

尹继尧, 朱元清, 宋治平, 张国民, 薛艳, 刘杰. 2011. Morlet 小波显著性检验和精度分析在地磁场和地震活动性周期分析中的应用. 地震学报, 33(5): 663-671.

Yin Jiyao, Zhu Yuanqing, Song Zhiping, Zhang Guomin, Xue Yan, Liu Jie. 2011. Significance test and precision analysis of Morlet wavelet: Application to studying periodic variation of earthquake activity and geomagnetic field. *Acta Seismologica Sinica*, 33(5): 663-671.

# Morlet 小波显著性检验和精度分析 在地磁场和地震活动性周期 分析中的应用<sup>\*</sup>

尹继尧<sup>1,2)</sup> 朱元清<sup>2)</sup> 宋治平<sup>2),\*</sup> 张国民<sup>4)</sup> 薛艳<sup>3)</sup> 刘杰<sup>3)</sup>

1) 中国上海 200092 同济大学海洋与地球科学学院

2) 中国上海 200062 上海市地震局

3) 中国北京 100045 中国地震台网中心

4) 中国北京 100036 中国地震局地震预测研究所

**摘要** 首先通过对加入随机噪声的合成信号进行 Morlet 小波变换并进行显著性检验, 分析所得信号的周期成分的显著性和非显著性, 然后研究信号周期长短、信号观测时间段长短与精度之间的关系. 在此基础上, 以活动周期比较稳定的太阳黑子活动作为实例分析, 结果显示本文的精度分析和显著性检验方法对于周期谱的精度和显著性研究是可行的. 最后将该方法应用于全球地震活动周期谱的分析, 求出全球地震活动周期谱及其显著性与精度. 研究表明, 在利用 Morlet 小波分析地磁场和地震活动性周期时引入显著性检验, 并结合本文给出的精度, 可以从数据中提取出周期谱及其显著性和精度.

**关键词** Morlet 小波 精度 太阳黑子活动 全球地震活动 显著性检验

doi:10.3969/j.issn.0253-3782.2011.05.010

中图分类号: P315.01

文献标识码: A

## Significance test and precision analysis of Morlet wavelet: Application to studying periodic variation of earthquake activity and geomagnetic field

Yin Jiyao<sup>1,2)</sup> Zhu Yuanqing<sup>2)</sup> Song Zhiping<sup>2),\*</sup>  
Zhang Guomin<sup>4)</sup> Xue Yan<sup>3)</sup> Liu Jie<sup>3)</sup>

1) School of Ocean and Earth Science, Tongji University, Shanghai 200092, China

2) Earthquake Administration of Shanghai Municipality, Shanghai 200062, China

3) China Earthquake Networks Center, Beijing 100045, China

4) Institute of Earthquake Science, China Earthquake Administration, Beijing 100036, China

**Abstract:** Firstly analyzed the signal with random noise by using Morlet wavelet

<sup>\*</sup> 基金项目 国家“973”项目(2008CB425704)资助.

收稿日期 2010-08-30 收到初稿, 2011-03-22 决定采用修改稿.

<sup>†</sup> 通讯作者 e-mail: zpsong@sohu.com

transformation and tested significance level of the resulted period components, then studied the relationship between signal periods, the time length of observational data and wavelet transformation precision. As a test example we analyzed sunspot activity, which has relatively stable activity cycles. The result shows that the precision analysis and significance test used in this paper are feasible for studying periodicity of geophysical activity. Finally, this method is applied to analyzing global seismicity period, and the periods of global seismicity and their precision are given. Result of this study indicates that, when analyzing geophysical data with Morlet wavelet, researchers can acquire more objective periods and their precision from the signals with noise by combining precision estimation and significance test.

**Key words:** Morlet wavelet; precision; sunspot activity; global seismic activity; significance test

## 引言

Morlet 小波作为一种分解工具和检测长时间序列中多尺度突变的方法,已广泛应用于地学领域.它同时具有时域和频域的良好局部化特征,而且随着信号不同频率成分在时间(空间)域取样的疏密,调节其放大倍数,可以清楚地分析信号在各个层次上的变化,从而聚焦到分析信号的细节.该方法在地震行业相关学科的数据处理和活动性分析中得到了广泛的应用(白春华,徐文耀,2010;邵辉成等,2004; Laura, David, 1995; 高静怀等,1996; 刘太中等,1995; 冯博等,1997; 刘希强等,1998; 朱海生等,2007).

