2(1 - p_1 T_3)}{(3K + 2q_0)(q_0 - q_1 T_3)} \left[ \frac{1 - p_1 T_3}{1 - p_1 T_3} \cdot \frac{q_0' - q_1' T_3}{q_0 - q_1 T_3} - 1 \right] \cdot S_{\varepsilon_{yz}}(T_3) \\ M_{yz1}' = -\frac{2(q_0' - q_1' T_1)(1 - p_1 T_1)^2}{q_0 q_1 (1 - p_1 T_1) [(3K + 2q_0) - (3Kp_1 + 2q_1)T_1]} \cdot S_{\varepsilon_{yz}}(T_1) \\ M_{yz1}'' = 2 \cdot \{ P_{yz1} \cdot S(6K + q_0, 6Kp_1 + q_1) + P_{yz2} \cdot S(3K - q_0, 3Kp_1 - q_1) + \\ P_{yz3} \cdot S(3K + 5q_0, 3Kp_1 + 5q_1) + P_{yz4} \cdot S(6K + 7q_0, 6Kp_1 + 7q_1) \} \end{array} \right. \quad (25)$$

式中

$$\begin{aligned} S_{\varepsilon_{yz}}(T) = & P_{yz1} \cdot [6K + q_0 - (6Kp_1 + q_1)T] + P_{yz2} \cdot [3K - q_0 - (3Kp_1 - q_1)T] + \\ & P_{yz3} \cdot [(3K + 5q_0) - (3Kp_1 + 5q_1)T] + P_{yz4} \cdot [6K + 7q_0 - (6Kp_1 + 7q_1)T] \end{aligned} \quad (26)$$

通用函数  $S(n, m)$  推导见宋治平(2003)文章中式(19)和(20). 在式(25)与(26)中, 与坐标有关的函数  $P_{yzi}$  为

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{yz1} = \frac{30 \text{ Hz}(H + z)}{r_2^7} + y^2 \left[ -\frac{15(H - z)}{r_1^7} + \frac{15H}{r_2^7} - \frac{210 \text{ Hz}(H + z)}{r_2^9} \right] \\ P_{yz2} = \frac{3(H - z)}{r_1^5} - \frac{3H}{r_2^5} \quad P_{yz3} = -\frac{3z}{r_2^5} \quad P_{yz4} = \frac{15z}{r_2^7} \cdot y^2 \end{array} \right. \quad (27)$$

当  $t=0$  时, 式(24)变为

$$\varepsilon_{yz}(r, 0) = \varepsilon_{zy}(r, 0) = \frac{V_{\tau x}}{8\pi} \{ M_{yz0} + M_{yz1} + M_{yz1}'' + M_{yz2} + M_{yz3} \} \quad (28)$$

当  $t \rightarrow \infty$  时, 式(24)变为

$$\varepsilon_{yz}(r, \infty) = \frac{V_{\tau x}}{8\pi} M_{yz0} \quad (29)$$

## 1.6 剪应变 $\varepsilon_{xz}(r, t)$ 与 $\varepsilon_{zx}(r, t)$

点  $(x, y, z)$  处的剪应变粘弹性解  $\varepsilon_{xz}(r, t) = \varepsilon_{zx}(r, t)$ , 为

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xz}(r, t) = \varepsilon_{zx}(r, t) = & \frac{V_{\tau y}}{8\pi} \left\{ M_{xz0} H(t) + (M_{xz1} + M_{xz1}'' + tM_{xz1}') \exp\left(-\frac{q_0}{q_1}t\right) + \right. \\ & \left. M_{xz2} \exp\left(-\frac{1}{p_1}t\right) + M_{xz3} \exp\left(-\frac{3K + 2q_0}{3Kp_1 + 2q_1}t\right) \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

式(30)中, 参数  $M_{xzi}$  由式(25)  $M_{yzi}$  中参数  $P_{yzi}$  替换为  $P_{xzi}$  即可. 其中, 与坐标有关的函数  $P_{xzi}$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) 为

