

# 一个新的水位气压效应的理论解<sup>\*</sup>

赵鹏君

(中国合肥 230031 安徽省地震局)

## 摘 要

以气压影响承压井水位的偏微分方程为基础,推导了井孔与含水层之间流体互相渗流的边界条件。然后,用拉普拉斯变换法得到了任意气压过程作用下水位变化的时域解析解。此解由稳态项和迟滞项两部分组成,稳态项为气压系数与当时气压值的乘积,相当于今后气压不变的条件下时间趋于无穷时的水位;迟滞项是由于井中的流体和含水层中的流体交换,不能瞬时完成而引起的过渡过程。分析这个解可知,某时刻水位受气压的干扰是由该时刻之前所有气压变化量对水位影响的积分叠加。所以,我们进一步找到了脉冲气压过程作用下的井水位响应函数。计算表明:①脉冲响应函数总是从零值开始,时间趋于无穷时,其值趋于稳定值,此稳定值与气压效率成正比;②迟滞时间大小取决于含水层的力学性质和井的半径,渗透系数越大、井孔半径越小、含水层厚度越大,则迟滞时间越小。此解可作为今后进一步全面地分析气压干扰和研究实际校正方法的理论基础。

主题词 水位变化; 渗流; 动态响应

## 前 言

承压井水位记录中含有许多方面的信息,对于地震预报研究者来说,最关心的是如何从原始水位记录中排除各种干扰因素,提取出地层应力应变的变化过程信息。然而,地下水位所受到的干扰因素众多,如固体潮、降雨和气压变化等。其中,气压变化对井水位的影响尤为突出,地震观测井网中有将近 80% 的井有不同程度的气压干扰。因此,研究正确计算水位对大气压力波动的动态响应的方法,对于有效地利用水位记录资料,分析地震前兆具有十分重要的意义。这方面,前人已做了大量的工作。张昭栋等(1986)、汪成民等(1988)分别研究了不考虑井孔存在时孔隙压力对气压变化的响应,从而计算了相应的水头变化。张昭栋等(1989)详细讨论了水井水位对气压变化动态响应的频域解,考虑了井孔与含水层之间流体互相渗流的边界条件,并详细研究了响应与含水层参数的关系。汪成民(1990)论述了地下水位数据处理的几种做法。然而,以往在考虑井孔存在下的工作只是在频域里作的,严格运用这些结果须先对记录作富氏变换,在频域里应用上述结果计算每一谐波的响应,然后再作富氏反变换计算时域里的水位响应。本文的目的是找出一个气压影响承压井水位的时域解,以便我们可以在时域内尽量精确地进行气压

\* 1994 年 3 月 7 日收到初稿, 1994 年 8 月 3 日收到修改稿并决定采用。

校正, 为地下水位记录的分析和利用打下基础.

## 1 数理模型和求解

设由水平无限大单层承压含水层中心一口完善井所组成的井——含水层系统受气压影响而产生水位升降, 地层内的孔隙压力满足如下偏微分方程(张昭栋等, 1989):

$$\nabla^2 p = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{a}{k} \frac{\partial p_a}{\partial t} \quad (1)$$

式中,  $p$  为由大气压力变化引起的孔隙水压力相对于  $t=0$  时刻的变化;  $p_a$  为大气压力相对于  $t=0$  时刻值的变化,  $a$  为含水层导压系数,  $k$  为渗透系数,  $\alpha$  为含水层固体骨架垂向压缩系数,  $\nabla^2$  为拉普拉斯算子.

其中

$$a = \frac{k}{\alpha + \eta\beta}$$

$n$  为含水层孔隙度,  $\beta$  为孔隙水的体积压缩系数.

考虑井壁处的渗流及井底的压力平衡和井中流体的体积平衡, 可以导出井壁处的边界条件为

$$\frac{\partial p}{\partial r} - b \frac{\partial p}{\partial t} = -b \frac{\partial p_a}{\partial t} \quad r = R \text{ 时} \quad (2)$$

式中

$$b = \frac{R}{2Mk\rho g}$$

其中,  $M$  为含水层厚度,  $\rho$  为流体密度,  $g$  为重力加速度,  $R$  为井的半径.