目前国内越来越多的学者使用 Morlet 小波系数进行定性分析地学领域中相关信号的活动周期.例如,白春华和徐文耀(2010)利用 Morlet 小波,通过分析历史地磁场模型 gufml(时间跨度从 1590—1990 年),考察主磁场长期变化场(台场)的周期性;邵辉成等(2004)利用 Morlet 小波在多时间尺度上研究百年来中国大陆地震活动时间序列的变化特征,并对局部的信息进行描述,能较快地确定地震活动格局的转变时间;朱海生等(2007)利用 Morlet 小波变换研究张家口地区地震时间序列中包含的多层次时间周期结构,并讨论了其在地震活动预测中的应用,为该地区的中长期地震预测提供参考.包括上述文献在内的国内很多学者在利用小波变换分析活动周期时都只是针对一些定量结果进行解释,但没有对结果进行显著性分析和检验,使得分析可能缺乏有效的显著性检验而缺乏说服力.

本文主要针对上述问题,分析小波变换的精度并引入小波变换显著性检验;通过对太阳黑子活动分析,探讨两者在活动周期中的作用;最后作为该方法在分析地磁场和地震活动性周期时的应用,利用小波变换对 1900—2009 年全球  $M \geq 7.0$  地震活动性进行分析,得到了置信度超过 95%的  $(32 \pm 1)$  年、 $(46 \pm 1.4)$  年和  $(80 \pm 4.2)$  年的 3 个活动周期,其中  $(46 \pm 1.4)$  年左右活动周期尤为稳定和显著.

## 1 Morlet 小波变换及显著性检验方法

### 1.1 Morlet 小波变换

Morlet 小波是一个由 Gauss 函数调制的连续性平面波,母函数为(Torrence, Compo, 1998)

$$\Psi(t) = e^{ict} \left( e^{-\frac{t^2}{2}} - \sqrt{2} e^{-\frac{t^2}{4}} e^{-t^2} \right) \quad (1)$$

离散小波变换公式为

$$W_f(a, b) = |a|^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^N f(i\delta t) \psi^* \left( \frac{i\delta t - b}{a} \right) \quad (2)$$

式中, \* 表示复共轭;  $a$  为尺度因子(与周期和频率有关);  $b$  为平移因子(时间位置);  $i$  为资料序列时间位置标号;  $f(t)$  为变量时间序列;  $W_f(a, b)$  为小波系数;  $\delta t$  为变量序列时间间隔. 因为小波是复数形式的, 所以小波变换后的系数也是复数.

小波功率谱定义为

$$E_{a,b} = |W_f(a, b)|^2 \quad (3)$$

总体小波功率谱  $E_a$  表征不同尺度  $a$  对应的能量密度, 定义为

$$E_a = \frac{1}{N} \sum_{b=1}^N |W_f(a, b)|^2 \quad (4)$$

在实际应用中, 有时人们把小波变换的尺度当作周期分析, 这是不对的. 根据 Torrence 和 Compo(1998)导出的关系, Morlet 小波尺度  $a$  与周期  $T$  有如下对应关系:

$$T = \frac{4\pi a}{c + \sqrt{2 + c^2}} \approx 1.033a \quad (5)$$

式中,  $c$  为无维度的频率. 为满足容许性条件(admissibility condition), 根据 Torrence 和 Compo (1998), 这里将  $c$  的值取为 6.

## 1.2 显著性检验方法

小波功率谱是否显著, 用红噪声或白噪声标准谱进行检验. 小波功率谱遵从  $\chi^2$  分布特征(Torrence, Compo, 1998). 首先计算小波功率谱分布的有效自由度, 给出  $\chi^2$  分布的显著性水平, 如 95% 的置信率; 然后就可以计算红噪声或白噪声的理论功率谱  $P$ . 当总体小波功率谱( $E_a$ )大于理论谱时, 说明这是显著可信的. 具体检验公式如下:

理论功率谱

$$P = \frac{\sigma^2 Pa \chi_\nu^2}{\nu} \quad (6)$$

其中,  $\chi_\nu^2$  是自由度为  $\nu$  的  $\chi^2$  的值,  $\sigma^2$  为原资料序列的方差.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (7)$$

$Pa$  为红噪声或白噪声谱

$$Pa = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos\left(\frac{2\pi\delta t}{1.033a}\right)} \quad (8)$$

式中,  $\alpha$  为原序列滞后 1 的自相关系数;  $\delta t$  为资料序列时间间隔. 如果  $E_a > P$ , 说明总体小

波功率谱对应的周期是显著的.