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{xz1} = \frac{30 \text{ Hz}(H + z)}{r_2^7} + x^2 \left[ -\frac{15(H - z)}{r_1^7} + \frac{15H}{r_2^7} - \frac{210 \text{ Hz}(H + z)}{r_2^9} \right] \\ P_{xz2} = \frac{3(H - z)}{r_1^5} - \frac{3H}{r_2^5} \quad P_{xz3} = -\frac{3z}{r_2^5} \quad P_{xz4} = \frac{15z}{r_2^7} \cdot x^2 \end{array} \right. \quad (31)$$

当  $t=0$  时, 式(30)为

$$\varepsilon_{xz}(r, 0) = \varepsilon_{zx}(r, 0) = \frac{V_{\tau y}}{8\pi} \{ M_{xz0} + M_{xz1} + M_{xz1}'' + M_{xz2} + M_{xz3} \} \quad (32)$$

当  $t \rightarrow \infty$  时, 式(30)为

$$\epsilon_{xz}(r, \infty) = \frac{V\tau y}{8\pi} M_{xz0} \quad (33)$$

### 1.7 体应变 $\theta(r, t)$

点  $(x, y, z)$  处的体应变粘弹性解  $\theta(r, t)$  为

$$\theta(r, t) = \frac{3V\tau xy}{4\pi} \left\{ M_{\theta 0} H(t) + M_{\theta 1} \exp\left(-\frac{q_0}{q_1} t\right) + M_{\theta 2} \exp\left(-\frac{1}{p_1} t\right) + M_{\theta 3} \exp\left(-\frac{3K + 2q_0}{3Kp_1 + 2q_1} t\right) + M_{\theta 4} \exp\left(-\frac{6K + q_0}{6Kp_1 + q_1} t\right) \right\} \quad (34)$$

其中, 参数  $M_{\theta i}$  ( $i=0, 1, 2, 3, 4$ ) 为

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{\theta 0} = 6 \left( \frac{q_0}{q_0} - 1 \right) \cdot \frac{S_\theta(0)}{3K + 2q_0} \\ M_{\theta 1} = -6 \cdot \frac{(q_0' - q_1' T_1)}{q_0} \cdot \frac{(1 - p_1 T_1)^2}{1 - p_1' T_1} \cdot \frac{S_\theta(T_1)}{(3K + 2q_0) - (3Kp_1 + 2q_1) T_1} \\ M_{\theta 2} = -6 \cdot \frac{q_0' - q_1' T_2}{q_0 - q_1 T_2} \cdot \frac{(1 - p_1 T_2)^2}{(3K + 2q_0) - (3Kp_1 + 2q_1) T_2} \cdot S_\theta(T_2) \\ M_{\theta 3} = -6 \cdot \frac{(1 - p_1 T_3)}{(3K + 2q_0)} \left[ \frac{1 - p_1 T_3}{1 - p_1' T_3} \cdot \frac{q_0' - q_1' T_3}{q_0 - q_1 T_3} - 1 \right] \cdot S_\theta(T_3) \\ M_{\theta 4} = -6 \cdot \frac{(1 - p_1 T_4)}{6K + q_0} \cdot \frac{(6K + 7q_0) - (6Kp_1 + 7q_1) T_4}{(3K + 2q_0) - (3Kp_1 + 2q_1) T_4} \times \\ \quad \left[ \frac{1 - p_1 T_4}{1 - p_1' T_4} \cdot \frac{q_0' - q_1' T_4}{q_0 - q_1 T_4} - 1 \right] \cdot P_{\theta 2} \end{array} \right. \quad (35)$$

其中, 体应变通用函数  $S_\theta(T)$  为

$$S_\theta(T) = P_{\theta 1} + P_{\theta 2} \cdot \frac{(6K + 7q_0) - (6Kp_1 + 7q_1) T}{(6K + q_0) - (6Kp_1 + q_1) T} \quad (36)$$

与坐标有关的函数  $P_{\theta 1}$  与  $P_{\theta 2}$  为

$$P_{\theta 1} = \frac{1}{r_1^5} - \frac{10H(H+z)}{r_2^7} \quad P_{\theta 2} = \frac{1}{r_2^5} \quad (37)$$