初始条件为

$$p = 0 \quad t = 0 \text{ 时} \quad (3)$$

方程(1)为非齐次的热传导方程, 为去掉非齐次项, 作变换

$$p = Q + p_a \frac{\alpha}{k} a \quad (4)$$

代入方程和边界条件与初始条件. 考虑到  $p_a(0)=0$ , 可得到  $Q$  的方程和定解条件为

$$\begin{cases} \nabla^2 Q = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial Q}{\partial t} & r \geqslant R \\ \frac{\partial Q}{\partial r} - b \frac{\partial Q}{\partial t} = -bB_p \frac{\partial p_a}{\partial t} & r = R \\ Q = 0 & t = 0 \end{cases} \quad (5)$$

式中,  $B_p$  为通常所定义的气压效率

$$B_p = \frac{\eta\beta}{\alpha + \eta\beta}$$

对式(5)作拉氏变换. 考虑到  $r \rightarrow \infty$  时的零流量条件, 可解得  $Q(r, t)$  在拉氏空间中的像函数为

$$\bar{Q}(r, s) = \frac{bB_p k_0 \left( \sqrt{\frac{s}{a}} r \right)}{\sqrt{\frac{s}{a}} k_1 \left( \sqrt{\frac{s}{a}} R \right) + bsk_0 \left( \sqrt{\frac{s}{a}} R \right)} s \bar{p}_a \quad (6)$$

式中,  $\bar{Q}(r,s)$  为  $Q(r,t)$  的拉氏变换;  $s$  为拉氏变量;  $k_0, k_1$  为第二类零阶和一阶虚宗量贝塞尔函数;  $\bar{p}_a$  为大气压力  $p_a$  的拉氏变换.

令  $r=R$ , 可得井壁压力为

$$Q(R,t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{bB_p k_0 \left( \sqrt{\frac{s}{a}} R \right)}{\sqrt{\frac{s}{a}} k_1 \left( \sqrt{\frac{s}{a}} R \right) + bs k_0 \left( \sqrt{\frac{s}{a}} R \right)} \right] * p'_a(t)$$

式中,  $\mathcal{L}^{-1}$  表示拉氏反变换; “\*”表示卷积;  $p'_a(t)$  为  $p_a(t)$  的导数. 中括号内的函数除了  $s=0$  处为分枝点处, 全平面内解析, 利用围通积分进行反演, 可得  $Q(R,t)$  为

$$Q(R,t) = \frac{1}{\rho g} \frac{2}{\pi} \frac{ba}{R} B_p \int_0^t \int_0^\infty f(u, t-\tau) du \frac{dp_a(\tau)}{d\tau} d\tau$$

其中

$$f(u, t) = e^{-\frac{a}{R^2} u^2} - \frac{J_1(u)Y_0(u) - J_0(u)Y_1(u)}{\left[ J_1(u) - \frac{ba}{R} u J_0(u) \right]^2 + \left[ Y_1(u) - \frac{ba}{R} u Y_0(u) \right]^2}$$

结合式(4)和井底压力平衡条件可得最终的水位振荡为

$$h(t) = -\frac{B_p}{\rho g} \left\{ p_a(t) - \frac{2}{\pi} \frac{ba}{R} \int_0^t \int_0^\infty f(u, t-\tau) du \frac{dp_a(\tau)}{d\tau} d\tau \right\} \quad (7)$$

上式中,  $J_0(u), J_1(u)$  为 0 阶和一阶第一类贝塞尔函数;  $Y_0(u), Y_1(u)$  为 0 阶和一阶第二类贝塞尔函数.

## 2 解的物理意义及讨论

式(7)表示了井-含水层系统在  $t=0$  时起任一气压过程作用下井水位所受到的扰动. 可以看出, 扰动由两部分组成: 第一部分为稳态项, 其大小为  $-\frac{B_p}{\rho g} p_a(t)$ , 这部分与外加气压变化成正比, 比例系数就是通常所说的气压效率; 第二部分为迟滞项, 它与从初始时刻到  $t$  时刻的整个气压过程有关.

为更进一步分析稳态项的意义, 假定  $p_a(t)$  当  $t \geq t_0$  时保持恒定值, 而  $t \leq t_0$  时气压可以任意变化. 这时  $h(t)$  为

$$h(t) = \begin{cases} -\frac{B_p}{\rho g} \left\{ p_a(t) - \frac{2}{\pi} \frac{ba}{R} \int_0^t \int_0^\infty f(u, t-\tau) du \frac{dp_a(\tau)}{d\tau} d\tau \right\} & t \leq t_0 \\ -\frac{B_p}{\rho g} \left\{ p_a(t_0) - \frac{2}{\pi} \frac{ba}{R} \int_0^{t_0} \int_0^\infty f(u, t-\tau) du \frac{dp_a(\tau)}{d\tau} d\tau \right\} & t > t_0 \end{cases}$$