2 合成信号的周期谱及精度的统计分析

本文合成两个正弦函数加入噪声作为合成信号,对上述小波分析方法进行检验.具体函数如下:

$$y = A_1 \sin \frac{2\pi t}{f_1} + A_2 \sin \frac{2\pi t}{f_2} + w(t) \tag{9}$$

式中,振幅  $A_1$  和  $A_2$ , 频率  $f_1$  和  $f_2$  以及噪音  $w(t)$  均为随机数,振幅  $A_1$  和  $A_2$  为  $-1-1$  的随机数,频率  $f_1$  和  $f_2$  为  $10-130$  年的随机数,  $w(t)$  为  $-5-5$  的随机数.

同时,为更加客观地研究小波分析方法所得结果精度和观测时间长度、周期大小关系等,方案设计如下:

- 1) 分别设定观测时间长度为 110 年, 210 年和 310 年进行计算.
- 2) 每个时间长度内随机计算 250 次.
- 3) 利用相对误差(计算周期与实际周期之间的差值对实际周期的比值)参数进行分析.

图 1 给出了相对误差频次统计分布图. 从图中可以看出, 其所得统计结果也基本符合正态分布. 因此, 可以利用正态分布的特性来统计误差分布和大小. 具体结果见表 1. 表 1 为合成信号分时间段、分周期误差概率统计表. 从表中我们可以得到以下结果.

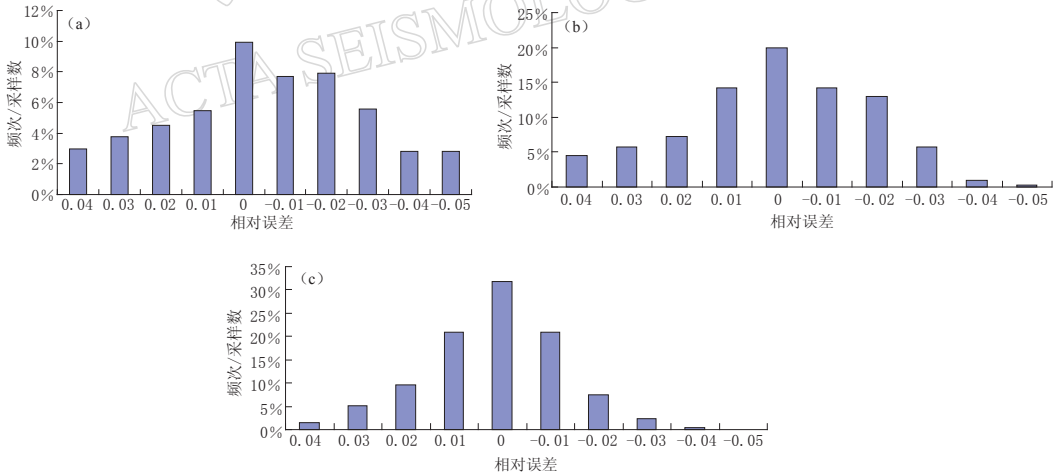


图 1 观测时段分别为 110 年(a)、210 年(b)和 310 年(c)的相对误差频次统计分布图

Fig. 1 Histogram of frequency statistics of relative error for observation span of 110 years(a), 210 years(b) and 310 years(c), respectively

1) 周期长短与观测时间长度有着重要的关系. 从表 1 中可以看出, 当周期大于观测时间长度一半时, 小波变换所得结果精度明显较低. 例如, 观测时间段为 110 年中的 50—69.9 年周期和 70—89.9 年周期, 以及 210 年中的 90—109.9 年周期和 110—129.9 年周期. 要达到 95% 概率的相对误差大部分在 2%—3% 左右. 当周期小于观测时间长度一半时, 小波变换所得结果精度较高, 相对误差值大部分在 2%—3% 左右就能达到 95% 的概率.