当  $t=0$  时, 式(34)变为

$$\theta(r, 0) = \frac{3V\tau xy}{4\pi} \{ M_{\theta 0} + M_{\theta 1} + M_{\theta 2} + M_{\theta 3} + M_{\theta 4} \} \quad (38)$$

当  $t \rightarrow \infty$  时, 式(34)变为

$$\theta(r, \infty) = \frac{3V\tau xy}{4\pi} M_{\theta 0} \quad (39)$$

## 2 球形包体在地表产生的体应变特征

由于与体应变有关的前兆较多, 如电阻率、地下水、水氡等; 加之, 大多数地震前兆是在地表观测的, 为此, 笔者重点分析了球形包体在地表面产生的体应变(宋治平, 1996). 本文计算了  $t$  时刻的体应变与  $t=0$  时刻的体应变之差, 即体应变的变化量  $\Delta\theta$ , 作出此量的时间进程曲线、空间分布平面图以及立体图. 其目的一是为了检验推导结果和程序的正确性, 二是通过分析计算结果, 可以对硬、软包体进行定量对比分析(宋治平等, 2000). 其基本特征如下.

## 2.1 硬、软包体产生的体应变的象限性

硬、软包体产生的达到体应变空间场的特征既有相似之处,也存在差异。其相似之处在于两者都存在象限分布,且2倍震源尺度区内与区外的分布状态正相反;不同之处在于,硬包体产生的体应变高值区正好与软包体产生的低值区相对应。

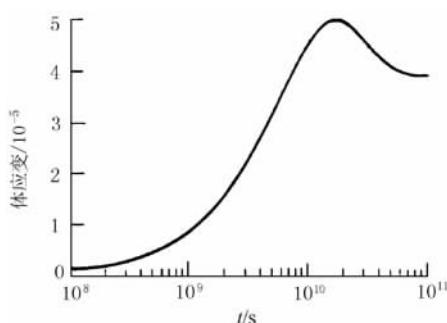


图 1 硬包体近源区体应变随时间变化曲线

## 2.2 体应变随时间的变化形态特征

硬包体产生的体应变随时间的变化形态为:

① 体应变变化形态随震中距而变化,处于震源区的点经历了一个增高—极值—降低—趋于稳定值的过程(图1),呈现“凸”型变化特征。在2倍震源尺度区附近的点则为先下降,然后上升,呈现“N”型变化特征。在2倍震源尺度区以外的点则为“凹”型变化特征。而远离震中的点,其形态特征类似于震源区,但其量值较小;② 体应变变化量随距离增大而减小,如依次远离震中的点,其相应变化幅度也依次减小。有趣的是,软包体的体应变变化图象不同于硬包体的情形。软包体在地表不同距离上产生的体应变曲线的变化过程是逐渐增高—趋于稳定值,没有由极值转为降低的过程。

## 2.3 硬包体体应变的3个阶段特征

由于硬包体体应变具有“增强—极值—降低为稳定值”的3个阶段,即 $\alpha$ 阶段是体应变随时间逐渐增强的过程,这个阶段的远源区与近源区体应变均显示出向外扩展的特征; $\beta$ 阶段的体应变随时间的变化较小,与此相应的空间范围变化也很小。这个阶段的体应变达到极值状态,受其控制的其它物理量理应最强,即 $\beta$ 阶段的地震前兆应当最强,且应同期出现在近源区和远源区; $\gamma$ 阶段的体应变随着时间而减小,与此相应的空间变化特征是:远源区体应变表现为向震中收缩,而近源区的体应变却向外迁移。

## 2.4 软包体体应变无3个阶段特征

分析表明,软包体产生的体应变在远源区和近源区皆向外扩散,两区内的体应变向外扩散的方向呈共轭。如果以软包体作为孕震体,则在整个孕震过程中,前兆的时空演变应皆向外围扩散。

## 2.5 边界条件的微扰动对体应变的影响

以上分析是基于边界条件不变的情况,如果边界条件发生微小变化,体应变场是否变化是值得研究的问题。研究表明,对于硬包体而言,在空间各点的体应变曲线上,出现数个幅度不等的脉冲,它们叠加在曲线上,突跳幅度与体应变曲线成正变关系。居于硬包体中心部位的点体应变曲线上的突跳并不最强。有趣的是,体应变越大的脉冲越强。换句话说,对边界动力微变化,响应强烈的部位是硬包体内及边缘,但包体中心部位并不强。

