

成层自重弹性-粘弹性半空间内膨胀源 引起的地表形变和重力变化^{*}

王 勇 许厚泽

(中国武汉 430077 中国科学院测量与地球物理研究所)

摘要 研究了两个弹性层覆盖于一个 Maxwell 半空间模型内膨胀源(Mogi 模型)引起的地表形变和重力变化. 着重研究了数值计算方法和 Maxwell 半空间介质流变特性对地表垂直位移和重力的影响. 研究结果表明, Maxwell 半空间介质流变特性对地表垂直位移和重力的空间分布和量级都有影响, 尤其当源处于岩石层的地壳以下时, 介质流变特性对位移和重力有较大影响; 当膨胀和岩浆侵入地壳内时, 半空间流变特性的影响较小. 并且, 地表重力与垂直位移的比值不是常数, 而是随时间变化. 本文的模型和数值方法, 可以用于模拟火山区、地壳隆起区、地震区和地热场等长期地表形变和重力观测结果.

主题词 地壳形变 粘弹性 重力变化 膨胀源

引言

Hagiwara(1977)、Rundle(1978a)、Walsh 和 Rice(1979)等先后采用均匀弹性半无限空间模型对 Mogi 模型的重力效应做了研究. 最近, Fernandez 和 Rundle(1994)对二层弹性地壳模型的 Mogi 模型的重力效应做了进一步的研究. 王勇(1996)研究了一个 Maxwell 均匀半空间内膨胀源引起的地表位移和重力变化. 以上各模型并不能完全表征各类地球结构和介质的流变特性. 我们知道, 对于某些地质构造单元, 在岩石层之下存在着软流层, 它呈现出明显的非弹性. 对于长时间尺度力的作用, 岩石层表现为相对的刚, 即流变特性主要表现为弹性, 而软流层和地幔介质往往表现出重要的滞弹性性质, 甚至表现为流体. 针对上述地球介质的流变特性, 本文的模型将岩石层视为两个弹性层, 而软流层或地幔视为 Maxwell 体. 研究了在岩石层内热物质膨胀(Mogi 模型)和岩浆岩侵入等引起的地表形变和重力场变化.

对于本文线性弹性-粘弹性介质模型在内部力源作用下引起的地表变形和重力场变化问题, 要想直接通过运动方程、本构关系和边界条件求解, 一般来说十分复杂. 然而, 著名的对应性原理使得我们能够通过解相应的弹性问题间接获得非弹性解. 对应原理指出, 在初始应力条件为零时, Laplace 变换域的解与相应的弹性问题(即具有相同的密度、弹性参数分布的方程和边界条件)形式一样. 该原理由 Lee(1955)和 Boit(1955, 1956)导出, 后来由 Peltier(1974)推广到初始应力不为零的情况. 根据对应原理, 线性粘弹性问题的解便可

* 1995-08-03 收到初稿, 1997-03-24 收到修改稿并决定采用.

在频率域中借助于弹性问题的解, 然后将结果反变换到时间域。一般情况下, 运用对应原理求解非弹性问题的解最为困难的工作是将频域中的解反变换至时间域。通常情况下, 频率域中的解是较复杂的, 很难用解析的方法做反变换, 而需采用数值的方法。本文首先讨论了数值计算方法, 着重探讨了介质流变特征对地表垂直位移和重力的影响。

1 基本方程和数值计算方法

假定地球的岩石层为弹性成层各向同性自重半空间, 在内部力源作用下, 其密度、重力及其位的变化很小, 作为一级近似, 在柱坐标下满足以下弹性平衡方程和泊松方程 (Love, 1944)

$$\nabla \cdot \sigma + \rho g \nabla \cdot U e_z - \rho \nabla (\varphi + \rho U_r) = \rho f \quad (1)$$

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi G \nabla \cdot (\rho U) \quad (2)$$

这里, U 是位移张量, ρ 是未扰动密度, φ 是扰动位, ρf 是内部力源, σ 是应力张量, 它满足以下应力-应变关系 (Love, 1944)

$$\sigma = \lambda (\nabla \cdot U) I e_z + \mu (\nabla U + (\nabla U)^T) e_\theta \quad (3)$$

式中, λ, μ 是 Lamé 弹性常数, I 是单位矢量。对于内部膨胀源, 方程(1)、(2)的求解可采用传播矩阵法 (Haskell, 1953; Gilbert, Backus, 1966; Fernandez, Rundle, 1994)。膨胀源并伴随有岩浆岩侵入的源函数为 (Fernandez, Rundle, 1994)