2) 分析结果精度与观测时间长短有着重要关系, 观测时间越长, 所得结果精度越高. 总之, 表 1 给出了合成信号按时间段、按周期误差的概率统计表. 在利用 Morlet 小波

变换分析地球物理场信息时,可结合表 1 对所得结果进行精度评价. 此外,表中还给出了 95%, 90%和 85%概率的误差值.

图 2 为随机模拟其中一次合成信号的时序变化及活动周期谱特征. 从图 2a 中可以

表 1 合成信号分时间段、分周期误差概率统计表

Table 1 Statistical tables of error probability about signal with random noise for different observation span and different periods

观测时间 段/a	周期段/a						
	10—29.9	30—49.9	50—69.9	70—89.9	90—109.9	110—129.9	
110	标准差	1.82%	2.78%	2.66%	4.67%		
	均值	−0.35%	−1.51%	4.55%	−2.39%		
	概率 95%	2.65%	3.07%	8.93%	5.30%		
	概率 90%	1.99%	2.06%	7.96%	3.60%		
	概率 85%	1.54%	1.38%	7.31%	2.45%		
210	标准差	1.73%	1.14%	1.29%	1.45%	4.24%	2.42%
	均值	−0.16%	−0.54%	0.93%	1.31%	2.75%	6.72%
	概率 95%	2.69%	1.34%	3.05%	3.69%	9.73%	10.69%
	概率 90%	2.06%	0.92%	2.59%	3.17%	8.19%	9.82%
	概率 85%	1.64%	0.64%	2.27%	2.81%	7.15%	9.22%
310	标准差	1.63%	0.95%	0.82%	0.76%	1.46%	1.38%
	均值	−0.04%	−0.09%	0.63%	0.63%	1.07%	2.17%
	95%	2.64%	1.48%	1.98%	1.89%	3.47%	4.43%
	90%	2.05%	1.13%	1.68%	1.61%	2.94%	3.93%
	85%	1.65%	0.90%	1.48%	1.42%	2.58%	3.59%

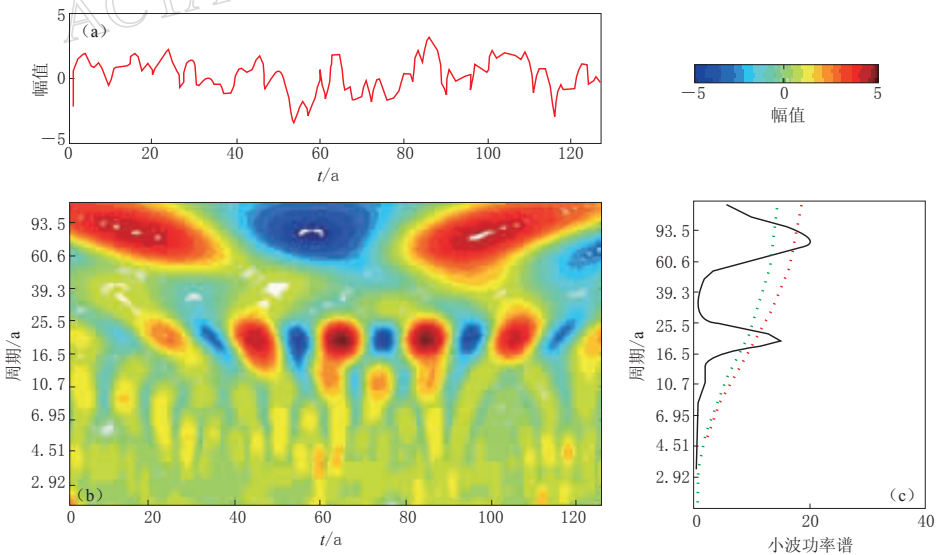


图 2 合成信号的周期谱分析

(a) 加入噪声的合成信号; (b) 合成信号 Morlet 小波分析功率谱; (c) 合成信号显著周期谱  
(红色、绿色虚线分别为 95%和 90%置信度). 右上图为(b)的图标

Fig. 2 Period spectrum analysis of a signal with random noise

(a) Time series of a signal with random noise; (b) Morlet wavelet spectral analysis of a signal with random noise;  
(c) Significant period of signal with random noise. Red and green dashed lines indicate confidence level of 95% and 90%, respectively. Upper-right color bar is for Fig. (b)