由边界微扰动对软包体的响应表明,软包体的响应不同于硬包体之处,在于突跳幅度只有逐渐增强达到极值状态,而没有类似硬包体的特征。这有助于理解有震前兆和无震前兆。另外,边界微扰动对硬、软包体都能响应,从而增加了前兆突跳的复杂性。

### 3 地震前兆特征的讨论

在地震前兆综合特征中重复性较好的是地震前兆的阶段性、迁移性以及复杂性等。如果能理解其本质, 确立其规律, 则对地震预报科学水平的提高将大有益处。

#### 3.1 前兆形态特征的解释

由硬包体近源区体应变的时间过程曲线可清楚地显示出3个阶段的存在, 即 $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ 阶段(图1)。宋治平(1996)通过对Mesherikov(1968)、藤井阳一郎(1974)大量形变观测资料所得到的曲线(图2)进行比较, 从中看出其间具有相似性。观测曲线将 $\beta$ ,  $\gamma$ 阶段揭示得更为细致, 分为 $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$ 。而理论曲线却给出了观测曲线无法提供的3个阶段的相对比例。曲线基本特征的相似性容许我们确信这个曲线的科学性和可靠性。这对“坚固体孕震模式”是一个支持。

硬包体在近源区产生的体应变时间过程的变化特点为: 增高—极值—降低—趋于稳定, 呈“凸”型变化。在2倍包体尺度附近的点, 其体应变曲线特征是: 首先下降, 然后上升, 呈“N型”变化; 在3倍包体尺度区的点为“凹”型变化。远离包体的点, 其体应变值甚小。这种体应变异常形态随着距离的增大而改变的图象与地震观测中发现的现象(梅世蓉等, 1993)十分类似, 这也从另一个角度说明了这种现象的出现不是偶然的, 而是有其物理基础的。

#### 3.2 地震前兆时空演化特征的力学解释

冯德益(1983)的研究表明, 地震前兆过程可分为3个发展阶段( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ 阶段)。 $\alpha$ 阶段是前兆从震源区向外围地区逐渐发展的较长过程;  $\beta$ 阶段表现出前兆的快速发展, 即差不多同期出现在多个观测点上;  $\gamma$ 阶段的地震前兆则从外围地区向震源区收缩, 然后进入临震阶段, 之后发生地震。为了解释地震前兆3个阶段的物理实质, 冯德益(1983)与王新华等(1984)都提出了不同的观点。

而我们的研究表明, 硬包体作为孕震体, 在地表产生的体应变具有3个阶段特征, 其中,  $\alpha$ 阶段为向外围扩散特征;  $\beta$ 阶段为体应变不变区;  $\gamma$ 阶段包含两个过程, 即 $\gamma_1$ 表示远源区的前兆向震中区收缩的特征,  $\gamma_2$ 为近源区的前兆向外围扩散的特征。

虽然在冯德益所给出的结果中没有近源区短期阶段的向外扩散过程, 但在唐山地震前确有报道, 说明其存在。例如, 李宣瑚(1981)与郑治真(1979)的研究表明, 在唐山地震前半年, 水氡和水位异常均存在向外扩散过程。在龙陵、松潘地震前半年也存在这一特征(梅世蓉等, 1983)。宋治平(1996)研究表明,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ 3个阶段表现明显, 特别是 $\gamma$ 阶段(相当于地震短临阶段)的前兆从外围向震中的收缩特征( $\gamma_1$ )和从震中向外围的扩散( $\gamma_2$ )特征均存在。可见, 3个阶段特征的存在可能是受孕震体的控制, 它可能是一个普遍性的规律, 应当成为地震预测的重要依据之一。