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1 = \frac{2Pa^3(1-\sigma)\delta}{\mu(1+\delta)} \\ D_2 = \frac{2Pa^3(1-\sigma)\delta}{1+\delta} \\ D_3 = \frac{Mg}{4\pi k} \\ D_4 = 2GM \end{array} \right. \quad (4)$$

这里, P 是膨胀源内部压力, a 是源半径, $\delta = 1/(3-4\nu)$, M 为膨胀源内部异常质量, G 是牛顿万有引力常数, ν 为泊松比。地表重力变化为 (Rundle, 1982, 1983)

$$g = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - 4\pi \rho G U_z + \gamma_{FA} U_z \quad (5)$$

γ_{FA} 为自由观测重力变化梯度 $0.3086 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}^{-1}$ 。

如果地幔介质为各向同性线粘弹性, 满足以下应力-应变方程 (Rundle, 1978b)

$$\sigma(t) = \delta(t) \int_{-\infty}^t \lambda(t-\tau) \frac{\partial \epsilon_{kk}(\tau)}{\partial \tau} d\tau + 2 \int_{-\infty}^t \mu(t-\tau) \frac{\partial \epsilon_{ij}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (6)$$

这里, $\lambda(t), \mu(t)$ 为松弛函数, $\epsilon(\tau)$ 为应变张量, $\delta(t)$ 是 Kronecker delta 函数。对方程(6)作 Laplace 变换可以得到

$$\bar{\sigma}_{ij}(s) = \delta_{ij} s \bar{\lambda}(s) \bar{\epsilon}_{kk}(s) + 2 s \bar{\mu}(s) \bar{\epsilon}_{ij}(s) \quad (7)$$

对比方程(3)与(7), 不难发现, 式(7)与式(3)有相同的形式, 根据对应原理, 用 $s\bar{\lambda}(s), s\bar{\mu}(s)$ 替代弹性解的相应弹性参数 λ, μ , 然后将弹性解反 Laplace 变换至时间域, 便可得到粘弹性问题的解。

对于本文的两层弹性层覆盖于粘弹性半空间模型, 如果用 $s\bar{\lambda}(s), s\bar{\mu}(s)$ 替代相应弹性

模型中半空间的弹性参数 λ, μ , 然后将弹性解反 Laplace 变换至时间域, 便可得到本文模型的解. 但是, 本文模型对应的弹性模型的解是一个非常复杂的函数形式. 解析的方法得不到其 Laplace 反变换解. 因此, 需采用数值的方法. 假设本文模型的解为 $U_e(\xi, t)$, 将 $U_e(\xi, t)$ 展开为以下函数形式:

$$U_e = U_e|_0 + \xi \frac{\partial U_e}{\partial \xi}|_0 + \eta \frac{\partial U_e}{\partial \eta}|_0 + \frac{1}{2} \xi^2 \frac{\partial^2 U_e}{\partial \xi^2}|_0 + \xi \eta \frac{\partial^2 U_e}{\partial \xi \partial \eta}|_0 + \frac{1}{2} \eta^2 \frac{\partial^2 U_e}{\partial \eta^2}|_0 + \dots \quad (8)$$

式(8)中“ $|_0$ ”表示 ξ, η 为零; 而 ξ, η 分别为

$$\xi = \frac{1 - (\frac{\mu_e}{\mu_0})}{1 + (\frac{\mu_e}{\mu_0})} \quad (9)$$

$$\eta = \frac{1 - (\frac{\lambda_e}{\lambda_0})}{1 + (\frac{\lambda_e}{\lambda_0})} \quad (10)$$

以上两式中, μ_0, λ_0 是 $\mu(t), \lambda(t)$ 的初始值, 而 μ_e, λ_e 为某一时刻的松弛函数. 如果将地幔介质视为 Maxwell 体, 并且只有 μ 有松弛现象, 即 $\eta=0$. 由式(7)可以得到(王勇, 1996)

$$\bar{\xi}_n(s) = \frac{1}{\tau} \frac{1}{s} \left(\frac{1}{s + (1/\tau)} \right)^n \quad (11)$$

式中, $\tau=2\eta_0/\mu_0$ 为松弛时间, η_0 为粘滞度. 对式(11)作反 Laplace 变换后可得

$$\xi_n(t) = \left[1 - e^{-t/\tau} \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{t}{\tau} \right)^m \frac{1}{m} \right] \quad (12)$$

至此, 本文模型的解便归结为首先确定式(8)中 ξ 的系数. 求解的方法是通过方程(1)和(2)的以下弹性解如 $U_e(0), U_e(\Delta t), U_e(2\Delta t), U_e(3\Delta t) \dots$ 等, 然后采用最小二乘配置的方法求出式(8)中 ξ 的系数, 便可得到不同时刻的地表位移和重力位的变化, 再由式(5)计算地表重力变化.