看到, 由于合成了两个周期以及加入了随机噪声, 合成信号时序曲线变化整体上看比较杂乱无章, 看不出明显的周期. 通过 Morlet 小波分析, 从图 2b 和图 2c 中可以明显地看到合成信号的活动周期性非常显著, 存在 20.4 年和 80.6 年的周期变化, 且两个周期的置信度都超过 95%. 与原函数进行比较, 相对误差分别为 2% 和 0.8%, 属于表中给出的 95% 概率相对误差范围内. 对于本文所分析的以 1 年为单位的活动周期, 其精度属于允许的范围. 分析表明, 对加入随机噪声的合成信号进行小波分析, 能够基本检测出原来的周期成分, 所得结果误差不超过 1 年. 这一检验结果表明应用本文的方法研究周期谱是可行的.

3 太阳黑子活动周期谱及显著性与精度分析

利用国际地球物理数据中心(<http://www.ngdc.noaa.gov/>)的太阳黑子年均值资料对小波分析方法进行检验, 选择的时间尺度为 1700—2008 年, 窗长为 1 年.

图 3 给出了太阳黑子年变化及活动周期谱特征. 太阳黑子的年变化曲线(图 3a)表明, 太阳黑子的活动周期性非常强, 强弱交替比较明显.

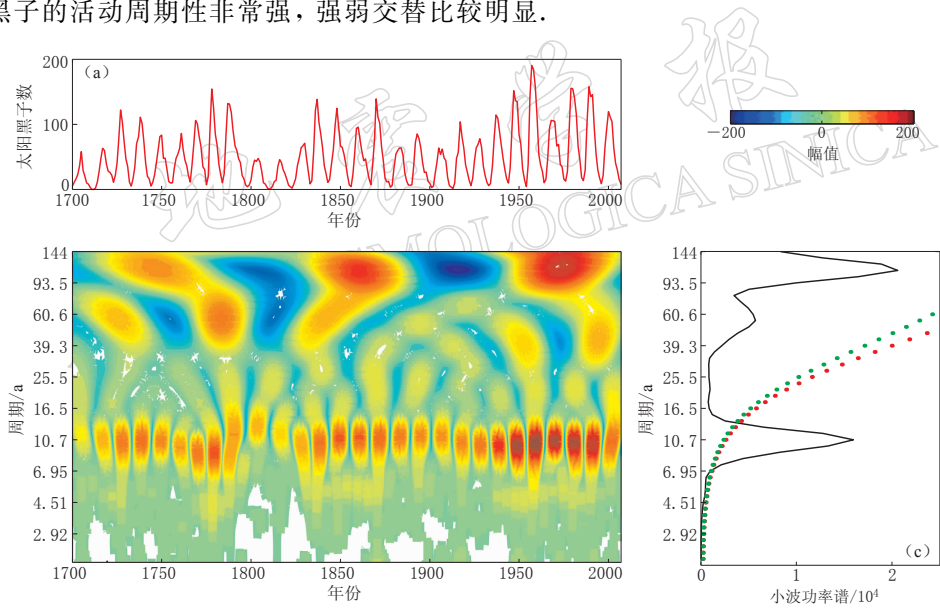


图 3 太阳黑子数的周期谱分析

(a) 太阳黑子数年均值变化; (b) 太阳黑子数 Morlet 小波分析功率谱; (c) 太阳黑子数显著周期谱(红色、绿色虚线分别为 95% 和 90% 置信度检验). 右上图为(b)的图标

Fig. 3 Period spectrum analysis of sunspots

(a) Time series of sunspot numbers; (b) Morlet wavelet spectral analysis of sunspots; (c) Significant periods of sunspots. Red and green dashed lines show confidence level of 95% and 90%, respectively. Upper-right color bar is for Fig. (b)