#### 3.3 地震形变前兆象限性的初步解释

由理论公式计算表明, 把孕震体作为三维包体, 无论包体是硬的还是软的, 孕震体在

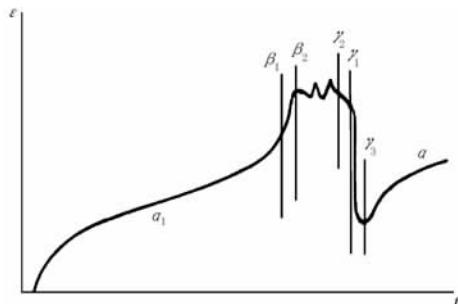


图2 地形变资料 $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ 的3个阶段  
(Mesherikov, 1968; 藤井阳一郎, 1974)

地表产生的体应变的空间分布的共性特征都具有象限性；而两者间也存在差异，硬包体产生的体应变具有阶段性变化，即体应变的空间范围和强度随时间存在逐渐增强的过程，在极值后，还存在一个缩小和变弱的过程。而软包体产生的体应变则只具有趋势性变化。许昭永等(1997)的实验也得到类似结果。在地震前兆中，大同、张北、包头等地震前的形变、地电阻率均存在不同程度的象限性特征(宋治平等，2001)。这一特征的深入研究对地震发生地区的估计具有指导意义。

### 3.4 地震短临前兆突发性、多变性与复杂性的初步解释

梅世蓉等(1993)曾指出，地震短临前兆没有显示出与中期趋势异常相似的稳定性，突发性、多变性是短临前兆的主要特征。短临前兆出现的时间常常与外因同步，对此该如何理解？

由边界上存在扰动(脉冲)对硬包体近源、远源场体应变的响应可知，脉冲的分布范围相当大，从近源区、远源区都有影响。但其强弱是有区别的，靠近震源区更强。对于一个均匀介质而言，这个结果当然是合理的。如果介质取为不均匀，假定在硬包体周围分布着若干长短不等、力学性质有差别的断层情况，二维包体扰动力学场的计算结果表明(宋治平，1996)，这时各个断层附近剪应力值将程度不等地增加，由此导致形变场中前所未有的此起彼复的新变化，形成前兆的多变性和突发性。许昭永等(1997)的岩石实验表明，主破裂前应变扰动具有突发性、丰富性和多变性。历次强震前的短临前兆现象中这种变化特征较多。由于各个断层的力学性质的差异，断层泥的厚薄不等，摩擦系数不同，它们的活动强弱也会有所不同，因此，对同等的边界动力变化的响应程度也不同。换句话说，短临前兆的响应强弱与震中距离间不存在肯定的反比关系。加之在断层活动过程中，还会引发许多派生现象，从而造成短临前兆场的突发、复杂、多变图象。

## 4 讨论与结论

本文对地震孕育过程中包体流变模型理论中的体应变、地倾斜的推导、体应变的计算及初步应用进行了论述，归纳起来主要有以下方面：

1) 建立了半无限流变介质中存在三维流变介质包体模型产生的正应变、剪应变与体应变的粘弹性理论解析表达式。

2) 通过计算三维粘弹性介质中球形硬包体与软包体在地面引起的体应变，得到了一些有意义的结果，发现球形硬包体的地面体应变随时间的变化曲线出现了特征不同的3个阶段( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ )，它与大量地形变资料出现的 $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ 阶段相似。而球形软包体则没有这个特征。其中， $\alpha$ 阶段的前兆为近源区和远源区向外扩展； $\beta$ 阶段的前兆为近源区和远源区都处于极值状态； $\gamma$ 阶段前兆为远源区表现出向近源区收缩，而近远区表现出向外扩展。边界微扰动对硬包体和软包体产生的体应变都具有响应，但硬包体的响应具有阶段性变化，而软包体的响应则只有趋势性变化。

3) 将理论结果与地震前兆的形态特征、象限性、阶段性、短临前兆的突发性、多变性以及复杂性等进行了初步讨论。这为地震前兆物理模式的建立提供了理论基础，并将在实现地震的物理预报方面发挥作用。