2 数值结果和讨论

应用上节中所述方法, 计算了两层弹性层覆盖于一个 Maxwell 半空间模型内膨胀和岩浆岩侵入引起的地表形变和重力变化. 着重讨论了半空间介质的流变特性对位移场和重力场的影响.

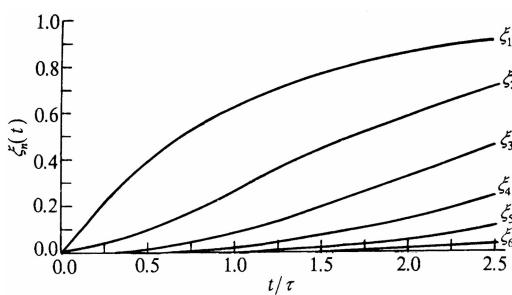


图 1 函数 $\xi_n(t)$ 随时间的变化

数值计算中首先需确定式(8)展开的阶数. 对于一个较为极端的情况, 当 $\mu_e/\mu_0 = 0.3$ 时, $\xi^6 = 0.024$, 即将解展至 6 阶时其精度可以达到 1%. 同样, 我们检验函数 $\xi_n(t)$ 的展开式, 图 1 是函数 $\xi_n(t)$ 随时间变化图. 从图中可以看到, 在 $t \leq 2\tau$ 时, $\xi_6(t)$ 可以达到相同的精度.

图 2 给出的是 Maxwell 半空间介质流变特性对地表重力和垂直位移影响. 由计算结果

可以看到,介质流变特性对地表重力和垂直位移的空间图象和量级均有影响.半空间的粘滞效应使得垂直位移和重力空间图象的零线位置发生变化,影响量级也随着时间发生变化。

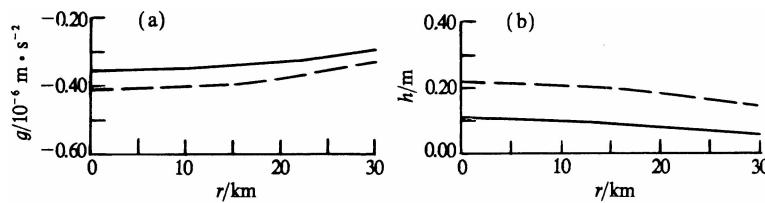


图 2 Maxwell 半空间介质流变特性对地表重力、垂直位移的影响. $p=10^{10}$, $a=M=1$, $d=80$ km, 两层弹性层厚度分别为 40 和 80 km, $\lambda_1=\mu_1=1.39\times 10^{10}$ N·m⁻², $\lambda_2=\mu_2=3.65\times 10^{10}$ N·m⁻², $\lambda_3=\mu_3=6.67\times 10^{10}$ N·m⁻², $\rho_1=2.2$ g/m³, $\rho_2=2.8$ g/m³, $\rho_3=3.2$ g/m³. 虚线为 $t/\tau=0$, 实线为 $t/\tau=2$

(a) 重力变化; (b) 地表垂直位移

图 3 是 Maxwell 半空间介质流变特性对地表重力与垂直位移比值的影响. 由图 3 可以看到, 地表重力与垂直位移比值受介质流变性的影响而随时间变化; 但在均匀弹性半空间模型中, 膨胀源引起的地表重力与垂直位移比值是一个常数, 不随时间变化.

图 4 显示了不同深度的源受 Maxwell 半空间流变特性的影响. 从图 4 可以看出, 当源位于地壳内时, 受半空间的介质流变性的影响很小. 因此, 在研究地表内膨胀和岩浆岩侵入以及内部非均匀载荷的位移和重力效应时, 可不考虑软流层的流变特性, 直接采用弹性模型进行计算. 而当源位于地壳以下时, 在长时间尺度力的作用下, 需考虑地幔介质粘滞效应的影响.