由于  $f(u, t-\tau)$  中有因子  $e^{-\frac{a}{R^2} u^2 (t-\tau)}$ , 所以, 当  $t \rightarrow \infty$  时  $h(t) \rightarrow -\frac{B_p}{\rho g} p_a(t_0)$ , 由此, 我们可以得出结论: 式(7)中的稳态项的作用, 相当于从所考虑时刻起, 气压不变的条件下无穷长时间后的水位值. 所以, 从这个意义上说, 在时域中, 某一时刻的气压对水位的干扰具有无穷长的滞后时间. 另外, 若不假定  $t_0$  时刻以后气压保持不变, 则稳态项不能代表  $t_0$  时刻的气压对以后任一时刻的水位的扰动. 这样, 实际工作中有时以气压系数乘以当时气压值再后推一个滞后时间, 作为后一时刻水位所受到的扰动大小的做法是不够全面

的.

为进一步研究由气压变化引起的水位升降过程, 设气压变化  $p_a(t)$  为单位阶跃函数, 则其导数为一  $\delta$  函数,  $\frac{dp_a}{dt} = \delta(t - \tau_0)$ , 代入式(7)可得脉冲响应函数为

$$h_\delta(t) = \begin{cases} -\frac{B_p}{\rho g} \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \frac{ba}{R} \int_0^\infty f(u, t - \tau_0) du \right\} & t \geq \tau_0 \\ 0 & t < \tau_0 \end{cases} \quad (8)$$

根据压缩系数  $\alpha$ ,  $\beta$  和孔隙度  $n$  的定义, 作用在地面上的大气压力  $p_a(t)$  经过含水层骨架和孔隙流体的分担, 平衡时作用在孔隙流体上的压力为  $\frac{\alpha}{\alpha + n\beta} p_a(t)$ , 而通过井孔中流体作用于井底流体的压力为  $p_a(t)$ , 井底和地层中流体压力不平衡, 就造成了流体由井中向含水层的流动( $p_a(t) > 0$  时), 或从含水层向井中的流动( $p_a(t) < 0$  时). 由于井孔大小有限, 而含水层的体积为无穷大, 因此, 流动平衡后含水层的压力基本上不会改变, 井中水位必须下降一个高度  $\frac{n\beta}{\alpha + n\beta} p_a(t)$ , 这就是稳态项. 但是, 由于井中水头下降造成的水在井与含水层之间的流动不能瞬间完成, 这就出现了式(8)中的第二项, 即迟滞项. 可见, 迟滞项是由于大气压力通过井中流体作用于井底和通过上覆地层作用于含水层中的孔隙流体所造成的流体压力不平衡而引起的过渡过程.

由于被积函数  $f(u, t)$  太复杂, 直接求解析积分结果已不可能, 用数值积分法来完成式(8)中迟滞项的计算. 用  $I(t)$  表示脉冲响应的迟滞项

$$I(t) = \frac{2}{\pi} \frac{ba}{R} \int_0^\infty f(u, t) du \quad (9)$$

则任意气压过程作用下井水位的响应可写成

$$h(t) = -\frac{B_p}{\rho g} \left\{ p_a(t) - \int_0^t I(t - \tau) \frac{dp_a(\tau)}{d\tau} d\tau \right\} \quad (10)$$

先研究被积函数  $f(u, t)$  的性质,  $t$  作为一参数. 取一般情况下的含水层和井的参数值,  $\alpha = 6 \times 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$ ,  $\beta = 4.5 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ ,  $n = 0.1$ ,  $K = 1 \times 10^{-10} \text{ m/Pa} \cdot \text{s}$ ,  $\rho = 1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $M = 3 \text{ m}$ ,  $R = 0.1 \text{ m}$ . 图 1 为不同时间  $t$  时被积函数  $f(u, t)$  随  $u$  的变化曲线.

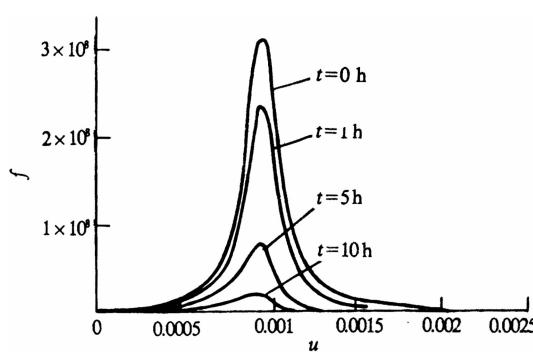


图 1 被积函数  $f(u, t)$  的性质

算, 结果如图 2、图 3、图 4 所示.