笔者用两篇文章的篇幅论述了包体流变模型理论的位移场与应变场的解析式以及体应变的分析与应用。关于三维包体的位移、正应变、剪应变的粘弹性解析解的深入计算和分

析, 地电、地磁、波速等前兆的粘弹性解析式的建立, 以及日、月引潮力对地震触发作用的理论研究等方面内容, 均值得进一步研究。

## 参 考 文 献

- 冯德益. 1983. 地震前兆三阶段发展过程的观测结果与理论[J]. 地震研究, 6(2): 211~226  
 李宣瑚. 1981. 水氡异常的扩散-收缩现象[J]. 地震, 5: 340~357  
 梅世蓉, 冯德益, 张国民, 等. 1993. 中国地震预报概论[M]. 北京: 地震出版社, 30~41  
 宋治平. 1996. 加卸载响应比与其它地震前兆时空演化研究及其应用[D]: [学位论文]. 北京: 国家地震局地球物理研究所, 15~110  
 宋治平, 尹祥础, 梅世蓉. 2000. 包体流变模型体应变时空演化的理论分析[J]. 地震学报, 22(5): 491~500  
 宋治平, 徐平, 张洪魁, 等. 2001. 地震前兆的象限性特征及其理论分析[J]. 地震学报, 23(1): 54~60  
 宋治平, 尹祥础, 梅世蓉. 2003. 地震孕育体源模型(一)——位移场[J]. 地震学报, 25(6): 574~582  
 王新华, 尹祥础, 滕春凯. 1984. 断层失稳前的扩展及电阻率前兆[J]. 中国科学(B辑), (11): 988~998  
 许昭永, 王彬, 赵晋明, 等. 1997. 组合坚固体岩样应变扰动和波速变化[J]. 地震学报, 19(1): 79~85  
 郑治真. 1979. 根据地下水资料的数字滤波探讨唐山大地震的孕育过程[J]. 地球物理学报, 22(4): 267~280  
 藤井阳一郎. 1974. 地震发生前の异常地壳变动继续时间とマグニチュードとの関係[J]. 地震, 27(2): 197~214  
 Mesherikov J A. 1968. Recent crustal movements in seismic region: geodetic and geomorphic data[J]. *Tectonophysics*, 6: 29~39  
 Добровольский И П. 1991. *Теория Подготовки Тектонического Землетрясения*[M]. Москва: ИФЗ АН СССР, 1~218

## 3-D RHEOLOGIC MODEL OF EARTHQUAKE PREPARATION (2). STRAIN FIELD AND ITS APPLICATIONS

Song Zhiping<sup>1)</sup> Yin Xiangchu<sup>2)</sup> Mei Shirong<sup>2)</sup>

1) *Earthquake Administration of Shanghai, Shanghai 200062, China*

2) *Center for Analysis and Prediction, China Earthquake Administration, Beijing 100036, China*

**Abstract:** On the basis of the three-dimensional elastic inclusion model, we derived the analytic expression of viscoelastic strain field, *i. e.*, the analytic expression of viscoelastic strain at an arbitrary point  $(x, y, z)$  in  $x$ -axis,  $y$ -axis and  $z$ -axis produced by three-dimension inclusion in the semi-infinite rheologic medium defined by the standard linear rheologic model, namely the normal strains  $\epsilon_{xx}(r, t)$ ,  $\epsilon_{yy}(r, t)$  and  $\epsilon_{zz}(r, t)$ , the shear strains  $\epsilon_{xy}(r, t)$  and  $\epsilon_{yx}(r, t)$ ,  $\epsilon_{yz}(r, t)$  and  $\epsilon_{zy}(r, t)$ ,  $\epsilon_{xz}(r, t)$  and  $\epsilon_{zx}(r, t)$ , and the bulk-strain  $\theta(r, t)$ . By computing the spatial-temporal variation of bulk-strain on the ground produced by a spherical rheologic inclusion in a semi-infinite rheologic medium, we obtained some significant results that the bulk-strain variation with time produced by a hard inclusion has three stages ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) with different characteristics, which are similar to those of most geodetic deformation curves, but not the case for those by a soft inclusion. It is meaningful that these theoretical results have been applied to explain preliminarily the characteristics of stage variation of spatial-temporal evolution, the pattern and quadrant distribution of earthquake precursors, the changeability, spontaneity and complexity of short-term and imminent-term precursors. It offers a theoretical base to found the physical model of earthquake precursors and a reference to predict physically the earthquakes.

**Key words:** elastic inclusion theory; rheologic inclusion theory; strain field; analytical solution for viscoelastic problem; earthquake precursor