由太阳黑子活动的 Morlet 小波分析表明(图 3b), 太阳黑子的活动周期性非常明显, 存在 11 年左右、60 年左右和 110 年左右的周期变化. 其中, 11 年左右的周期更显著些. 为了进一步确定所得到的周期变化情况, 图 3c 给出了小波功率谱在所有时间的累积平均值, 即总体小波功率谱, 红色虚线为 95% 置信度检验曲线, 绿色虚线为 90% 置信度检验曲线. 从图 3c 并结合表 1 的统计结果可以看出, 对于达到 95% 概率, 太阳活动存在着  $(11.3 \pm 0.3)$  年、 $(56.8 \pm 1.1)$  年和  $(113.6 \pm 5.0)$  年的周期. 其中  $(11.3 \pm 0.3)$  年通过了 95% 置信度

检验曲线, 为显著周期,  $(56.8 \pm 1.1)$  年和  $(113.6 \pm 5.0)$  年的周期未通过 90% 检验曲线, 周期没有前者显著。

分析表明, 太阳黑子活动存在 3 个变化周期. 其中  $(11.3 \pm 0.3)$  年周期为显著周期, 通过了 95% 置信度检验, 其余周期不显著。

Le 和 Wang(2003)以及 Le(2004)的研究表明, 太阳黑子活动具有 11 年、53 年和 101 年周期, 每个周期在不同时段振幅大小表现是不一样的. 李栋梁等(2005)对近 1000 年太阳黑子活动进行了研究, 发现太阳黑子最显著的周期是准 11 年, 近 1000 年平均为 11.24 年. 活动周期在单数世纪(11, 13, 15, 17, 19)平均值均偏长( $>11.24$  年), 5 个单数世纪的平均长度为 11.57 年. 活动周期一般在双数世纪平均值均偏短( $<11.24$  年), 5 个双数世纪(12, 14, 16, 18, 20)的平均长度为 10.91 年. 廖德春和廖新浩(2001)对太阳黑子数进行谱分析时, 发现存在着 11.3 年的峰值, 表明存在着 11.3 年的显著周期. 上述文献研究所得的 11 年尺度周期范围在 10.91—11.57 年, 而本文周期范围为 11—11.6 年, 基本包含了上述结果, 可见本文的精度范围是比较客观的. 对于 Le 和 Wang(2003)以及 Le(2004)得到的 53 年和 101 年周期, 在尺度上本文的其它两个周期与这一结果是一致的, 具体数值上有所差异. 导致这种差异的原因是分析活动周期时使用的范围不一致引起. 本文使用的是 309 年的观测资料, 而该文献为 250 年的观测资料, 对于周期较小的 11 年尺度周期影响不大, 而对于周期大的 50 年尺度和 110 年尺度会产生偏差. 此外, 从小波分析结果看(图 3),  $(113.6 \pm 5.0)$  年周期谱分析峰值较突出, 高于  $(11.3 \pm 0.3)$  年周期成分. 如果不加入显著性检验, 会认为  $(113.6 \pm 5.0)$  年也为显著周期, 这与实际不符。

## 4 全球地震活动周期谱及显著性与精度分析

根据上述方法, 对全球地震活动性进行了定性分析并进行了显著性检验. 考虑到资料的完整性, 利用 1900—2009 年全球  $M \geq 7.0$  地震目录资料. 地震所释放的能量反映了地震活动的强弱, 故选择反映地震活动性的应变能作为分析参数. 应变能(贝尼奥夫应变)是与构造应力、地震过程联系最为密切的一个物理量, 在地震活动分析研究中是较为常用的量(Mogi, 1974; 傅淑芳, 刘宝诚, 1991). 考虑到资料的均一性, 取某一地区一定时间段内地震序列能量平方根组成时间序列  $f(t)$ .

$$f(t) = \sum_{i=1}^N \sqrt{E_i(t)} \quad (10)$$

其中,  $E_i$  是地震所释放的地震能量,  $N$  为一定时间段内的地震次数。

$$E_i = 10^{1.5M_i+11.8} \quad (11)$$

以年为采样时间, 计算应变能随时间的变化, 从而研究地震活动的周期谱特征。

从图 4 并结合表 1 可以得到, 对于达到 95% 概率, 全球地震活动在 1900—2009 年时间段中存在着置信度超过 95% 的  $(32 \pm 1)$  年、 $(46 \pm 1.4)$  年和  $(80 \pm 4.2)$  年的活动周期. 其中  $(46 \pm 1.4)$  年左右活动周期尤为稳定。