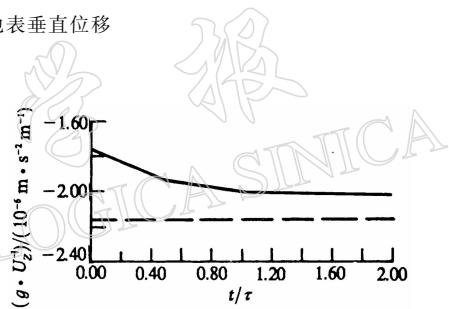


图 3 Maxwell 半空间介质流变特性对地表垂直位移与重力的比值的影响。

$r=0$, 其余参数同图 2. 实线为本文模型的解, 虚线为均匀弹性半空间模型的解

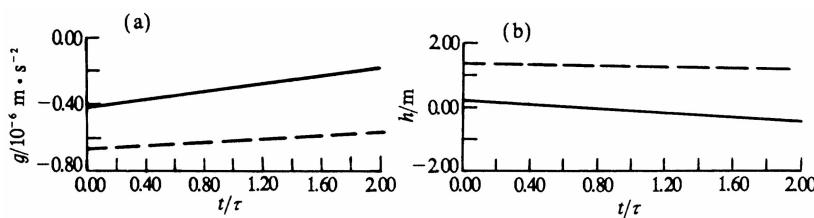


图 4 不同深度的源引起的地表垂直位移和重力变化受 Maxwell 半空间介质流变特性影响。

计算参数同图 2. 虚线表示源深度为 40 km, 实线表示源深度为 80 km

(a) 重力变化; (b) 地表垂直位移

3 结论

对于两个弹性层覆盖于一个 Maxwell 半空间模型内膨胀源(Mogi 模型)引起的地表形变和重力变化, Maxwell 半空间介质流变特性对地表垂直位移和重力的空间分布和量级都有影响. 尤其当源处于岩石层的地壳以下时, 介质流变特性对位移和重力有较大影响. 当膨胀和岩浆侵入在地壳内时, 半空间的流变特性的影响较小. 并且, 地表重力与垂直位移的比值不是常数, 而是随时间变化. 本文的模型和数值方法可用于研究岩石层长期热膨胀和岩浆活动等造成的地表位移和重力变化, 以及模拟火山区、地壳隆起区、地震区、地热场等长期的地形变和重力变化观测资料. 另外, 用本文的模型和方法也很容易研究位错源, 以及岩石层的内负荷等引起的地壳形变和重力场变化.

参 考 文 献

- 王勇, 1996. 粘弹性半空间内膨胀引起的地表垂直位移和重力变化. 地壳形变与地震, **11**(2): 10~15
- Biot M A, 1955. Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena. *J Appl Phys*, **25**: 1 385~1 391
- Biot M A, 1956. Dynamics of viscoelastic anisotropic media. In: Biot MA(Ed), *Proceeding of the Conference on Solid Mechanics*, 94~108
- Fernandez F, Rundle J B, 1994. Gravity changes and deformation due to a magmatic intrusion a two-layered crustal model. *J Geophys Res*, **99**: 2 737~2 746
- Gilbert J F, Backus G, 1966. Propagator matrices in elastic wave and vibration problems. *Geophysics*, **31**: 326~332
- Hagiwara Y, 1977. The Mogi model as a possible cause of the crustal uplift in the eastern part of Izu Peninsha and the related gravity changes. *Bull Earthq Res Inst Univ Tokyo*, **52**: 301~309
- Haskell N A, 1953. The dispersion of surface waves on multilayered media. *Bull Seism Soc Amer*, **43**: 421~440
- Lee E, 1955. Stress analysis in viscoelastic bodies. *Quart J Appl Math*, **13**: 183~190
- Love A E H, 1944. *Some Problems of Geodynamics*. New York: Cambridge University Press
- Peltier W R, 1974. The impulse response of a Maxwell earth. *Rev Geophys Space Phys*, **12**: 649~669
- Rundle J B, 1978a. Gravity changes and the Palmdale uplift. *Geophys Res lett*, **5**: 41~44
- Rundle J B, 1978b. Viscoelastic crustal deformation by finite Quasi-static sources. *J Geophys Res*, **83**: 5 937~5 945
- Rundle J B, 1980. Static elastic-gravitational deformation of a layered half-space by point couple sources. *J Geophys Res*, **85**: 5 355~5 363
- Rundle J B, 1982. Deformation, gravity and potential changes due to volcanic loading of the crust. *J Geophys Res*, **87**: 10 729~10 744
- Rundle J B, 1983. Correction to deformation, gravity, and potential changes due to volcanic loading of the crust. *J Geophys Res*, **88**: 10 647~10 652
- Walsh J B, Rice J R, 1979. Local changes in gravity resulting from deformation. *J Geophys Res*, **16**: 445~448