从图 1 可以看出, 一般情况下, 对于所有的  $t$ ,  $f$  函数先是急剧上升, 随后又急剧下降, 很快收敛于 0;  $t = 0$  时,  $f$  曲线形状最尖, 极值最大,  $t$  增大时, 整个曲线下移.  $f$  函数的这种性质对作数值积分十分有利. 实际上, 只要对  $u$  积到 0.003 就足够精确了.

对图 1 中的某条曲线作其对  $u$  的积分, 就可得到迟滞项  $I(t)$ . 我们对不同水文地质参数和井孔半径作了计

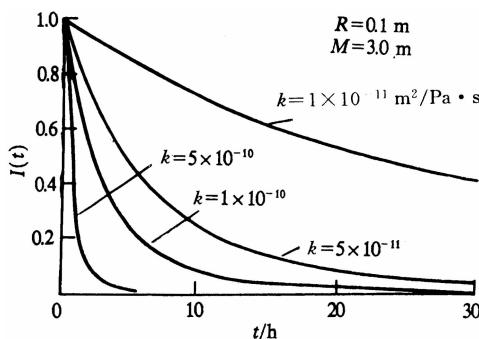
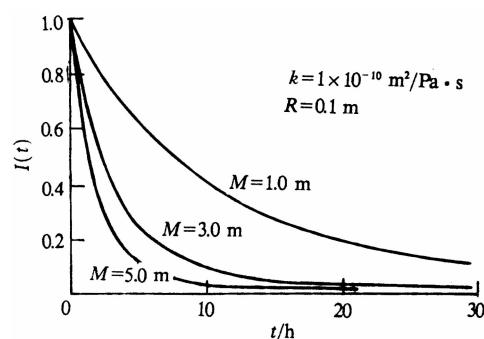
图 2 渗透系数对迟滞项  $I(t)$  的影响图 3 含水层厚度对迟滞项  $I(t)$  的影响

图 2 表明，在其它参数相同的条件下，随着含水层渗透系数的增大，迟滞时间迅速减小，这是由于渗透系数大的地层渗流阻力小的缘故。

图 3 表明，含水层厚度越大，迟滞时间也越小。因为地层厚度越大，井筒中同样体积的水要流入含水层所花的时间就越短。

图 4 表明，井筒半径越大，迟滞时间越大。这可以解释如下：井筒半径越大，井中同样高度的水柱所占的体积越大，渗流面积也越大。由于水的体积与井半径平方成比例，而渗流面积与半径本身成比例，所以最终迟滞时间还是增大了。

### 3 结 论

(1) 井水位的气压响应由稳态项和迟滞项组成，稳态项只与当时气压值有关，迟滞项与整个气压过程有关。

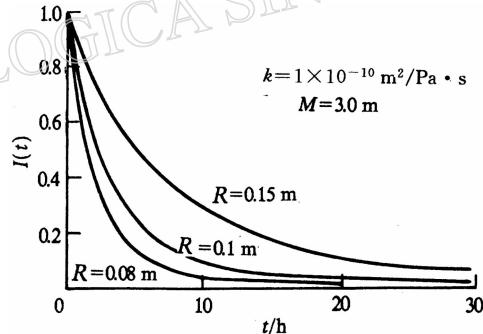
(2) 井水位的气压响应也可由其脉冲响应和气压过程对时间导数的卷积构成。

(3) 脉冲响应的迟滞项与含水层的水文地层参数和井孔半径有关。渗透系数越大、含水层厚度越大、井孔半径越小，迟滞时间越小。

(4) 为了全面地分析研究井水位的记录资料，排除气压变化的干扰，必须取得气压效率  $B_p$  和迟滞曲线  $I(t)$ ，这有待于今后进一步的研究。

### 参 考 文 献

- 汪成民、车用太、万迪、董宁玉，1988. 地下水微动态研究，167—172. 地震出版社，北京。  
 汪成民(主编)，1990. 中国地震地下水动态观测网，57—67. 地震出版社，北京。  
 张昭栋、郑金涵、冯初刚，1986. 气压对水井水位观测的影响. 地震, 1: 42—46.  
 张昭栋、郑金涵、张广城、靖继才，1989. 承压井水位对气压动态过程的响应. 地球物理学报, 32, 539—548.

图 4 井孔半径对迟滞项  $I(t)$  的影响