虽然地震震源位于地球内部, 但由于地球是一个行星, 它围绕着地轴作自转, 同时围绕着太阳作公转, 又随太阳系其它成员围绕着银河系中心运动. 在这样一个动态的多层次



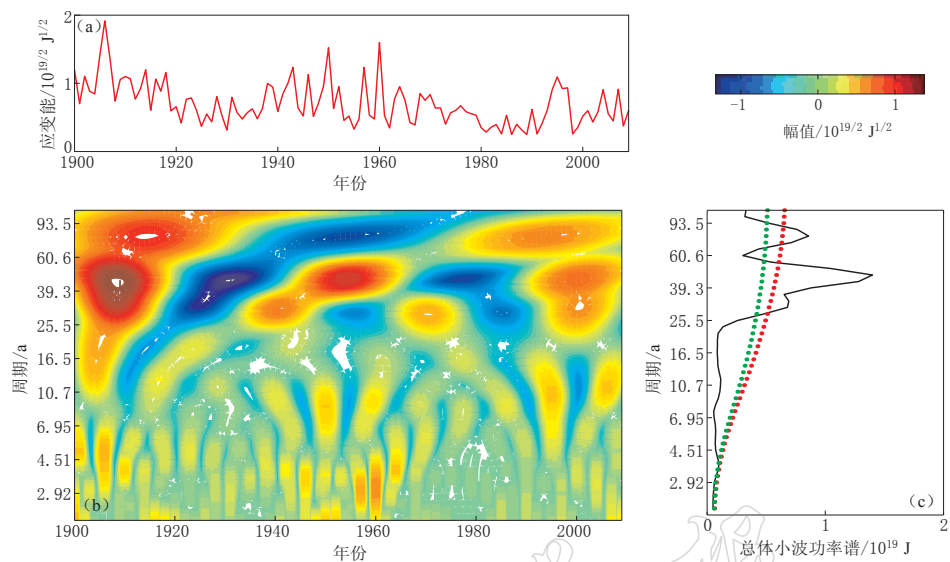


图 4 1900—2009 年全球地震活动性周期谱

(a) 应变能年均值变化; (b) 应变能小波功率谱; (c) 应变能显著周期谱(红色、绿色虚线分别为 95%、90%置信度检验). 右上图为(b)的图标

Fig. 4 Period spectrum analysis of global seismic activity (1900—2009)

(a) Time series of strain energy; (b) Morlet wavelet spectral analysis of strain energy; (c) Significant periods of strain energy. Red and green dashed lines show confidence level of 95% and 90%, respectively. Upper-right color bar is for Fig. (b)

系统中, 太阳系的引力场、电磁场等要素都是在不断变化着, 受其制约的地球在运动过程中亦在不断地变化着. 探讨地球外部环境因素对地震活动的影响, 这是国际地震灾害预测研究的发展方向之一. 例如白春华和徐文耀(2010)分析了地磁场长期变化十年到百年尺度的周期, 得到了稳定的 30 年周期、频散的准 50 年周期和强度变化的 110 年周期. 其中 30 年、50 年周期与本文分析所得的全球地震活动的  $(32 \pm 1)$  年、 $(46 \pm 1.4)$  年周期具有一致性.

5 讨论与结论

本文通过对加入随机噪声的合成信号进行小波分析, 研究 Morlet 小波变换结果的精度并进行显著性检验, 得到:

- 1) 分析信号的周期长短与观测时间长短有着重要的关系. 当周期大于观测时间长度一半时, 小波变换所得结果精度明显较低; 当周期小于观测时间长度一半时, 小波变换所得结果精度较高.
- 2) 分析结果精度与观测时间长短有着重要关系. 观测时间越长, 所得结果精度越高.
- 3) 在分析活动性时, 还要加入小波分析检验曲线, 可以更客观和有效地检测出显著周期. 最后, 通过方案设计, 给出了小波变换结果按时间段、按周期误差的概率统计表.

为验证上述研究所得的小波变换精度结果和显著性检验在分析活动周期中的作用, 本文利用前人研究较多并且周期较稳定的太阳活动进行了实例分析. 结果表明, 本文分析结果及给出的精度范围是比较客观的, 且显著性检验也是非常必要的, 否则无法区分显著



周期和非显著周期. 此外, 作为该方法在地球物理信息场中的应用, 本文利用小波变换对 1900—2009 年全球  $M \geq 7.0$  地震活动性进行分析, 得到了置信度超过 95% 的  $(32 \pm 1)$  年、 $(46 \pm 1.4)$  年和  $(80 \pm 4.2)$  年的 3 个活动周期. 其中  $(46 \pm 1.4)$  年左右活动周期尤为稳定和显著.

与其它方法相比, Morlet 小波在高频部分比较细腻地刻划了时间序列和内部结构, 而且从其模中可以体现出主要的活动周期. 该方法能够在多时间尺度上研究时间序列的变化特征, 并对局部的信息有比较好的描述, 能较快地确定地球物理信息场变化的转变时间. 同时能给出不同时间尺度的地球物理信息场活动特征, 反映地球物理信息场演化过程, 不仅可以将隐含在序列中的各种随时间变化的周期显现出来, 还能确定出地球物理信息场活动突变点的位置. 但其突变位置可能有少许的偏移(邵辉成等, 2004). 因此, 如果结合本文分析得出的精度, 在一定程度上能更客观地对小波变换结果进行评价.

综上所述, 利用 Morlet 小波变换分析地震活动性是可行的. 对于地磁场变化特征分析, 可以完全参照上述地震活动性分析. 在用该方法进行小波功率谱分析研究活动周期时, 应同时结合周期显著性检验和周期精度(表 1), 才能从包含各种噪音的信号中提取出稳定的周期谱. 此外, 本文考虑到便于分析太阳黑子 309 年观测资料和全球地震活动 110 年观测资料, 只探讨了 110 年、210 年和 310 年尺度的周期精度, 对于不同观测资料长度, 也可以按照本文的方法进行确定其精度.

## 参 考 文 献

- 白春华, 徐文耀. 2010. 主磁场长期变化十年至百年尺度的周期[J]. 地球物理学报, **53**(4): 904–911.
- 冯博, 柯熙政, 丁华灵. 1997. 太阳黑子数的子波分析[J]. 天体物理学报, **17**(2): 182–190.
- 傅淑芳, 刘宝诚. 1991. 地震学教程[M]. 北京: 地震出版社: 13–14.
- 高静怀, 汪文秉, 朱光明, 彭玉华, 王玉贵. 1996. 地震资料处理中小波函数的选取研究[J]. 地球物理学报, **39**(3): 392–400.
- 李栋梁, 郭慧, 李跃清, 钟海玲. 2005. 青藏高原及铁路沿线地表温度变化趋势预测[J]. 高原气象, **24**(5): 687–693.
- 廖德春, 廖新浩. 2001. 太阳活动影响地球自转长周期变化的新证据[J]. 科学通报, **46**(1): 13–16.
- 刘太中, 荣平平, 刘式达. 1995. 气候突变的子波分析[J]. 地球物理学报, **38**(2): 158–162.
- 刘希强, 周蕙兰, 郑治真. 1998. 基于小波包变换的弱震相识别方法[J]. 地震学报, **20**(4): 373–380.
- 邵辉成, 杜长娥, 刘志辉, 孙彦雪, 夏长起. 2004. 中国大陆地震活动的多尺度分析[J]. 地震学报, **26**(1): 102–105.
- 朱海生, 薛志芳, 李薇. 2007. 用小波变换分析张家口地区地震活动的周期结构[J]. 华北地震科学, **25**(1): 37–39.
- Laura J P, David D N. 1995. Wavelet analysis of velocity dispersion of elastic interface waves propagating along a fracture[J]. *Geophys Res Lett*, **22**(11): 1329–1332.
- Le G M, Wang J L. 2003. Wavelet analysis of several important periodic properties in the relative sunspot numbers[J]. *Chin J Astron Astrophys*, **3**(5): 391–394.
- Le G M. 2004. Wavelet analysis of the Schwabe cycle properties in solar activity[J]. *Chin J Astron Astrophys*, **4**(6): 578–582.
- Mogi K. 1974. Active periods in the world's chief seismic belts[J]. *Tectonophysics*, **22**(3–4): 265–282.
- Torrence C, Compo G P. 1998. A practical guide to wavelet analysis[J]. *Bull Amer Meteorol Soc*, **79**(1): 61–78.